SEMINAIRE DE GEOMETRIE ALGEBRIQUE DU BOIS-MARIE

1963 - 1964

# THEORIE DES TOP@S ET COHOMOLOGIE ETALE DES SCHEMAS

(SGA 4)

Un séminaire dirigé par

M. Artin, A. Grothendieck, J.L. Verdier

Avec la collaboration de

P. Deligne, B. Saint-Donat

Tome 3

(Exposés IX à XIX)

Table des Matières


Exposé IX

Faisceaux constructibles
Cohomologie d'un courbe algèbrique

par M. Artin . . . . . 1

Exposé X

Dimension cohomologique: premiers résultats

par M. Artin . . . . . 43

Exposé XI

Comparaison avec la cohomologie classique:
cas d'un préschéma lisse

par M. Artin . . . . . 64

Exposé XII

Théorème de changement de base pour un morphisme
propre

par M. Artin . . . . . 79

Exposé XIII

Théorème de changement de base pour un morphisme
propre: fin de la démonstration

par M. Artin . . . . . 132

Exposé XIV

Théorème de finitude pour un morphisme propre;
dimension cohomologique des schémas algébriques
affines

par M. Artin . . . . . 145

Exposé XV

Morphismes acycliques

par M. Artin . . . . . 168

Exposé XVI

Théorème de changement de base par un morphisme
lisse, et appliquations

par M. Artin . . . . . 206

Exposé XVII

Cohomologie à supports propres

par P. Deligne . . . . . 250

Appendice par B. Saint-Donat . . . . . 462

Exposé XVIII

La formule de dualité globale

par P. Deligne . . . . . 481

Exposé XIX

Cohomologie des préschémas excellents d'égales caractéristiques

par M. Artin . . . . . 588

Index des notations . . . . . 639

Index terminologique . . . . . 640

Exposé IX

# FAISCEAUX CONSTRUCTIBLES
# COHOMOLOGIE D'UNE COURBE ALGEBRIQUE

par M. ARTIN

Sommaire :

0. Introduction
1. Le sorite des faisceaux de torsion
2. Faisceaux constructibles
3. Théories de Kummer et d'Artin-Schreier
4. Cas d'une courbe algébrique
5. La méthode de la trace.

0. Introduction.

On notera qu'à partir du présent exposé, contrairement aux exposés précédents et à la théorie cohomologique classique des espaces topologiques, nous sommes obligés, pour la validité des énoncés essentiels, de nous limiter aux faisceaux de torsion (et souvent même, plus précisément, aux faisceaux de torsion premiers aux caractéristiques résiduelles).

Signalons qu'en fait une théorie "raisonnable" de la cohomologie à coefficients entiers (ou même réels), pour les variétés sur un corps algébriquement clos de caractéristique $p \neq 0$, analogue à la théorie classique pour le cas $k = \mathbb{C}$, n'existe pas (comme l'a remarqué Serre). Plus précisément, il n'existe pas de foncteur contravariant $H^1$, défini disons sur la catégorie des schémas projectifs lisses sur le corps $K$ alg. clos de car. $p > 0$, à valeurs dans la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{R}$ (ou un sous-corps de $\mathbb{R}$), "commutant aux produits", i.e. tel que $H^1(X \times Y) \xleftarrow{\sim} H^1(X) \times H^1(Y)$, et tel que $\dim H^1(X) = 2$ si $X$ est une courbe connexe de genre 1. En effet, il s'ensuivrait que si $X$ est une variété abélienne sur $k$, alors l'application $u \longmapsto u^1$ de $\mathrm{End}(X)$ dans $\mathrm{End}(H^1(X))$ est additive, donc une représentation de l'anneau opposé de $\mathrm{End}(X)$. Mais en caractéristique $p$, il existe des courbes

elliptiques $X$ ayant comme anneau d'endomorphismes un ordre maximal $A$ d'une algèbre de quaternions définie sur $\mathbb{Z}$ ([3], p.198), et une telle algèbre n'a évidemment pas de représentation dans un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$ puisque $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ est un corps (le corps des quaternions).

## 1. Le sorite des faisceaux de torsion

Soient $T$ un topos et $F$ un faisceau abélien sur $T$.
On peut multiplier par $n$ dans $F$ ($n \in \mathbb{Z}$ un nombre entier), cette multiplication étant induite par l'opération analogue dans (Ab). Notons ${}_nF$ le noyau de cette multiplication; donc ${}_nF(X)$, pour $X \in \mathrm{Ob}\, T$, est le groupe des sections de $F(X)$ dont l'ordre divise $n$.

On désigne par $\mathbb{P}$ l'ensemble de tous les nombres premiers.

Définition 1.1. Soit $p$ un ensemble de nombres premiers. On dit que $F$ est un faisceau de $p$-torsion, ou un $p$-faisceau, si le morphisme canonique

$$\varinjlim_n {}_nF \longrightarrow F \quad \text{est bijectif},$$

$n$ parcourant l'ensemble des entiers tels que $\mathrm{ass}\, n \subset p$, c'est-à-dire, tels que les nombres premiers divisant $n$ soient dans $p$. Si $p = \mathbb{P}$ est l'ensemble de tous les nombres premiers, on dit simplement que $F$ est de torsion.

Proposition 1.2.

(i) $F$ est de $p$-torsion si et seulement si $F$ est le faisceau associé à un préfaisceau à valeurs dans des groupes abéliens de $p$-torsion; on peut prendre

$$P = \varinjlim_{\mathrm{ass}\, n \subset p} {}_nF \quad .$$

(ii) Si $F$ est de p-torsion et si $X \in \mathrm{Ob}\, T$ est un objet quasi-compact* , alors $F(X)$ est un groupe de p-torsion.

(iii) Si $T$ est localement de type fini (VI 1.1 ), alors $F$ est de p-torsion si et seulement si $F(X)$ est un groupe de p-torsion pour chaque $X \in \mathrm{Ob}\, T$ quasi-compact. Dans ce cas, on a

$$\varinjlim_{\mathrm{ass}\ n \subset p} H^q(T/X;\ {}_nF) \xrightarrow{\sim} H^q(T/X;\ F)$$

pour chaque $X$ quasi-compact et tout $q$ .

(iv) Si $u : T \to T'$ est un morphisme de topos et si $F'$ est de p-torsion sur $T'$ , alors l'image inverse $u^*F$ est un faisceau de p-torsion sur $T$ .

(v) Si $u : T \to T'$ est un morphisme de topos, avec $T$ et $T'$ localement de type fini et $u$ quasi-compact*, et si $F$ est un faisceau de p-torsion sur $T$ , alors les $R^q u_* F'$ sont des faisceaux de p-torsion sur $T$ pour tout $q$ .

Démonstration : (i) Evidemment, si un faisceau $F$ est de p-torsion, $F$ est le faisceau associé au préfaisceau $P$ dont le groupe des sections $P(X)$ est le sous-groupe des éléments de p-torsion de $F(X)$. Inversement, soit $F = \underline{a}P$ (II) le faisceau associé à $P$ , où $P$ est à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens de p-torsion. De la suite exacte

$$0 \longrightarrow {}_nP \longrightarrow P \xrightarrow{n} P$$

on déduit une suite exacte

$$0 \longrightarrow \underline{a}({}_nP) \longrightarrow F \xrightarrow{n} F \quad ,$$

---

* Un objet $X$ d'un topos est dit quasi-compact si chaque famille couvrante $\{X_i \longrightarrow X\}$ peut être majorée par une famille couvrante finie. Un morphisme $u$ de topos est quasi-compact si l'image inverse de chaque objet quasi-compact est encore quasi-compacte.

d'où $\underline{a}({}_nP) = {}_nF$ . Comme le foncteur $\underline{a}$ commute aux limites inductives, on déduit de

$$\varinjlim_{\text{ass } n \subset p} (\text{préf})\ {}_nP \xrightarrow{\sim} P$$

qu'on a aussi

$$\varinjlim_{\text{ass } n \subset p} {}_nF \xrightarrow{\sim} F .$$

(ii) Posons $P = \varinjlim(\text{préf})\ {}_nF$ . Alors on a $P \subset F$ , donc $P$ est un préfaisceau séparé, et par suite

$$\underline{a}P(X) = \varinjlim (\ker( \textstyle\prod_i P(X_i) \rightrightarrows ))\quad ,$$

où comme d'habitude la limite est prise suivant les familles couvrantes $\{X_i \longrightarrow X\}$ . Mais comme $X$ est quasi-compact, il suffit de prendre les familles couvrantes finies. Pour ces familles $\prod_i P(X_i)$ est de p-torsion; donc le ker l'est aussi. Par suite $\underline{a}P(X) = F(X)$ est de p-torsion.

(iii) Pour vérifier que $\varinjlim {}_nF \longrightarrow F$ est bijectif, il suffit de le faire pour les valeurs sur $X \in \text{Ob } T$ pour chaque $X$ d'une famille de générateurs. On est donc ramené à (ii) pour la première assertion. La deuxième assertion est une conséquence de

(iv) Conséquence de (i) puisque $u^*(\underline{a}P') = \underline{a}(u'P)$

(v) Conséquence facile de (iii).

On aura aussi besoin d'une variante non-abélienne. Mais il y a des problèmes techniques dans la définition (j'ignore s'ils sont sérieux), et on se contentera donc de donner une définition pour la topologie étale d'un schéma.

Définition 1.3. Soit p un ensemble de nombres premiers. On dit qu'un groupe G est un ind-p-groupe si chaque sous-ensemble fini de G engendre un sous-groupe fini d'ordre n , avec ass $n \subset p$ . Il revient au même de dire que les sous-groupes finis $G_\alpha$ d'ordre $n_\alpha$ , avec ass $n_\alpha \subset p$ , forment un ensemble filtrant, et que $G = \varinjlim G_\alpha$ . Si $p = \mathbb{P}$, on dit groupe ind-fini au lieu de ind-p-groupe.

On vérifie immédiatement la

Proposition 1.4.

(i) Un sous-groupe ainsi qu'un quotient d'un ind p-groupe est encore un ind p-groupe.

(ii) Une limite inductive filtrante deind-p-groupes est un ind-p-groupe.

(iii) Une limite projective finie deind-p-groupes est un ind-p-groupe.

Définition 1.5. Soit X un schéma. On dit qu'un faisceau F de groupes sur X est un faisceau de ind p-groupes (resp. de groupes ind-finis) si pour chaque $U \longrightarrow X$ étale, avec U quasi-compact, F(U) est un ind p-groupe (resp. un groupe ind-fini).

Proposition 1.6. Soit F un faisceau de groupes sur le schéma X.

(i) F est un faisceau de ind-p-groupes si et seulement si pour chaque point géométrique $\bar{\xi}$ de X , la fibre $F_{\bar{\xi}}$ est un ind-p-groupe.

(ii) Si $f: X \longrightarrow X'$ est un morphisme et si F' est un faisceau de ind-p-groupes sur X' , $f^*F'$ est un faisceau de ind-p-groupes.

(iii) Si $f: X \longrightarrow X'$ est un morphisme quasi-compact et F est un faisceau de ind-p-groupes sur X , alors $f_*F$ est un faisceau de ind-p-groupes.

Démonstration. (i) Supposons que F soit un faisceau de ind-p-groupes, et soit $\bar{\xi}$ un point géométrique de X . Alors $F = \varinjlim F(X')$, où X' parcourt

un système pseudo-filtrant de schémas étales sur $X$ (VIII 3.9). Il est évident que les $X'$ affines (donc quasi-compacts) forment un ensemble cofinal, et que par suite $F$ est limite inductive de ind p-groupes, donc est un ind-p-groupe d'après 1.4 (ii). Inversement, supposons que pour chaque $\xi$ la fibre $F_\xi$ soit un ind-p-groupe et soit $U \longrightarrow X$ étale, $U$ quasi-compact. Soit $S \subset F(U)$ un sous-ensemble fini. Pour chaque point géométrique $\xi$ de $U$, l'image de $S$ dans $F_\xi$ engendre un groupe fini. Comme un groupe fini est de présentation finie, on conclut aisément qu'il existe un $U_\xi$ étale sur $U$, $\xi$-ponctué, tel que $S$ engendre un groupe fini dans $F(U_\xi)$ (cf. VIII 4). Un nombre fini de tels $U_\xi$ forment un recouvrement de $U$, soit $\{U_1,\dots,U_n\}$. Alors l'image de $S$ dans $\prod F(U_i)$ engendre un sous-groupe fini, et comme $F(U) \subset \prod F(U_i)$, on a gagné.

L'assertion (ii) est triviale à partir de (i), et (iii) est immédiate.

## 2. Faisceaux constructibles

2.0. Soit $T$ un topos. Rappelons qu'à chaque élément $S \in Ob(Ens)$ on associe le faisceau $S_T$ associé au préfaisceau $P$ tel que $P(X) = S$ pour chaque $X \in Ob(T)$. L'objet de $T$ qui représente $S_T$ est

$$\coprod_{s \in S} e \quad = \quad " \; S \times e \; " \quad ,$$

$e$ l'objet final de $T$. $S_T$ est appelé faisceau constant, de valeur $S$ (IV On définit d'une manière évidente la notion de faisceau de groupes constant, de $A$-modules constant ($A$ un anneau), et de faisceau abélien constant, de valeur $M$. Un morphisme $f_T : S_T \longrightarrow S'_T$ de faisceaux constants est dit constant s'il provient d'un morphisme d'ensembles $f : S \longrightarrow S'$.

Un faisceau $F$ est dit localement constant s'il existe un recouvrement $\{e_i \longrightarrow e\}$ de l'objet final tel que $F$ devienne constant sur chaque $e_i$.

On définit d'une façon analogue la notion de faisceau de groupes ou de A-modules localement constant, et de morphisme localement constant $f : F \longrightarrow G$, si $F$ et $G$ sont des faisceaux localement constants. Enfin, un faisceau de groupes ou de A- modules localement constant est dit de type fini (resp. de présentation finie) si les valeurs locales sont des groupes ou des A- modules de type fini (resp. de présentation finie).

Lemme 2.1. (i) Soit $f: F \longrightarrow G$ un morphisme de faisceaux d'ensembles localement constant sur $T$, et supposons que les valeurs locales de $F$ soient des ensembles finis. Alors $f$ est localement constant.

(ii) Soit $f: F \longrightarrow G$ un morphisme de faisceaux de A- modules localement constants, avec $F$ de type fini. Alors $f$ est localement constant, et le noyau et conoyau de $f$ sont localement constants.

(iii) Soit $o \to F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \to o$ une suite exacte de faisceaux de A-modules (resp. de groupes), avec $F'$ et $F''$ localement constants, $F''$ étant de présentation finie. Alors $F$ est localement constant.

Démonstration de (i) et (ii). On se ramène sans peine au cas où $F$ et $G$ sont constants. Traitons (ii) : soit $F = M_T$, $G = N_T$ ($M,N$ des A-modules), et soit $S \subset M$ un sous-ensemble fini de générateurs de $M$. Alors $f$ est déterminé par sa restriction à $S_T$ et $f$ sera localement constant si $f \mid S_T$ l'est. On est donc réduit à (i) pour la première assertion de (ii), et la deuxième assertion est conséquence triviale de la première.

Il reste donc à démontrer (i). Supposons que $F = S_T$, $G = S'_T$ soient constants, et notons aussi par $f$ le morphisme d'objets $f: S\times e \longrightarrow S'\times e$ (notation comme ci-dessus). Soient $f_s: e \longrightarrow S'\times e$ ($s' \in S$) les composants de $f$ : puisque $S$ est fini, il suffit évidemment de traiter le cas $f = f_s$, c'est-à-dire, où $S$ est un ensemble d'un élément. Soit $X_{s'} \longrightarrow e$ ($s' \in S'$) la famille des morphismes qui rendent cartésiens les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} X_{s'} & \longrightarrow & e \\ \downarrow & & \downarrow i_{s'} \\ e & \xrightarrow{f} & S'\times e \end{array}$$

où $i_{s'}: e \longrightarrow S' \times e$ est "l'inclusion" dans la s'-ième composante. La famille $\{i_{s'}\}$ est trivialement couvrante, donc $\{X_{s'} \longrightarrow e\}$ l'est aussi. On vérifie immédiatement (puisque les sommes directes dans un topos sont disjointes que $f$ devient constant sur $X_{s'}$, et que par suite $f$ est localement constant.

Démonstration de (iii). Traitons le cas des faisceaux de A-modules. On peut supposer $F'$ et $F''$ constants, $F''$ de valeur $M''$ un A-module de présentation finie. Si $M''$ est libre, donc admet une base finie $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, alors les $e_i$ définissent des sections de $F''$, donc se relèvent localement en des sections de $F$, ce qui montre que localement l'extension $F$ de $F''$ par $F'$ se scinde, ce qui prouve que $F$ est localement isomorphe à $F' \times F''$, donc est localement constant. Dans le cas général, choisissant un homomorphisme surjectif $\varphi : L'' \longrightarrow M''$, avec $L''$ libre de type fini; le noyau $R$ de $\varphi$ est de type fini, et posant $L = L''_T \times_{M''_T} F = L''_T \times_{F''} F$ ; on voit d'une part que $L$ est une extension de $L''_T$ par $G$, donc localement constant d'après ce qui précède, d'autre part qu'on a une suite exacte $o \longrightarrow R_T \longrightarrow L \longrightarrow F \longrightarrow o$, ce qui grâce à (ii) implique que $F$ est localement constant.

A partir de maintenant, on se borne aux topos étales des schémas.

Lemme 2.2. Soit $X$ un schéma et $F$ un faisceau sur $X$ qui est localement constant. Alors $F$ est représenté par un $Y/X$ étale. Si de plus les fibres de $F$ sont finies (resp. et non-vides), alors $Y$ est un revêtement étale (resp. et surjectif).

Démonstration. Descente (SGA 1 IX 4.1 si $F$ à fibres finies, SGA 3 X 5.4 dans le cas général).

Définition 2.3. Un faisceau d'ensembles (resp. de groupes, resp. de A-modules) est dit constructible si pour chaque ouvert affine $U \subset X$ il existe une décomposition de $U$ en réunion d'un nombre fini de sous-schémas constructibles (EGA $O_{III}$ 9.1.2) localement fermés réduits $U_i$ telle que le faisceau induit par

$F$ sur chaque $U_i$ soit localement constant, de valeur finie (resp. finie, resp. de présentation finie(*)).

2.3.1. L'hypothèse de finitude sur les valeurs locales revient à dire que pour chaque point géométrique $\xi$, la fibre $F_\xi$ est finie (resp. finie, resp. de présentation finie). Il s'ensuit immédiatement de 2.1 (i) qu'un faisceau de groupes $F$ est constructible si et seulement si le faisceau d'ensembles sous-jacent à $F$ est constructible.

On fera attention que si $F$ est un faisceau abélien, il est constructible en tant que faisceau de groupes (ou encore, en tant que faisceau d'ensembles) si et seulement si il est constructible comme faisceau de $\mathbb{Z}$-modules, et si de plus ses fibres sont finies. Ainsi, $\mathbb{Z}_X$ est constructible comme $\mathbb{Z}$-module, mais non comme faisceau de groupes.

Proposition 2.4. (i) Soit $X$ quasi-compact et quasi-séparé. Alors un faisceau (resp. faisceau de groupes, resp. faisceau de $A$-modules) est constructible si et seulement s'il existe une décomposition de $X$ en réunion de parties localement fermées constructibles, telle que $F$ devienne localement constant, et fini (resp. fini, resp. de présentation finie), sur chaque $X_i$.

(ii) Pour vérifier que $F$ est constructible, il suffit de vérifier que $F|U_i$ est constructible pour les $U_i$ d'un recouvrement ouvert donné de $X$.

(iii) Soit $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme. Alors $f^*F$ est constructible si $F$ l'est.

---

(*) Lorsque $A$ n'est pas supposé noethérien, il est préférable, pour les besoins de l'Algèbre Homologique, d'exiger ici, au lieu de la seule présentation finie pour le $A$-module $M$, qu'il ait une résolution gauche par des $A$-modules libres de type fini. La notion introduite dans (2.3) devrait alors prendre le nom : $F$ est 1-constructible, (plus généralement, on définirait de façon évidente la n-constructibilité, pour tout entier $n \geqslant 0$). Nous allons provisoirement pour le présent exposé garder la terminologie sous la forme (2.3), qui est surtout raisonnable dans le cas où $A$ est noethérien, où elle coïncide avec celle qu'on vient de signaler. Comparer SGA 6 I pour des notions de finitude dans des cas non noethériens.

(iv) L'ensemble des points où la fibre d'un faisceau constructible est non-vide (resp. non-nulle) est un sous-ensemble localement constructible (EGA $O_{III}$ 9.1.2

(v) Soit X localement noethérien. Alors un faisceau d'ensembles (resp...) F sur X est constructible si et seulement si pour chaque $x \in X$, il existe un ouvert non-vide de l'adhérence $\bar{x}$ de x tel que F induise un faisceau localement constant de valeur finie (resp. ...) sur U .

Démonstration. Evidemment, si $f: Y \longrightarrow X$ est un morphisme et s'il existe une décomposition de X en réunion de parties $X_i$ localement fermées et constructibles, telles que F devienne localement constant sur chaque $X_i$, il en est de même de Y et $f^*F$ (cf. EGA IV 1.8.2). Cela prouve l'implication $\Longleftarrow$ de (i). Supposons maintenant que X soit quasi-compact et quasi-séparé et soit $\{U_1,\dots,U_n\}$ un recouvrement ouvert affine de X tel que $F|U_i$ soit constructible pour chaque i . Pour trouver une décomposition de X comme dans (i), il suffit de le faire pour $U_n$ et pour $Y = X - U_n$ (avec la structure induite réduite), $U_n$ et Y étant constructibles dans X grâce à l'hypothèse "X quasi-séparé". Or une décomposition existe pour $U_n$ d'après la définition de constructibilité, et Y est réunion de n-1 ouverts affines $V_i = Y \cap U_i$ $(i = 1,\dots,n-1)$ avec $F|V_i$ constructible, d'où le résultat (i) par récurrence sur n . Le même raisonnement démontre (ii) ; en effet, l'hypothèse implique que $F|U$ est constructible pour chaque ouvert affine U "assez petit", et on peut recouvrir un ouvert affine V arbitraire par un nombre fini de tels ouverts. L'assertion (ii) montre que la notion de constructibilité est locale sur X , et (iii), (iv) s'ensuivent immédiatement. L'implication $\Longrightarrow$ de (v) est immédiate, et ne dépend pas de l'hypothèse noethérienne. Si X est noethérien on démontre l'implication $\Longleftarrow$ par la "récurrence noethérienne" habituelle.

Proposition 2.5. Soit X quasi-compact et quasi-séparé, et F un faisceau de groupes ou de A- modules constructible sur X . Alors il existe une filtration finie de F dont les quotients successifs sont de la forme $i_!G$, où $i : U \rightarrow$ est l'inclusion d'une partie localement fermée et constructible, et où G est localement constant et constructible sur U . Si X est noethérien, il existe une telle filtration, avec des U irréductibles.

Démonstration. D'après 2.4 (i), il existe une décomposition de $X$ en réunion finie de parties localement fermées constructibles $X_i$ telles que chaque $F|X_i$ soit localement constant et fini (resp. de présentation finie). Ecrivons $X_i = U_i \cap \complement V_i$, où $U_i$ et $V_i$ sont des ouverts constructibles, et soit $N$ le nombre d'ouverts de $X$ dans la sous-topologie $T$ engendrée par $\{U_i, V_i\}$. Raisonnons par récurrence sur $N$: si $W$ est un élément non-vide minimal de $T$, il est évident que $F|W$ est localement constant et de présentation finie. Soit $i: W \to X$ le morphisme d'inclusion et $Y = X - W$. On a la suite exacte

$$0 \longrightarrow i_! i^* F \longrightarrow F \longrightarrow F|Y \longrightarrow 0 ,$$

et on se réduit ainsi à la même assertion pour $Y$ et pour le faisceau $F|Y$, où on peut appliquer l'hypothèse de récurrence.

Proposition 2.6. Supposons que $A$ soit un anneau noethérien.

(i) Une limite projective (resp. inductive) finie de faisceaux de $A$-modules ou d'ensembles constructibles est constructible. En particulier, le noyau, le conoyau et l'image d'un morphisme de faisceaux de $A$-modules constructibles sont constructibles.

(ibis) Une limite projective finie de faisceaux d'ensembles (resp. de groupes) constructibles est constructible, et si $f: F \longrightarrow G$ est un morphisme de faisceaux de groupes constructibles, le noyau, l'image, et le conoyau (si $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-groupe normal) sont constructibles. Une limite inductive finie de faisceaux d'ensembles constructibles est constructible.

(ii) Soit $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ une suite exacte de faisceaux de $A$-modules (resp. de groupes) avec $M'$, $M''$ constructibles. Alors $M$ est constructible.

(iii) Soit $M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow M_4 \longrightarrow M_5$ une suite exacte de faisceaux de $A$-modules. Alors si $M_i$ est constructible pour $i = 1,2,4,5$, il en est de même pour $i = 3$.

Démonstration. (i) Nous laissons les assertions ensemblistes et pour les groupes au lecteur. Pour le cas des faisceaux de A-modules, il suffit de démontrer que le noyau et le conoyau d'un morphisme $f: F \longrightarrow G$ de faisceaux de A-modules constructibles sont constructibles. L'assertion est locale sur $X$, et on peut donc supposer $X$ affine, donc quasi-compact et quasi-séparé. Alors on se réduit au cas où $F$ et $G$ sont localement constants par 2.4. (i), et on termine en utilisant 2.1 (ii) et l'hypothèse noethérienne sur $A$. On prouve de façon analogue l'assertion (ii) en utilisant 2.1 (iii). L'assertion (iii) est immédiate à partir de (i) et (ii).

Proposition 2.7. Soient $X$ un schéma quasi-compact et quasi-séparé, $F$ un faisceau d'ensembles (resp. de A-modules). Pour que $F$ soit constructible, il faut et il suffit qu'il soit isomorphe au conoyau d'un couple de morphismes $H \rightrightarrows G$, où $H$ et $G$ sont des faisceaux d'ensembles représentables par des schémas étales de présentation finie sur $X$ (resp. que $F$ soit isomorphe au conoyau d'un homomorphisme $\underline{A}_{V,X} \longrightarrow \underline{A}_{U,X}$, où $U$ et $V$ sont deux schémas étales de présentation finie sur $X$).

La suffisance résulte facilement de 2.6 (ibis).

Supposons que $F$ soit un faisceau d'ensembles constructibles. Utilisant l'existence des sommes infinies dans le site étale sur $X$, on voit que l'on peut trouver un épimorphisme $G \longrightarrow F$, avec $G$ représentable par un schéma étale sur $X$, que l'on peut de plus supposer somme de schémas affines $G_i$ ($i \in I$), donc séparé sur $S$. Pour toute partie finie $J$ de l'ensemble d'indices $I$, soit $G_J$ la somme des $G_i$ pour $i \in J$, et $F_J$ son image dans $F$. Comme $G_J$ et $F$ sont constructibles, il en est de même de $F_J$ (2.6 (ibis)), donc l'ensemble $X_J$ des $x \in X$ tels que les fibres de $F$ et $F_J$ en un point géométrique de $X$ sur $x$ soient égales, est localement constructible 2.4 (iv)). Comme la famille des $X_J$ est croissante et de réunion $X$, et que $X$ est quasi-compact, l'un des $X_J$ est égal à $X$ (EGA IV 1.9.9). Cela montre, quitte à remplacer $G$ par $G_J$, que l'on peut supposer $G$ affine, donc séparé sur $X$, et quasi-compact sur $X$ puisque $X$ est quasi-séparé (EGA IV 1.2.4). Soit alors $H = G \times_F G$. C'est un sous-faisceau de $G \times_S G$ qui est représentable, donc est lui-même représentable (VIII 6.1). Comme $G$ est de plus constructible

(2.6 (i bis)), il résulte encore de l'argument précédent qu'il est quasi-compact, donc (étant séparé sur X) de présentation finie sur X . Cela prouve la première assertion de 2.7 , et la deuxième se prouve par la même méthode (NB il n'est pas nécessaire que A soit noethérien). Signalons en passant que la démonstration prouve aussi le corollaire suivant :

Corollaire 2.7.1. Soient X un schéma, F un schéma étale sur X . Pour que le faisceau étale correspondant sur X soit constructible, il faut et il suffit que F soit de présentation finie sur X .

La proposition 2.7 nous sera surtout utile ici pour déduire certaines propriétés de passage à la limite pour les faisceaux constructibles :

Corollaire 2.7.2. Soit X un schéma quasi-compact et quasi-séparé. Alors tout faisceau d'ensembles (resp. de ind-p-groupes, resp. de A-modules) sur X est limite inductive d'un système inductif filtrant de faisceaux d'ensembles (resp. ...) constructibles.

Si F est un faisceau d'ensembles, reprenons les notations de la démonstration de 2.7 , et soit L l'ensemble des couples (J,H'), où J est une partie finie de I et H' une partie ouverte quasi-compacte de $H_J = G_J \times_F G_J$ . On ordonne L de la façon évidente, et on constate que, puisque F est limite des $F_J$ , et que chaque $F_J$ est limite des Coker $(H' \longrightarrow G_J)$ pour les ouverts quasi-compacts H' de $H_J$ , que F est limite inductive du système inductif des $F_\ell = \mathrm{Coker}(H' \longrightarrow F_J)$ pour $\ell = (H',J) \in L$ , d'où le cas ensembliste. Le cas des faisceaux de A-modules se traite essentiellement de la même façon, en commençant par représenter F comme conoyau d'un homomorphisme $\underline{A}_{V,X} \longrightarrow \underline{A}_{U,X}$ , avec U,V schémas étales et séparés sur X . Le cas des ind-p-groupes demande un peu plus d'attention. Reprenant les notations précédentes, nous désignons par $L(G_J)$ le faisceau en groupes libre engendré par le faisceau d'ensembles $G_J$, par $N_J$ le noyau de l'homomorphisme $L(G_J) \to F$ déduit de $G_J \to F$ , par L l'ensemble des couples (J,N'), où N' est un sous-faisceau d'ensembles de $N_J$ qui est "quasi-compact" i.e. tel qu'il existe un épimorphisme $P \longrightarrow N'$ , avec P représentable par un X-schéma quasi-compact. On ordonne L en déclarant que (J,N') est plus petit que $(J_1,N'_1)$ si $J \subset J_1$ et si

l'homomorphisme canonique $L(G_J) \longrightarrow L(G_{J_1})$ applique $N_1$ dans $N'_1$. Il est immédiat que $L$ est filtrant, et que l'on obtient un système inductif de faisceaux en groupes $F_\ell$, indexé par $L$, en prenant, pour $\ell = (J,N')$, $F_\ell$ = faisceau en groupes quotient de $L(G_J)$ par le sous-faisceau en groupes invariant engendré par $N'$. Il est immédiat de plus que $F$ est isomorphe à la limite inductive des $F_\ell$, et il reste à prouver qu'il existe une partie $L'$ de $L$, cofinale dans $L$, telle que pour $\ell \in L'$, $F_\ell$ soit un faisceau en p-groupes constructible. Pour ceci, il suffit de prouver que pour tout $J$, on peut trouver un sous-faisceau d'ensembles $N'$ de $N_J$ qui soit quasi-compact, contienne un sous-faisceau d'ensembles quasi-compact donné $N'_0$, et soit tel que le $F_\ell$ correspondant soit un faisceau en p-groupes constructible. Notons d'abord qu'il suffit, pour ceci, que les fibres de $F_\ell$ soient des p-groupes finis : alors $F_\ell$ sera automatiquement constructible, comme le lecteur vérifiera sans peine. D'autre part, le lecteur pourra vérifier également que l'ensemble $X_{N'}$ des points $x$ de $X$ tels que la fibre de $F_\ell$ en un point géométrique au-dessus de $x$ soit un p-groupe fini est localement constructible. De plus, les parties $X_{N'}$ de $X$ sont fonction croissante de $N'$, enfin leur réunion est $X$ tout entier : ce dernier point résulte du fait que la limite inductive des $F_\ell$, pour $\ell = (N',J)$ avec $J$ fixé, est le sous-faisceau en groupes $F_J$ de $F$ engendré par le sous-faisceau d'ensembles $F_J$, qui est quasi-compact, donc $\overline{F_J}$ est à fibres des p-groupes finis. D'autre part, dans un groupe libre à un nombre fini de générateurs, tout sous-groupe d'indice fini est un sous-groupe libre à un nombre fini de générateurs, donc s'il est représenté comme réunion filtrante de ses parties finies, l'une de celles-ci engendre tout le sous-groupe. De là résulte aisément que la réunion des $X_{N'}$ est bien $X$. Utilisant à nouveau (EGA IV 1.9.9) on trouve que un des $X_{N'}$ est égal à $X$, ce qui achève la démonstration de 2.7.2.

2.7.2.1. Notons que la démonstration un peu pénible du cas des schémas en groupes met en évidence le manque d'un sorite commode pour les conditions de constructibilité pour des faisceaux en groupes à fibres pas nécessairement finies; nous nous en excusons auprès du lecteur en l'invitant à combler au besoin cette lacune par ses propres moyens, et lui signalons en guise de consolation que dans 2.9 (iii) nous obtenons une démonstration plus simple lorsque $X$ est noethérien.

Corollaire 2.7.3. Soient X un schéma quasi-compact et quasi-séparé, F un faisceau d'ensembles (resp. de ind-groupes finis, resp. de A-modules) constructible. Alors le foncteur $\mathrm{Hom}(F,G)$, où G est un faisceau d'ensembles (resp. ...) variable, commute aux limites inductives en G. Dans le cas où F est un faisceau de A-modules, A étant noethérien, les foncteurs $\mathrm{Ext}^i(X;F,G)$ en le A-module G commutent également aux limites inductives.

Ceci résulte de 2.7 et (VII 3.3) par les arguments habituels, qui sont laissés au lecteur. De même, la conjonction de 2.7 et des résultats de (VII 5) donne aisément :

Corollaire 2.7.4. Soit I une catégorie filtrante, $i \mapsto X_i : I^0 \longrightarrow (\mathrm{Sch})$ un foncteur qui transforme les flèches en morphismes affines et les objets en des schémas quasi-compacts et quasi-séparés. Pour tout schéma Y, soit $F_c(Y)$ la catégorie des faisceaux d'ensembles (resp. de ind-p-groupes, resp. de A-modules) constructibles sur Y. Alors on a une équivalence de catégories

$$F_c(X) \xleftarrow{\approx} \varinjlim_i F_c(X_i) \ ,$$

où $X = \varprojlim_i X_i$ (VII 5) et où le deuxième membre désigne la catégorie $\varinjlim$ de catégories fibrées, définie dans En particulier, tout faisceau d'ensembles (resp. ...) constructible sur X est isomorphe à l'image inverse d'un faisceau de même nature sur un des $X_i$.

Proposition 2.8. Soit $f:X \longrightarrow Y$ un morphisme surjectif et localement de présentation finie, et soit F un faisceau d'ensembles (resp. ...) sur Y. Alors F est constructible si et seulement si $f^*(F)$ l'est.

Nous utiliserons le

Lemme 2.8.1. Soit $f: X \longrightarrow Y$ un morphisme surjectif et localement de présentation finie, avec Y quasi-compact et quasi-séparé. Alors il existe une partition finie de Y en des sous-schémas $Y_i$ de présentation finie sur Y (en

particulier chaque $Y_i$ est constructible dans $X$) et pour tout $i$, des morphismes finis surjectifs $Y''_i \xrightarrow{g_i} Y'_i \xrightarrow{h_i} Y_i$, avec $h_i$ étale et $g_i$ localement libre (i.e. plat et de présentation finie, en plus de la condition $g_i$ fini), et radiciel et enfin un $Y$-morphisme $Y''_i \longrightarrow X$ (*).

Utilisant le fait que $Y$ est quasi-compact et quasi-séparé, on se ramène aisément au cas où $Y$ est quasi-affine donc séparé (en utilisant un recouvrement ouvert affine fini $(U_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $Y$ et considérant les $Y_i = U_i - U_i \cap \bigcup_{j<i} U_j$), puis au cas $Y$ affine (par le même argument). Le schéma $X$ est réunion d'ouverts affines $X_i$, et l'image $T_i$ de $X_i$ dans $Y$ est constructible (EGA IV 1.8.4 ), la réunion des $T_i$ est $X$ puisque $f$ est surjectif, d'où s'ensuit que $X$ est réunion d'un nombre fini des $T_i$ (EGA IV 1.9.9 ), de sorte que, remplaçant $X$ par le schéma somme des $X_i$ correspondants, on peut supposer $X$ affine. Alors le procédé de passage à la limite standard (EGA IV 8 8.1.2 c)) nous permet de supposer de plus $Y$ noethérien. La récurrence noethérienne habituelle, et le procédé de passage à la limite (EGA IV 8.1.2 a)) nous ramène au cas où $Y$ est réduit au spectre d'un corps $k$. Comme alors $X \neq \emptyset$, il existe un point fermé $x$ dans $X$, qui correspond à une extension finie $k'$ de $k$, elle-même extension radicielle d'une extension séparable $k'_s$ de $k$. On prendra alors $Y'=\mathrm{Spec}(k'_s)$, $Y''=\mathrm{Spec}(k')$, ce qui achève la démonstration de 2.8.1.

La nécessité dans 2.8 étant triviale (2.4 (iii)), prouvons la suffisance. On est alors ramené, par le lemme précédent, au cas où $f$ est de la forme $gh$, où $g$ et $h$ satisfont aux conditions énoncées pour $g_i, h_i$ dans le lemme. On peut donc supposer successivement, soit que $f$ est fini radiciel, cas trivial par (VIII 1.1 ), soit que $f$ est fini étale. Notons d'ailleurs que, utilisant l'hypothèse que $f^*(F)$ est constructible et la définition de la constructibilité, nous pouvions supposer (quitte à remplacer $X$ par un $X$-préschéma $X' = \coprod_i X_i$ de présentation finie et à morphisme structural surjectif) que $f^*(F)$ est déjà localement constant. Mais lorsque $f$ est étale et surjectif, cela implique que $F$ est localement constant. Comme de plus les hypothèses faites sur les fibres de $f^*(F)$ restent valables pour celles de $F$, $f$ étant surjectif, il s'ensuit bien que $F$ est constructible, ce qui achève la démonstration de 2.8.

---

(*) Cet énoncé est aussi donné dans EGA IV 17.16.4.

Proposition 2.9. Soient X un schéma noethérien, A un anneau noethérien, et p un ensemble de nombres premiers.

(i) La catégorie des faisceaux d'ensembles (resp. de ind p-groupes, resp. de A -modules) sur X est localement noethérienne, c'est-à-dire, possède un ensemble de générateurs formé d'objets noethériens.

(ii) Un faisceau F d'ensembles (resp. de ind p-groupes, resp. de A -modules) sur X est constructible si et seulement si il est noethérien. Si F est un faisceau de A -modules, alors F est constructible si et seulement si il est quotient d'une somme finie de faisceaux de la forme $A_{U/X}$ , où $U \longrightarrow X$ est étale et de type fini (notation de IV.2.4 : $A_{U/X} = A_U$) .

(iii) Les sous-faisceaux constructibles d'un faisceau F d'ensembles (resp. ...) forment un système inductif, et F est limite inductive de ces sous-faisceaux.

Démonstration. On laisse l'assertion ensembliste au lecteur. Traitons d'abord le cas d'un faisceau de A -modules. Pour (i) il faut trouver un ensemble de générateurs dont les éléments sont des objets noethériens. Or les faisceaux de la forme $A_{U/X}$ , $U \longrightarrow X$ étale et de type fini forment un ensemble de générateurs dont on voit facilement qu'ils sont constructibles, et il suffit donc de démontrer le lemme suivant :

Lemme 2.10. Soit X noethérien. Alors tout A-Module constructible est noethérien.

Démonstration du lemme.

Par récurrence noethérienne nous supposons le lemme vrai pour chaque sous-schéma X' de X distinct de X . Prenons un ouvert non-vide $X_o$ de X tel que F induise un faisceau localement constant $F_o$ sur $X_o$ .

Soit maintenant $\{F_i\}$ , $i \in \mathbb{N}$ une suite croissante de sous-faisceaux de $F_o$ . Comme pour un point géométrique P , générique pour une composante irréductible de $X_o$ , la fibre de $F_o$ en P est de type fini, la suite des fibres

$(F_i)_P$ est stationnaire, et nous pouvons supposer qu'elle est constante Or soit Q un point géométrique de $X_o$ spécialisation de P (VIII 7.2). Puisque $F_o$ est localement constant sur $X_o$, on voit immédiatement que le morphisme de spécialisation $F_{o_Q} \longrightarrow F_{o_P}$ (VIII.7) est bijectif, donc $(F_i)_Q \longrightarrow (F_i)_P$ est injectif pour chaque i .

Soient V/X étale et P-ponctué, et $s_1,\dots,s_n$ des sections $\in F_1(V)$ qui engendrent $(F_1)_P$ . Alors les $s_i$ engendrent $(F_i)_Q$ pour chaque i et chaque point géométrique Q spécialisation de P au-dessus de V . La suite de faisceaux $F_i$ est donc constante dans un voisinage de l'image de P , disons dans $X' \neq \emptyset$ . Soit Y = X-X', il suffit donc de prouver que la suite des $F_i|Y$ est stationnaire, ce qui résulte de l'hypothèse de récurrence noethérienne.

Les assertions (ii) pour les A -modules sont maintenant immédiates : Comme les $A_{U/X}$ sont des générateurs noethériens, on a évidemment F noethérien $\Longleftrightarrow$ est quotient d'une somme finie de faisceaux $A_{U/X}$ . Or $A_{U/X}$ est constructible, et par suite, compte tenu de 2.6 , F noethérien $\Longrightarrow$ F constructible; l'implication inverse étant déjà établie (2.10 ), cela établit (ii). Enfin, l'assertion (iii) pour les A -modules est une propriété des catégories localement noethériennes (cf. [1] , Ch. IV).

Traitons maintenant le cas des ind-p-groupes. Notons d'abord qu'un faisceau de groupes constructible F est certainement noethérien. En effet, puisque les fibres sont finies, on peut employer le même argument qu'avec les A - modules. On va maintenant démontrer l'assertion (iii) directement, ce qui impliquera (i) - en effet, cela démontrera que les faisceaux constructibles forment un ensemble de générateurs. De plus, un faisceau noethérien quelconque sera alors nécessairement constructible, d'où (ii).

Pour démontrer (iii), il suffit évidemment de démontrer qu'un sous-faisceau (en groupes) S d'un faisceau F de ind p-groupes engendré par un nombre fini de sections $s_i \in F(U_i)$ , $U_i \longrightarrow X$ étale de type fini, est constructible (*).

---

(*)Rappelons la définition de ce faisceau : soit $L_{U/X}$ le faisceau qui représente le foncteur $F \longmapsto F(U)$ dans la catégorie des groupes. La section $s_i \in F(U_i)$ induit un morphisme $L_{U_i/X} \longrightarrow F$ . et S est l'image du morphisme somme $\coprod_i L_{U_i/X} \longrightarrow F$. C'est le plus petit sous-faisceau qui "contient" les sections $s_i$.

(Puisqu'un faisceau constructible est noethérien, il est engendré par un nombre fini de sections.) Par récurrence noethérienne, on peut supposer que c'est vrai pour chaque sous-schéma fermé $Y$ de $X$, distinct de $X$. Or la notion de sous-faisceau engendré par des sections commute avec l'image inverse de faisceaux; en effet, soit $L_{U/X}$ le faisceau qui représente le foncteur $F \longmapsto F(U)$ dans la catégorie des groupes. Alors si $f: Y \longrightarrow X$, on a $f^*(L_{U/X}) = L_{U\times_X Y/Y}$. Comme $S$ est l'image de la somme des $L_{U_i/X}$, et comme $f^*$ commute aux sommes, il est clair que $f^*S$ est le sous-faisceau de $f^*F$ engendré par les sections $f^*(S_i)$.

On peut donc supposer que $S$ induit un faisceau constructible sur chaque fermé $Y$ distinct de $X$, et il suffit ainsi (2.4 (i)) de démontrer que $S$ induit un faisceau constructible sur un ouvert non-vide convenable de $X$. En remplaçant $X$ par un ouvert assez petit, on peut supposer que chaque $U_i$ est un revêtement étale de $X$. Il suffit de démontrer qu'alors $S$ est localement constant, à fibres finies sur un ouvert non vide convenable. C'est une assertion locale sur $X$ pour la topologie étale, et on peut donc supposer que chaque $U_i$ est complètement décomposé, disons $U_i = \coprod_{n_i} X$ (somme de $n_i$ copies de $X$). Soient $s_{ij}$ $(j = 1,\dots,n_i)$ les sections de $F(X)$ telles que $s_i$ $(s_{i1},\dots,s_{in_i})$. Evidemment, $S$ n'est autre que le sous-faisceau de $F$ engendré par les $s_{ij} \in F(X)$. Comme $F(X)$ est un ind p-groupe (1.5) les $s_{ij}$ engendrent un sous-groupe fini 1.3. Donc on peut supposer que l'ensemble des $s_i$ est un sous-groupe fini de $F(X)$, mais alors $S$ est identique au faisceau d'ensembles engendré par les $s_i$, qui est constructible en vertu de 2.6 (i) comme faisceau d'ensembles, donc comme faisceau de groupes, cqfd.

Dans les deux propositions suivantes, nous donnons des critères pour qu'un faisceau soit localement constant, ou constructible, en utilisant les homomorphismes de spécialisation (VIII 7.7).

Proposition 2.11. Soient $X$ un schéma, $F$ un faisceau d'ensembles (resp. de groupes ind-finis, resp. de $A$-modules) constructible; dans le cas

ensembliste, on suppose de plus $F$ à fibres finies. Soient $x \in X$, $\bar{x}$ un point géométrique sur $x$. Pour que $F$ soit localement constant au voisinage de $\bar{x}$, il faut et il suffit que pour tout point géométrique $\bar{x}'$ générisation de $\bar{x}$, et toute flèche de spécialisation $\bar{x}' \to \bar{x}$ (VIII 7.2), l'homomorphisme de spécialisation (VIII 7.7) $F_{\bar{x}} \to F_{\bar{x}'}$ soit un isomorphisme.

Le cas d'un faisceau en groupes étant un cas particulier de celui d'un faisceau d'ensembles, nous nous contentons de traiter celui-ci; le cas d'un faisceau de modules se traite de façon essentiellement identique. La nécessité de la condition étant triviale, nous nous bornons à établir la suffisance. Comme la fibre $I = F_{\bar{x}}$ est finie, quitte à remplacer $X$ par un schéma $X'$ étale sur $X$ convenable, on peut supposer que l'on peut trouver un homomorphisme $u: I_X \longrightarrow F$ du faisceau constant $I_X$ dans $F$, induisant un isomorphisme pour les fibres en $\bar{x}$. Utilisant la constructibilité des deux faisceaux, et 2.6, on voit aisément que l'ensemble $Z$ des points $z$ de $X$ tels que l'homomorphisme induit sur les fibres en un point géométrique $\bar{z}$ sur $z$ soit bijective, est une partie localement constructible de $X$. L'hypothèse implique aussitôt qu'elle contient les générisations de $x$, donc (EGA IV 1.10.1) c'est un voisinage de $x$, ce qui prouve que $F$ est localement constant (en l'occurrence, même constant) au voisinage de $x$, cqfd.

Définition 2.12. (*): Un schéma $X$ est dit connexe par arcs si pour tout couple $P,Q$ de points géométriques de $X$, il existe des points géométriques $P = P_0,\dots,P_n$ ; $Q_1,\dots,Q_n=Q$ et des spécialisations (VIII 7.2) $P_i \longrightarrow Q_i$ et $P_{i-1} \longrightarrow Q_i$ $(i=1,\dots,n)$. On dit que $X$ est localement connexe par arcs (pour la topologie étale) si pour chaque $U \longrightarrow X$ étale il existe un recouvrement étale $\{U_i \longrightarrow U\}$ de $U$ tel que $U_i$ est connexe par arcs pour chaque $i$.

On vérifie immédiatement qu'un préschéma localement noethérien est localement connexe par arcs.

(*) La terminologie est due à S. Lubkin.

Proposition 2.13.

(i) Soit $X$ localement connexe par arcs et soit $F$ un faisceau d'ensembles (resp. de groupes, resp. de A-modules) sur $X$. Supposons que les fibres de $F$ sont finies (resp. finies, resp. de présentation finie). Alors $F$ est localement constant si et suelement si pour toute spécialisation $P \longrightarrow Q$ de points géométriques, le morphisme de spécialisation (VIII 7.7) $F_Q \longrightarrow F_P$ est bijectif.

(ii) Supposons que $X$ soit localement noethérien et que les fibres de $F$ soient finies (resp. finies, resp. de présentation finie). Alors, si pour toute spécialisation $P \longrightarrow Q$, le morphisme de spécialisation $F_Q \longrightarrow F_P$ est injectif, $F$ est constructible.

(iii) Supposons que $X$ soit localement noethérien et que les fibres du faisceau d'ensembles $F$ soient finies. Soit $c: X \longrightarrow \mathbb{N}$ la fonction qui à $x \in X$ associe le nombre d'éléments de la fibre $F_{\bar{x}}$ de $F$ en un point géométrique $\bar{x}$ au-dessus de $x$. Alors $F$ est constructible si et seulement si $c$ est une fonction constructible, i.e., si et seulement si $c^{-1}(n)$ est constructible pour chaque $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. (i) Soit $P$ un point géométrique de $X$. On va trouver un voisinage étale de $P$, c'est-à-dire, un $U \longrightarrow X$ étale $P$-ponctué, tel que $F$ devienne constant sur $U$. Soit $V'$ un voisinage étale de $P$ tel que $F(V) \longrightarrow F_P$ soit surjectif. Un tel $V'$ existe d'après l'hypothèse de finitude. Soit $U \longrightarrow V'$ un voisinage étale de $P$ dans $V'$, tel que $U$ soit connexe par arcs. Alors $F(U) \longrightarrow F_P$ est encore surjectif. Choisissons un sous-ensemble $S \subset F(U)$ qui s'envoie bijectivement sur $F_P$. Si $F$ est un faisceau de groupes (resp. de A-modules), on voit facilement qu'on peut, en changeant au besoin $U$, trouver un tel ensemble qui soit de plus un sous-groupe (resp. sous-module) de $F(U)$. On déduit un morphisme $S_U \longrightarrow F|U$, où $S_U$ est le faisceau constant à valeur $S$. On a

$$(S_U)_P \xrightarrow{\sim} F_P \quad .$$

Puisque chaque morphisme de spécialisation sur les fibres de $F$ (resp. $S_U$) es bijectif, et puisque $U$ est connexe par arc, il s'ensuit que $S_U \xrightarrow{\sim} F|U$ , d'où résultat.

(ii) L'assertion est locale, et on peut donc supposer $X$ noethérien. Soit $P$ un point géométrique au-dessus d'un point maximal de $X$ . Il existe un voisinage étale irréductible, donc connexe par arcs, $U \to X$ de $P$ tel que $F(U)$ s'envoie surjectivement sur $F_P$ . Il s'envoie alors surjectivement sur $F_Q$ pour chaque point géométrique $Q$ de $V$ , ou ce qui revient au méme, pour chaque point géométrique de l'image $U$ de $V$ dans $X$ , car un tel point est spécialisation de $P$ et $F_Q \longrightarrow F_P$ est injectif. Donc chaque morphisme de spécialisation dans $U$ est bijectif, donc $F|U$ est localement constant. Par récurrence noethérienne on peut supposer que $F|X-U$ est constructible, d'où le résultat.

(iii) Il suffit évidemment de traiter le cas où la fonction $c$ est constante. Soit $V \longrightarrow X$ un voisinage étale d'un point géométrique $P$ au-dessus d'un point maximal de $X$, tel que $F(V)$ s'envoie surjectivement sur $F_P$ . Soit $S$ un sous-ensemble de $F(V)$ tel que $S \xrightarrow{\sim} F_P$ . Alors on a, pour le faisceau constant $S_V$ et pour chaque spécialisation $P \longrightarrow Q$ de points géométriques, un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (S_V)_P & \xrightarrow{\sim} & F_P \\ \uparrow & & \uparrow \\ (S_V)_Q & \longrightarrow & F_Q \end{array} \quad .$$

Comme $c(F_Q) = c(F_P)$ , la flèche $F_Q \longrightarrow F_P$ est bijective, donc $F$ est localement constant dans un voisinage de $P$ d'après (i). Par récurrence noethérienne, on a gagné.

Le résultat (ii) suivant aura une utilité technique dans la suite; il permettra de réduire certaines vérifications au cas d'un faisceau constant.

**Proposition** 2.14. Soit X un schéma.

(i) Pour tout morphisme fini et de présentation finie $f: X' \to X$, et tout faisceau d'ensembles (resp. de groupes ind-finis, resp. de A-modules) constructible sur $X'$, $f_*(F)$ est constructible.

(ii) Supposons X quasi-compact et quasi-séparé, et soit F un faisceau d'ensembles (resp. ...) constructible sur X. Alors on peut trouver une famille finie $(p_i: X'_i \longrightarrow X_i)$ de morphismes finis, pour tout i, un faisceau d'ensembles (resp. ...) constructible constant $C_i$ sur $X'_i$, et un monomorphisme

$$F \hookrightarrow \coprod_i p_{i*}(C_i) \quad .$$

Prouvons d'abord (i). Par définition, on peut supposer X affine, et utilisant alors 2.7.4, le procédé de passage à la limite standard nous ramène au cas où X est noethérien. Un nouveau passage à la limite, utilisant encore 2.7.4 et de plus 2.4. (v), nous ramène au cas où X est le spectre d'un corps. Alors la conclusion se réduit à l'assertion correspondante sur la fibre de $f_*(F)$ en un point géométrique sur X, laquelle résulte immédiatement de (VIII 5.5, 5.8).

Prouvons (ii). En vertu de 2.4 (i), il existe une partition de X en sous-schémas $Y_i$, avec des morphismes d'inclusion $u_i: Y_i \longrightarrow X$ de présentation finie, tels que la restriction $F_i$ de F à chaque $Y_i$ soit un faisceau localement constant. Il est alors immédiat que les homomorphismes canoniques $F \longrightarrow u_{i*}(F_i)$ définissent un homomorphisme $F \to \coprod_i u_{i*}(F_i)$ qui est un monomorphisme.

On pouvait même s'arranger dans la construction précédente pour que chaque $F_i$ soit, non seulement localement constant, mais de plus isotrivial, i.e. qu'il existe un morphisme étale fini surjectif $q_i: Y'_i \longrightarrow Y_i$ tel que $q_i^*(F_i)$ soit un faisceau constant sur $Y'_i$, soit $C_{i\,Y'_i}$. Cela résulte par exemple aisément de la définition de 2.8.1 et de (VIII 1.1). D'autre part,

il résulte du "Main Theorem" sous la forme (EGA IV 8.12.6 ) qu'il existe un morphisme fini $p_i : Z_i \longrightarrow X$ et une immersion ouverte $v_i : Y'_i \longrightarrow Z_i$ de $X$-schémas.

Comme $F_i$ se plonge dans $q_{i*}(q_i^*(F_i)) = q_{i*}(C_{i\,Y'_i})$, $F$ se plonge dans le produit $u_{i*}(q_{i*}(C_{i\,Y'_i})) = p_{i*}(v_{i*}(C_{i\,Y'_i}))$. Si tout $Z_i$ est normal, alors le lemme (2.14.1 ) ci-dessous implique que $v_{i*}(C_{i\,Y'_i}) \xrightarrow{\sim} C_{i\,Z_i}$, donc $F$ se plonge dans le produit des $p_{i*}(C_{i\,Z_i})$, et on a terminé. Dans le cas général, introduisons le normalisé $\overline{Z}_i$ de $Z_i$, l'image inverse $\overline{Y}'_i$ de $Y'_i$ dans $\overline{Z}_i$, l'immersion $\overline{v}_i : \overline{Y}'_i \to \overline{Z}_i$. On voit aussitôt que $\overline{Y}'_i$ contient les points maximaux de $\overline{Z}_i$, donc est dense dans $\overline{Z}_i$. Si $r_i : \overline{Z}_i \to Z_i$ et $s_i : \overline{Y}'_i \longrightarrow Y'_i$ sont les projections, comme cette dernière est surjective, il s'ensuit que $C_{i\,Y'_i}$ se plonge dans $s_{i*}(C_{i\,\overline{Y}'_i})$, donc $v_{i*}(C_{i\,Y'_i})$ se plonge dans $v_{i*}(s_{i*}(C_{i\,\overline{Y}'_i})) = r_{i*}(\overline{v}_{i*}(C_{i\,\overline{Y}'_i}))$, qui est isomorphe à $r_{i*}(C_{i\,\overline{Z}_i})$ en vertu de (2.14.1 ) ci-dessous, donc $F$ se plonge dans le produit des $p_{i*}(r_{i*}(C_{\overline{Z}_i})) = t_{i*}(C_{i\,\overline{Z}_i})$, où $t_i = p_i r_i$ est la projection canonique $\overline{Z}_i \to X$. Lorsque ce morphisme est fini pour tout $i$, on a donc terminé. Dans le cas général, on peut dire seulement que $\overline{Z}_i$ est <u>entier</u> sur $X$, donc de la forme $\underline{\mathrm{Spec}}(\underline{A}_i)$, où $\underline{A}_i$ est un faisceau quasi-cohérent de $\underline{O}_X$-Algèbres, qui est entier sur $\underline{O}_X$. Utilisant (EGA IV 1.7.7 ), on voit que $\underline{A}_i$ est limite inductive de ses sous-Algèbres $\underline{A}_{i,j}$ finies sur $X$, donc $\overline{Z}_i$ est limite projective (VII 5) des préschémas $Z_{i\,j} = \mathrm{Spec}(A_{ij})$, finis sur $X$. Appliquant (VII 5.11 ), on trouve que $t_{i*}(C_{i\,\overline{Z}_i})$ est limite inductive des $t_{ij*}(C_{i\,Z_{ij}})$ où $t_{ij} : Z_{ij} \longrightarrow X$ est la projection canonique . En vertu de (2.7.3, l'homomorphisme $F \longrightarrow t_{i*}(C_{i\,\overline{Z}_i})$ se factorise donc par un homomorphisme $F \longrightarrow t_{ij*}(C_{i\,Z_{ij}})$, pour un $j = j(i)$ convenable On pose maintenant $X'_i = Z_{i,j(i)}$, et on trouve un plongement comme annoncé dans 2.14.

Il reste à prouver le

<u>Lemme</u> 2.14.1. <u>Soient</u> $X$ <u>un schéma géométriquement unibranche (par exemple normal)</u>, $i : U \longrightarrow X$ <u>une immersion ouverte quasi-compacte. Alors l'adhérence</u>

Z de U , munie de la structure réduite induite, est également géométriquement unibranche, plus précisément, pour tout $z \in Z$ , on a $\mathcal{O}_{Z,z} \xleftarrow{\sim} \mathcal{O}_{X_{red},z}$ . Supposons d'autre part i dominant, et soit C un ensemble, $C_U$ le faisceau constant sur U défini par C . Alors l'homomorphisme naturel $C_X \longrightarrow i_*(C_U)$ est un isomorphisme. Mêmes conclusions si on remplace l'immersion ouverte i par une inclusion $i:x \to X$ , où x est un point maximal de X .

Utilisant (EGA IV 2.3.11 ), on est ramené pour la première assertion au cas où X est local, de point fermé z , mais alors $X_{réd}$ est intègre et U non vide, donc $Z=X_{réd}$ et l'assertion est évidente (il suffisait donc, au lieu de X géométriquement unibranche, de supposer ici que les anneaux locaux de $X_{réd}$ sont intègres). Pour la deuxième assertion, regardant fibre par fibre, on se ramène grâce à (VIII 5.3 ) et loc. cit. au cas où X est strictement local, et à prouver alors que $H^0(X,C_X) \longrightarrow H^0(U,C_U)$ est bijectif. Or ici encore, X est irréductible, et U en est un ouvert non vide donc irréductible, et les deux membres de l'application précédente s'identifient à C , d'où la conclusion voulue. (On a utilisé ici la notion "géométriquement unibranche" sous la forme de (EGA IV 18.8.14), comme signifiant que les anneaux localisés stricts de $X_{réd}$ sont intègres). Le cas de l'inclusion d'un point maximal (énoncé ici pour la commodité de références futures) se traite exactement de la même façon.

Remarques 2.14.2. Lorsque X est noethérien, la démonstration donnée (ou une déduction immédiate) montre que dans 2.14 (ii), on peut supposer les $X'_i$ intègres; si de plus on suppose X universellement japonais, i.e. les anneaux de ses ouverts affines universellement japonais (EGA $0_{IV}$ 23.1.1 , IV 7.7.2 ), on peut de plus supposer les $X'_i$ normaux.

## 3. Théories de Kummer et d'Artin-Schreier.

3.0. On va noter $(\mathbb{G}_m)_X$ le faisceau représenté par le groupe multiplicatif Spec $\mathcal{O}_X[t,t^{-1}]$ sur $X$. Donc pour $U \longrightarrow X$ étale, les sections de $(\mathbb{G}_m)_X$ sur $U$ sont les éléments inversibles $\Gamma(U,\mathcal{O}^*_U)$ de $\Gamma(U,\mathcal{O}_U)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Le noyau de la puissance n-ième dans $(\mathbb{G}_m)_X$ est le "faisceau des racines n-ièmes de l'unité", noté $(\mu_n)_X$. On a donc une suite exacte

$$(3.1.) \qquad 0 \longrightarrow (\mu_n)_X \longrightarrow (\mathbb{G}_m)_X \xrightarrow{n} (\mathbb{G}_m)_X \quad .$$

Si $n$ est inversible sur $X$ (c'est-à-dire, si $n$ est premier à chaque caractéristique résiduelle de $X$), la puissance n-ième est un morphisme surjectif pour les faisceaux :

Théorie de Kummer 3.2. On a la suite exacte

$$0 \longrightarrow (\mu_n)_X \longrightarrow (\mathbb{G}_m)_X \xrightarrow{n} (\mathbb{G}_m)_X \longrightarrow 0$$

si $n \in \mathbb{N}$ est inversible sur $X$.

En effet, soit $u \in (\mathbb{G}_m)_X(U)$, $U \longrightarrow X$ étale. Il faut trouver un recouvrement étale $\{U_i \longrightarrow U\}$ de $U$ tel que $u$ induise une puissance n-ième sur chaque $U_i$. Puisque $n$ est inversible sur $U$, l'équation

$$T^n - u = 0$$

est "séparable" sur $U$, i.e.,

$$U' = \text{Spec } \mathcal{O}_U[T]/(T^n-u)$$

est étale au-dessus de $U$. Comme $U' \longrightarrow U$ est surjectif, il est couvrant et $u$ induit une puissance n-ième sur $U'$, on a fini.

Signalons que lorsque $n$ est inversible sur $X$, $(\mu_n)_X$ est un faisceau localement constant, en fait localement isomorphe au faisceau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_X$, et est constant dans des cas importants. La théorie de Kummer donne donc des renseignements sur la cohomologie de $X$ à valeurs dans certains faisceaux constants. En fait, on a par définition

$$H^0(X,(\mathbb{G}_m)_X) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X^*) ,$$

et pour la dimension 1 on a le

Théorème 3.3. ("théorème 90 de Hilbert") : On a un isomorphisme

$$H^1(X,(\mathbb{G}_m)_X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}\ X ,$$

où $\mathrm{Pic}\ X$ est le groupe des classes de faisceaux inversibles sur $X$.

Démonstration. Cela veut dire que le morphisme canonique

$$H^1(X_{zar},(\mathbb{G}_m)_X) \longrightarrow H^1(X_{et},(\mathbb{G}_m)_X)$$

est bijectif, ce qui revient au même que de dire que

$$R^1\varepsilon_*(\mathbb{G}_m)_X = 0$$

où $\varepsilon_*$ est l'image directe pour le morphisme de sites évident $\varepsilon: X_{ét} \longrightarrow X_{zar}$ (VIII 4). On est donc réduit au cas où $X$ est affine. Comme on peut calculer $H^1$ par Čech (V 2.5) et comme il suffit pour un $X$ quasi-compact de prendre des recouvrements quasi-compacts, c'est une conséquence immédiate de la théorie de descente pour les faisceaux (cf. FGA 190, ou SGA VIII 1).

3.3.1. Supposons $X$ noethérien et sans composante immergée et soient $x_j$ les points maximaux de $X$. Soit $R_j$ l'anneau artinien local de $X$ en $x_j$, et $i_j$: Spec $R_j \longrightarrow X$ le morphisme d'inclusion.

On a une injection canonique

$$(\mathbb{G}_m)_X \longrightarrow \prod_j i_{j*}(\mathbb{G}_m)_{\mathrm{Spec}\, R_j}$$

de faisceaux sur $X_{et}$ (resp. $X_{zar}$) . Le conoyau D est appelé le faisceau des diviseurs de Cartier sur $X_{et}$ (resp. $X_{zar}$) (*).

Corollaire 3.4. Soit X noethérien et sans composante immergée, soit $\varepsilon : X_{ét} \longrightarrow X_{zar}$ le morphisme de sites canonique , et soit D le faisceau des diviseurs de Cartier sur $X_{et}$ . Alors $\varepsilon_* D$ est le faisceau $D_{zar}$ des diviseurs de Cartier sur $X_{zar}$ , et on a en particulier :

$$H^0(X_{et}, D) \approx H^0(X_{zar}, D_{zar}) \ .$$

Démonstration. Si l'on applique $\varepsilon_*$ à la suite exacte

$$0 \longrightarrow (\mathbb{G}_m)_X \longrightarrow \prod_j i_{j*}(\mathbb{G}_m)_{\mathrm{Spec}\, R_j} \longrightarrow D \longrightarrow 0 \quad ,$$

on trouve une suite exacte puisque $R^1 \varepsilon_*(\mathbb{G}_m)_X = 0$ (3.3) , d'où la première assertion.

Dans le cas où X admet une caractéristique $p \neq 0$ , le résultat suivant remplacera parfois 3.2 pour l'étude des coefficients de p-torsion :

Théorie d'Artin-Schreier 3.5. On a la suite exacte

$$0 \longrightarrow (\mathbb{Z}/p\,\mathbb{Z})_X \longrightarrow \underline{O}_X \xrightarrow{\wp} \underline{O}_X \longrightarrow 0 \ ,$$

si X est de caractéristique $p > 0$ , où $\wp$ est le morphisme de groupes additifs défini par $\wp(f) = f^p - f$ .

Le noyau de $\wp$ est le faisceau des sections de $O_X$ qui sont localement dans le corps premier, donc est un faisceau constant. Le morphisme

(*) Dans EGA IV 21, on dit simplement "diviseurs" au lieu de "diviseurs de Cartier".

$\mathcal{P}$ est surjectif pour la topologie étale parce que l'équation $T^p - T - a$ ($a \in \Gamma(U, \underline{O}_U)$) est toujours "séparable" en caractéristique $p$, i.e. définit un revêtement étale de $U$. Pour appliquer cette suite exacte on utilisera bien entendu (VII 4.2).

Proposition 3.6.

(i) Soit $X$ un schéma et $i : x \longrightarrow X$ l'inclusion d'un point. Alors

$$H^1(X, i_*(\mathbb{Z})_x) = 0$$

où $(\mathbb{Z})_x$ est le "faisceau constant" (cf. 2.0) de valeur $\mathbb{Z}$.

(ii) Si $X$ est irréductible et si pour chaque point géométrique $\bar{x}$ de $X$ le localisé strict $X_{\bar{x}}$ de $X$ en $\bar{x}$ est irréductible (on devrait dire "$X$ est géométriquement unibranche" cf. EGA IV 18.8.14) alors on a

$$H^1(X, \mathbb{Z}_X) = 0 \quad .$$

Démonstration. (i) De la suite spectrale de Leray

$$E_2^{pq} = H^p(X, R^q i_*(\mathbb{Z})_x) \Longrightarrow H^{p+q}(x, (\mathbb{Z})_x)$$

on déduit une injection $H^1(X, i_*(\mathbb{Z})_x) \longrightarrow H^1(x, (\mathbb{Z})_x)$.
Or puisque $x = \operatorname{Spec} k(x)$ est le spectre d'un corps, il est bien connu que $H^1(x, (\mathbb{Z})_x) = 0$ (cela résulte du fait que $H^q(x, F)$ $(q > 0)$ est de torsion en tout cas (cf. VII 2.2 et CG), et des suites exactes
$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n \longrightarrow 0$), d'où le résultat.

(ii) Soit $i: x \to X$ l'inclusion du point générique de $X$. On voit immédiatement que sous les conditions de (ii) le morphisme canonique $(\mathbb{Z})_X \longrightarrow i_*(\mathbb{Z})_x$ est bijectif (la réciproque étant d'ailleurs vraie également!), et (ii) est ainsi réduit à (i).

Remarques 3.7. Dans 3.6 (i) et (ii) on peut remplacer $\mathbb{Z}$ par n'importe quel groupe abélien sans torsion. D'autre part, (ii) devient faux si on y abandonne l'hypothèse que $X$ est géométriquement unibranche, comme on voit par exemple en prenant pour $X$ une courbe algébrique sur un corps $K$, admettant un point double ordinaire (faire le calcul de $H^1(X, \mathbb{Z})$ dans ce cas!)

## 4. Cas d'une courbe algébrique.

4.0. Soit $X$ un schéma noethérien de dimension 1. Soient $R(X)$ l'anneau des fonctions rationnelles sur $X$, et $i$: Spec $R(X) \longrightarrow X$ le morphisme d'inclusion. L'anneau $R(X)$ est artinien, produit des anneaux locaux de $X$ aux points maximaux, et on peut utiliser les résultats de (VIII 2).

Soit $F$ un faisceau abélien sur Spec $R(X)$ et considérons les faisceaux $R^q i_* F$, $q > 0$, sur $X$. Il résulte aussitôt de VIII 5.2 que la fibre de $R^q i_* F$ en un point géométrique au-dessus d'un point maximal de $X$ est nulle. Puisque $X$ est de dimension 1, un tel faisceau est de nature très spéciale :

Lemme 4.1. Soient $X$ noethérien et $F$ un faisceau sur $X$. Les conditions suivantes sont équivalentes (on appellera un faisceau satisfaisant à ces conditions un "skyscraper sheaf") :

(i) La fibre de $F$, en tout point géométrique $\bar{x}$ de $X$ qui est au-dessus d'un point non-fermé $x \in X$, est nulle.

(ii) Chaque section $s \in F(X')$ ($X' \longrightarrow X$ étale de type fini) est nulle, sauf en un nombre fini de points fermés de $X$.

(iii) On a $F \approx \bigoplus_x i_{x*} i_x^* F$, où $x$ parcourt l'ensemble des points fermés de $X$ et où $i_x$: $x \longrightarrow X$ est l'inclusion.

Démonstration. Supposons que (i) soit vrai, et soit $z \in F(X')$ ($X' \longrightarrow X$ étale de type fini). Alors le support de $z$ (VIII 6.6) est une partie fermée de $X'$ formée de points fermés, donc finie ($X'$ étant noethérien), d'où (i) $\Longrightarrow$ (ii) . L'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i) résulte du calcul des fibres (VIII 3.9), et (iii) implique (i), car pour toute famille $(G_x)$ de faisceaux sur les points fermés $x$ de $X$ , le faisceau $F = \bigoplus i_{x*}(G_x)$ sur $X$ satisfait (i) , comme il résulte du fait que les foncteurs fibres commutent aux sommes directes, et que le support de $i_{x*}(G_x)$ est évidemment contenu dans $\{x\}$ .

Il reste à démontrer que (ii) implique (iii). Considérons le morphisme canonique

$$F \longrightarrow \prod_x i_{x*}i_x^*F \quad ,$$

$x$ parcourant l'ensemble des points fermés de $X$ . D'après (ii), il se factorise par

$$F \longrightarrow \bigoplus_x i_{x*}i_x^*F \quad ,$$

ce qui donne le morphisme cherché. Nous laissons au lecteur la vérification du fait qu'il est bijectif.

4.1.1. Appliquons le lemme au faisceau $R^qi_*F$ introduit plus haut : On a

$$R^qi_*F \xrightarrow{\sim} \bigoplus_x i_{x*}i_x^*(R^qi_*F)$$

($x$ parcourant l'ensemble des points fermés de $X$). Or d'après (VIII 5) la fibre de $R^qi_*F$ en un point géométrique $\bar{x}$ de $X$ est

$$(R^qi_*F)_{\bar{x}} \simeq H^q(\mathrm{Spec}\ R(X_{\bar{x}}), F)$$

où $R(X_{\bar{x}}) \simeq R(X) \otimes_{O_X} O_{X_{\bar{x}}}$ , $X_{\bar{x}}$ étant le localisé strict de $X$ en $\bar{x}$

(VIII 4), et où on dénote aussi par $F$ le faisceau induit par $F$ sur Spec $R(X_{\overline{x}})$. Supposons maintenant que le corps résiduel de tout point fermé $x$ de $X$ soit séparablement clos. On aura donc (cf. aussi (VI. 1))

$$
\begin{aligned}
H^p(X, R^q i_* F) &\simeq H^p(X, \bigoplus_x i_{x*} i_x^* (R^q i_* F)) \\
&\simeq \bigoplus_x H^p(X, i_{x*} i_x^* (R^q i_* F)) \\
&\simeq \bigoplus_x H^p(x, i_x^* (R^q i_* F)) \\
&\simeq \begin{cases} \bigoplus_x H^q(\text{Spec } R(X_x), F) & \text{si } p = 0 \\ 0 & \text{si } p > 0 \end{cases} .
\end{aligned}
$$

On trouve le

Corollaire 4.2. Soient $X$ un schéma noethérien de dimension 1, tel que pour tout point fermé $x$ de $X$, le corps résiduel $k(x)$ soit séparablement clos. Soit $F$ un faisceau abélien, sur Spec $R(X)$ (où $R(X)$ = anneau des fonctions rationnelles sur $X$). Considérons la suite spectrale de Leray ( ).

$$E_2^{pq} = H^p(X, R^q i_* F) \Longrightarrow H^{p+q}(\text{Spec } R(X), F) .$$

On a

$$E_2^{pq} = 0 \qquad \text{si } p \text{ et } q > 0 ,$$

$$E_2^{0q} = \bigoplus_x H^q(\text{Spec } R(X_x), F) \quad \text{si} \quad q > 0 ,$$

où $x$ parcourt l'ensemble des points fermés de $X$, et où $X_x$ est le localisé strict de $X$ au point $x$.

La suite spectrale donne donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^1(X,i_*F) \longrightarrow H^1(\text{Spec } R(X),F) \longrightarrow \bigoplus_x H^1(\text{Spec } R(X_x),F)$$

$$\longrightarrow H^2(X,i_*F) \longrightarrow H^2(\text{Spec } R(X),F) \longrightarrow \bigoplus_x H^2(\text{Spec } R(X_x), F)$$

$$\longrightarrow \cdots$$

4.3. Supposons maintenant que de plus la $\ell$-dimension cohomologique de Spec $R(X)$, pour un nombre premier $\ell$ donné, soit au plus égale à 1 (c'est-à-dire qu'on ait $H^q(\text{Spec } R(X), F) = 0$, $q > 1$, pour chaque faisceau $F$ de $\ell$-torsion sur Spec $R(X)$). Soient $K^1,\ldots,K^m$ les corps résiduels de l'anneau artinien $R(X)$, i.e. les corps résiduels des points maximaux de $X$. Tenant compte du dictionnaire (VIII 2) la $\ell$-dimension cohomologique de Spec $R(X)$ est

$$\text{cd}_\ell(\text{Spec } R(X)) = \sup_i \{\text{cd}_\ell(G(\bar{K}^i/K^i))\} ,$$

où $\text{cd}_\ell(G)$ est la $\ell$-dimension cohomologique du groupe profini $G$ [cf.CG].

Chaque corps résiduel $K_x$ de $R(\bar{X}(x))$, pour un localisé strict $\bar{X}(x)$ de $X$, s'identifie évidemment à une extension séparable (infinie) d'un des $K^i$, d'où

$$\text{cd}_\ell(G(\bar{K}_x/K_x)) \leq \text{cd}_\ell(G(\bar{K}^i/K^i))$$

d'après (CG II 4.1, Prop. 10). Donc la $\ell$-dimension cohomologique $\text{cd}_\ell(\text{Spec } R(\bar{X}(x)))$ est aussi $\leq 1$.

En appliquant la suite exacte de 4.2 à un $F$ de $\ell$-torsion, on trouve

$$(4.3.1)\quad \begin{cases} 0 \longrightarrow H^1(X, i_*F) \longrightarrow H^1(\mathrm{Spec}\ R(X)\ F) \longrightarrow \\ \qquad \bigoplus_{\bar{x}} H^1(\mathrm{Spec}\ R(\bar{X}(\bar{x})), F) \longrightarrow H^2(X, i_*F) \longrightarrow 0\ , \\ H^q(X, i_*F) = 0 \quad \text{pour} \quad q > 2\ . \end{cases}$$

Remarquons que l'hypothèse que $\mathrm{cd}_{\ell}(\mathrm{Spec}\ R(X))$ soit $\leq 1$ est satisfait si $X$ est une courbe algébrique sur un corps séparablement clos. (Théorème de Tsen [6, th. 4.3]). Des suites exactes analogues ont été étudiées dans ce cas par Ogg [2] et Šafarevic.

4.4. Supposons que $\ell$ soit inversible sur $X$ et prenons $F = (\mathbb{G}_m) R(X)$. Appliquant 3.3 et [CG, chap. I, prop. 12], on trouve, toujours sous l'hypothèse que $\mathrm{cd}_{\ell}(\mathrm{Spec}\ R(X)) \leq 1$,

$$(4.4.1)\quad \begin{cases} H^1(\mathrm{Spec}\ R(X)\ ,\ \mathbb{G}_m) = 0 \\ H^q(\mathrm{Spec}\ R(X)\ ,\ \mathbb{G}_m) \underset{\ell}{=} 0 \qquad q \geq 2\ , \end{cases}$$

où le $\ell$ sous l'égalité veut dire que le groupe du premier membre, qui est de torsion en tout cas, n'a pas de $\ell$-torsion.

On a le même résultat si on remplace $R(X)$ par $R(\bar{X}(x))$. Puisque le faisceau $\mathbb{G}_m$ sur $\mathrm{Spec}\ R(X)$ induit évidemment le faisceau $\mathbb{G}_m$ sur $\mathrm{Spec}\ R(\bar{X}(x))$, on déduit de 4.2

$$(4.4.2)\quad \begin{cases} H^1(X,\ i_*(\mathbb{G}_m)_{R(X)}) = 0 \\ H^q(X,\ i_*(\mathbb{G}_m)_{R(X)}) \underset{\ell}{=} 0\ , \quad \text{si} \quad q > 1\ . \end{cases}$$

Or pour tout faisceau $F$ sur $X$, on voit grâce à 4.1 que le noyau $P$ et conoyau $Q$ de l'homomorphisme canonique $F \longrightarrow i_*i^*F$ sont des "faisceaux gratte-ciel", donc (comme les corps résiduels en les points fermés de $X$ sont supposés séparablement clos) on a $H^i(X,P) = H^i(X,Q) = 0$ pour $i > 0$, ce qui implique aussitôt, par la suite exacte de cohomologie, que

$$H^i(X,F) \longrightarrow H^i(X,i_*i^*F)$$

est un isomorphisme pour $i \geqslant 2$ . Compte tenu de 4.4.2 on en conclut la relation

(4.5) $$H^i(X, \mathbb{L}_m) \underset{\ell}{=} 0 \quad \text{pour} \quad i \geqslant 2 \ ,$$

valable lorsque X est un préschéma noethérien de dimension 1 , satisfaisant à $\mathrm{cd}_\ell(R(X)) \leqslant 1$ , et dont les corps résiduels en les points fermés sont séparablement clos. Compte tenu de la théorie de Kummer (3.2 ) et de (3.3 ) on en conclut le

Théorème 4.6. Soient X noethérien de dimension 1 , n un entier qui est inversible sur X , supposons que $\mathrm{cd}_\ell(R(X)) \leqslant 1$ pour chaque nombre premier $\ell$ qui divise n , et que pour tout point fermé x de X , le corps résiduel k(x) soit séparablement clos. Alors on a

$$H^q(X, (\mu_n)_X) = 0 \quad \text{si} \quad q > 2 \ ,$$

et la cohomologie pour $q \leqslant 2$ est donnée par la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^0(X,(\mu_n)_X) \longrightarrow \Gamma(X,O_X^*) \xrightarrow{n} (X,O_X^*) \longrightarrow$$

$$H^1(X,(\mu_n)_X) \longrightarrow \mathrm{Pic}\ X \xrightarrow{n} \mathrm{Pic}\ X \longrightarrow H^2(X,(\mu_n)_X) \longrightarrow 0 \quad .$$

Corollaire 4.7. Soit X une courbe complète connexe sur un corps séparablement clos k , de caractéristique première à n . Alors on a

$$H^0(X,(\mu_n)_X) \simeq \mu_n(k) \ ,$$

$$H^1(X,(\mu_n)_X) \simeq {}_n(\mathrm{Pic}\ X) = \text{ensemble des éléments de Pic X dont l'ordre divise n},$$

$$H^2(X,(\mu_n)_X) \simeq (\mathrm{Pic}\ X)/n \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^c \ ,$$

où c est l'ensemble des composantes irréductibles de X .

Pour la dernière assertion, "rappelons" que le "schéma de Picard" [TDTE V] d'un tel X/Spec k admet une décomposition

$$(4.8) \qquad 0 \longrightarrow A \longrightarrow \underline{\mathrm{Pic}}_{X/k} \longrightarrow \mathbb{Z}^c \longrightarrow 0$$

où A est un groupe algébrique connexe sur Spec k . Or l'application "multiplication par n " dans un tel A est étale, donc surjectif pour les points à valeurs dans k . Il s'ensuit qu'on a

$$_n(\mathrm{Pic}\ X) \approx {}_n(A(k))$$

et

$$(\mathrm{Pic}\ X)/n \approx (\mathbb{Z}/n\,\mathbb{Z})^c \quad .$$

Si X est lisse sur Spec k , de sorte que la jacobienne A est une variété abélienne, le groupe $_n(\mathrm{Pic}\ X)$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n)^{2g}$, où g est le genre de X . Bien entendu, on a aussi $\mu_n(k) \approx \mathbb{Z}/n\,\mathbb{Z}$, donc les rangs des groupes de cohomologie en tant que $\mathbb{Z}/n$-modules sont 1 , 2g , 1 , ce qui est le résultat auquel on devait s'attendre.

## 5. La méthode de la trace.

5.1. Soit X un schéma, f: X' $\longrightarrow$ X un revêtement étale, et F un faisceau sur X . Alors les formules d'adjonction donnent un morphisme de restriction

$$F \xrightarrow{\ \mathrm{res}\ } f_*f^*F \quad .$$

Comme f est fini, on a $H^q(X,f_*f^*F) \simeq H^q(X',f^*F)$ d'où un morphisme, appelé également restriction :

(5.1.1) $$H^q(X,F) \xrightarrow{res} H^q(X',f^*F) ,$$

qui est d'ailleurs le morphisme évident. Mais dans le cas $f$ étale on a aussi un autre morphisme, appelé morphisme trace

(5.1.2) $$f_*f^*F \xrightarrow{tr} F ,$$

qui donne des morphismes sur la cohomologie

(5.1.3) $$H^q(X',f^*F) \xrightarrow{tr} H^q(X,F) .$$

Le morphisme trace est caractérisé par les deux propriétés suivantes :

(i) Il est de caractère local pour la topologie étale.

(ii) Si $X'$ est somme disjointe de $d$ copies de $X$, de sorte que $f_*f^*F \simeq F^d$, la trace est l'application somme $F^d \longrightarrow F$.

L'unicité est triviale à partir de (i), (ii) puisque tout revêtement étale est localement constant. Ayant l'unicité, l'existence s'ensuit par l'argument usuel de descente.

De (ii) on déduit la formule suivante :

(5.1.4) $tr \circ res : F \longrightarrow F$ est la multiplication par le degré local de $f$.

Si le degré est une constante $d$, on en déduit que le morphisme $tr \circ res: H^q(X,F) \longrightarrow H^q(X,F)$ est la multiplication par $d$.

Corollaire 5.2. Soit $f: X' \longrightarrow X$ un revêtement étale de degré constant $d$. Si $F$ est un faisceau de $r$-torsion sur $X$ avec $(r,d)=1$, alors $H^q(X',f^*F) = 0$ implique que $H^q(X,F) = 0$.

En effet, la multiplication par $d$ induit un isomorphisme de $F$, donc

un isomorphisme sur la cohomologie. Si ce dernier isomorphisme se factorise par zéro, on a $H^q(X,F) = 0$ .

5.2.1. Soient maintenant $i: U \longrightarrow X$ une immersion, $f: U' \longrightarrow U$ un revêtement étale de degré $d$ , et supposons $f$ induit par un morphisme fini $g: X' \longrightarrow X$ par changement de base, i.e. on a alors le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{i'} & X' \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ U & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

Soit $F$ un faisceau sur $U$ . On a

$$F \xrightarrow{\text{res}} f_*f^*F \xrightarrow{\text{tr}} F \quad , \qquad \text{(tr} \circ \text{res} = d\text{)}$$

donc, comme $i_*f_* = g_*i'_*$ ,

$$(5.3) \qquad i_*F \xrightarrow{\text{res}} g_*i'_*f^*F \xrightarrow{\text{tr}} i_*F \quad ,$$

et comme $i_!f_* \simeq g_*i'_!$ (résulte p.ex. de (VIII 5.5 )),

$$(5.4) \qquad i_!F \xrightarrow{\text{res}} g_*i'_!f^*F \xrightarrow{\text{tr}} i_!F \quad ,$$

d'où

$$(5.3') \qquad H^q(X,i_*F) \xrightarrow{\text{res}} H^q(X',i'_*f^*F) \xrightarrow{\text{tr}} H^q(X,i_*F)$$

et

$$(5.4') \qquad \begin{tikzcd} H^q(X,i_!F) \arrow[r, "\mathrm{res}"] \arrow[rr, bend right, "d"'] & H^q(X',i'_!f^*F) \arrow[r, "\mathrm{tr}"] & H^q(X,i_!F) \end{tikzcd} \quad ;$$

On déduit de (5.4 ) les corollaires suivants :

Proposition 5.5. Soit $X$ un schéma quasi-compact et quasi-séparé, $\ell \in \mathbb{P}$, et soit $H$ un foncteur semi-exact à valeurs dans (Ab), défini sur la catégorie des $\ell$-faisceaux sur $X$, et compatible avec les limites inductives filtrantes. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $H = 0$ .

(ii) $H(f_*i_!(\mathbb{Z}/\ell)) = 0$ pour chaque $f: Y \longrightarrow X$ fini, et chaque ouvert $i: U \longrightarrow Y$ de $Y$, tel que $U$ soit de présentation finie sur $X$. Si $X$ est noethérien, on peut même se borner à prendre $Y$ intègre.

Démonstration. D'après 2.7.2 et 2.5 il suffit de vérifier $H(F) = 0$ pour $F$ de la forme $F = i,G$, où $i: U \longrightarrow X$ est l'inclusion d'un sous-schéma de $X$ de présentation finie sur $X$, et où $G$ est un $\ell$ faisceau localement constant "isotrivial" sur $U$. Soit $U'' \longrightarrow U$ un revêtement principal, de groupe $g$ ; tel que $g$ devienne constant sur $U''$. Soit $A$ le $\ell$-groupe des valeurs de $G$ sur $U''$. Le groupe $g$ opère sur $A$, et cette opération détermine la structure de $G$. Soit $\underline{h}$ un $\ell$-sous-groupe de Sylow de $g$, et soit $U' = U''/\underline{h}$ le revêtement de $U$ correspondant à $\underline{h}$. Le degré $d$ de $U'$ sur $U$ est premier à $\ell$. Prenons un prolongement de $f: U' \longrightarrow U$ en un morphisme fini $g: X' \longrightarrow X$, qui existe toujours (EGA IV 8.12.6 ), et soit $i': U' \longrightarrow X'$ l'inclusion. En appliquant 5.4 et le fait que $d$ est premier à $\ell$, on se réduit à démontrer que $H(g_*i'_!f^*G) = 0$ .

Or il est bien connu que le seul groupe abélien de $\ell$-torsion qui est simple pour une opération d'un $\ell$-groupe $h$ est $\mathbb{Z}/\ell$ avec opération triviale, et il s'ensuit qu'il existe une filtration de $A$ en tant que $h$-module, dont les quotients successifs sont isomorphes à $\mathbb{Z}/\ell$ avec opération triviale. Cette filtration donne une filtration correspondante de $f^*G$, et il suffit donc, pour démontrer que $H(g_*i'_!f^*G) = 0$ de démontrer que $H(g_*i'_!\ \mathbb{Z}/r) = 0$, d'où le résultat.

Proposition 5.6. *Soient $X$ un schéma noethérien, $\ell \in \mathbb{P}$, et $\varphi$ une fonction à valeurs dans $\mathbb{N}$, définie sur l'ensemble des schémas intègres finis sur $X$. Supposons que $\varphi(Y_1) \leq \varphi(Y_2)$ chaque fois qu'il existe un $X$-morphisme $Y_1 \longrightarrow Y_2$, et que l'inégalité est stricte si $Y_1$ est un sous-schéma fermé de $Y_2$, distinct de $Y_2$. Pour tout $Y$ fini sur $X$, posons $\varphi(Y) = \mathrm{Sup}\ (Y_i)$, où les $Y_i$ sont les composantes irréductibles de $Y$, munis de la structure induite réduite. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Pour chaque $Y$ fini sur $X$ et chaque $\ell$-faisceau $F$ sur $Y$ on a $H^q(Y,F) = 0$ si $q > \varphi(\mathrm{Supp}\ F)$.*

(ii) *Pour chaque $Y$ intègre fini sur $X$ on a $H^q(Y, \mathbb{Z}/\ell) = 0$ si $q > \varphi(Y)$.*

Démonstration. Supposons que (ii) soit vrai. On peut appliquer la proposition précédente à chaque $H^q$, tenant compte que la cohomologie commute aux limites inductives et aux images directes par morphismes finis, et on se réduit ainsi pour la vérification de (i) au cas $Y$ intègre fini sur $X$, et $F$ de la forme $i_!(\mathbb{Z}/\ell)_U$, où $i: U \longrightarrow X$ est un ouvert non-vide.

Or on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow i_!(\mathbb{Z}/\ell)_U \longrightarrow (\mathbb{Z}/\ell)_Y \longrightarrow (\mathbb{Z}/\ell)_Z \longrightarrow 0$$

où $Z = Y-U$ donc $Z \neq Y$. Faisant une récurrence sur la valeur de $\varphi$, nous

pouvons supposer que $H^q(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/\ell) = 0$ pour $q > \varphi(Y)-1$, d'où $H^q(Y, i_! (\mathbb{Z}/\ell)) = 0$ pour $q > \varphi(Y)$ grâce à la suite exacte de cohomologie.

Corollaire 5.7. Soit X une courbe algébrique sur un corps k séparablement clos et de caractéristique différente de $\ell$, $\ell \in \mathfrak{P}$. Alors la cohomologie de X dans un faisceau F de $\ell$-torsion est nulle en dimension $> 2$. Si X est affine, la cohomologie est nulle en dimension $> 1$.

Posons, pour Y fini intègre sur X, $\varphi(Y) = 2 \dim Y$ (resp. $\varphi(Y) = \dim Y$ si X, donc Y, est affine). D'après 7.6 il suffit de démontrer que $H^q(Y, \mathbb{Z}/\ell) = 0$ si $q > \varphi(Y)$, Or c'est trivial si $\dim Y = 0$. Il reste donc à démontrer que $H^q(Y, \mathbb{Z}/\ell) = 0$ si $q > 2$ (resp. si $q > 1$ dans le cas affine) pour une courbe intègre Y. Puisque $(\mathbb{Z}/\ell)_Y \simeq (\mu_\ell)_Y$, c'est conséquence de 4.6 pour $q > 2$.

Supposons X affine. Puisque les extensions radicielles n'affectent pas la cohomologie (VIII 1.1), on se réduit au cas où k est algébriquement clos. Soit $f: X' \longrightarrow X$ la normalisation de X, qui est un morphisme fini et un isomorphisme en dehors d'un ensemble fini de points, disons S. On a une suite exacte de faisceaux sur X

$$0 \longrightarrow (\mathbb{Z}/n)_X \longrightarrow f_*(\mathbb{Z}/n)_{X'} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0 \quad ,$$

où $\mathcal{E}$ est concentré sur S, donc où $H^q(X, \mathcal{E}) = 0$ pour $q > 0$. On se ramène par (VIII 5.6) à démontrer que

$$H^q(X, f_*(\mathbb{Z}/n)_{X'}) \simeq H^q(X', \mathbb{Z}/n) = 0$$

si $q > 1$, c'est-à-dire, au cas X normale. On peut aussi évidemment supposer X connexe. Soit $i: X \longrightarrow \overline{X}$ une immersion ouverte avec $\overline{X}$ complète et non-singulière. Puisque X est affine, il manque au moins un point de $\overline{X}$, et on voit immédiatement que par suite le morphisme

$$A(k) \longrightarrow \mathrm{Pic}\ X$$

est surjectif, où $A$ est la Jacobienne de $\bar{X}$ (cf. 4.8 ). Puisque $A(k)$ est divisible par $\ell \neq \mathrm{car}\ k$ , il en est de même de Pic X , d'où $H^2(X, \mu_\ell) = 0$ par 4.6 , cqfd.

Remarque 5.8. Signalons, pour référence ultérieure, que le raisonnement de 5.5 établit en fait le résultat suivant : Soient X un schéma quasi-compact et quasi-séparé, $\ell$ un nombre premier, C une sous-catégorie strictement pleine de la catégorie des faisceaux abéliens de $\ell$-torsion constructibles, stable par facteurs directs et par extensions. Supposons que pour chaque morphisme fini $f:Y \longrightarrow X$ et chaque ouvert $i:U \longrightarrow Y$ de Y qui est de présentation finie sur X , on ait $f_*(i_!(\underline{Z}/\ell\,\underline{Z})_U) \in C$ . Alors C contient tous les faisceaux constructibles de $\ell$-torsion.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Gabriel, P. Des Catégories Abéliennes
Thèse , Paris (1962).

[2] Ogg, A. Cohomology of abelian varieties over functions fields,
Annals of Math. Vol. 76, No. 2 (1962).

[3] Deuring, M. Die Typen der Multiplikatorenringe elliptischer
Funktionenkörper, Hamb. Abh. Bol. 13 (1940) p. 197.

[4] Grothendieck, A. Fondements de la Géométrie Algébrique, Extraits
du Séminaire Bourbaki 1957-1962), Secrétariat mathématique,
11, rue Pierre Curie, Paris 5ème. (Cité FGA).

[5] Serre, J.P. Cohomologie Galoisienne, Lecture Notes n°5, (Springer)
(Cité CG).

[6] Douady, A. Cohomologie des groupes compacts totalement discontinus,
Séminaire Bourbaki, exp. 189.

Exposé X

# DIMENSION COHOMOLOGIQUE : PREMIERS RESULTATS

par M. ARTIN

Sommaire :

1. Introduction
2. Résultats auxiliaires pour un corps
3. Corps des fractions d'un anneau strictement local
4. Dimension cohomologique : cas $\ell$ inversible dans $\underline{O}_X$
5. Dimension cohomologique : cas $\ell = p$ .
6. Dimension cohomologique pour un préschéma de type fini sur Spec $\mathbb{Z}$ .

## 1. Introduction.

Dans cet exposé on convient, sauf mention expresse du contraire, que "faisceau" signifie "faisceau abélien".

Soient $X$ un schéma et $\ell \in \mathbf{P}$ . "Rappelons" qu'on appelle $\ell$-dimension cohomologique de $X$ le plus grand entier $\mathrm{cd}_\ell X = n$ (ou $= \infty$ si ce nombre n'existe pas) tel que $H^n(X,F) \neq 0$ pour au moins un faisceau de $\ell$-torsion $F$ sur $X$ . Si $X = \mathrm{Spec}\ A$ , nous écrivons $\mathrm{cd}_\ell A = \mathrm{cd}_\ell \mathrm{Spec}\ A$ . Tenant compte du dictionnaire (VIII 2 ) on retrouve ainsi la notion "classique" de [CG] dans le cas où $A = k$ est un corps. Comme on a évidemment la formule

$$\mathrm{cd}_\ell \left(\coprod_i X_i\right) = \sup_i \mathrm{cd}_\ell X_i$$

on peut, de façon évidente, étendre la théorie classique à un anneau

artinien quelconque. Cette théorie est exposée dans (CG) = "cohomologie Galoisienne" de Serre. Nous y apporterons quelques précisions dans le n° 2.

Prenons par exemple le cas d'une variété X algébrique irréductible, de dimension n , sur un corps séparablement clos k , et fixons $\ell \neq$ car k . Un théorème qu'on trouvera dans le n°4 donne pour la dimension cohomologique la majoration 2n , qui est la dimension "véritable" de X (suggérée par l'analogie topologique dans le cas où $k = \mathbb{C}$ ). Ce résultat est assez élémentaire à partir de la théorie pour les corps, et en fait la majoration par 2n peut être améliorée sauf dans le cas où X est complète : il existe une autre majoration, 2n-1 , qui est vraie chaque fois que dans X il "manque au moins un point". Cette dernière est la bonne "majoration stable", dans le sens que chaque X de dimension n contient un ouvert de dimension cohomologique 2n-1 . Une troisième majoration est obtenue pour une variété affine, où on obtient n comme dimension cohomologique. C'est une généralisation d'un des théorèmes de Lefschetz pour les sections hyperplanes Ces deux dernières assertions sont plus profondes et ne pourront être démontrées que plus tard (XIV).

Notons que la dimension cohomologique n'est pas une notion locale (contrairement à ce qui a lieu pour les espaces paracompacts). Par exemple un anneau hensélien à corps résiduel séparablement clos est de dimension cohomologique nulle, mais si on enlève le point fermé, on peut obtenir un nombre arbitrairement grand, savoir 2n-1 si n = dim A dans les cas les plus importants; ce qui est également en accord avec l'analogie topologique fournie par la cohomologie de $U - \{x\}$ , où U est un petit voisinage ouvert d'un point x d'un espace analytique complexe .

## 2. Résultats auxiliaires sur un corps

On a le suivant

Théorème 2.1. Soit $k'/k$ une extension de type fini d'un corps $k$, et soit $\ell \in \mathbb{P}$. Alors

$$cd_\ell k' \leqq cd_\ell k + \text{deg.tr.}(k'/k) ,$$

Si l'inégalité stricte est vraie et si $\ell \neq \text{car } k$, alors $\ell = 2$, $k$ est ordonnable, et $k'$ n'est pas ordonnable (i.e. $-1$ est une somme de carrés dans $k'$).

Rappelons que lorsque $\ell = \text{car } k$ on a $cd_\ell k' \leqq 1$ (CG II 2.2 ) donc la question d'égalité dans 2.1 ne se pose guère. De plus, on a $cd_2 k = \infty$ si $k$ est ordonnable. En effet la clôture algébrique $\bar{k}$ de $k$ contient une sous-extension $\tilde{k}$ (un sous-corps maximal ordonné de $\bar{k}$) avec $[\bar{k}:\tilde{k}] = 2$. Evidemment, $cd_2 \tilde{k} = \infty$, et $cd_2 \tilde{k} \leqq cd_2 k$ d'après (CG I Prop. 14).

Démonstration. C'est presque tout bien connu. L'inégalité ainsi que l'égalité si $cd_\ell k < \infty$, sont des résultats de Tate (CG II 4.1.2). Il reste à démontrer que $cd_\ell k' < \infty$ et $cd_\ell k = \infty$ implique $k$ ordonnable et $\ell = 2$, et il suffit de traiter les deux cas suivants :

a) $[k':k] < \infty$ ,

b) $k' = k(x)$ avec $x$ transcendant sur $k$.

Dans le cas a) on peut supposer $k'/k$ séparable. Alors le groupe de Galois $H = G(\bar{k}/k')$ est un sous-groupe ouvert de $G = G(\bar{k}/k)$ et d'après un résultat de Serre [5] on a $cd_\ell H = cd_\ell G$ sauf si $G$ contient un élément d'ordre $\ell$. Comme un corps algébriquement clos $\bar{k}$ ne peut pas avoir un sous-corps $\tilde{k}$ d'indice fini sauf si $\ell = 2$ et $\tilde{k}$ est ordonnable [7], on trouve le résultat.

Traitons le cas b). Soit $R$ le hensélisé de Spec $k[x]$ au point $x = 0$, qui est un anneau de valuation discrète, et soit $K$ le corps des fractions de $R$. Alors $\mathrm{cd}_\ell k(x) < \infty$ implique $\mathrm{cd}_\ell K < \infty$. Il suffit donc de démontrer que $\mathrm{cd}_\ell K < \infty$ implique $\mathrm{cd}_\ell k < \infty$, ce qui est conséquence du théorème suivant :

Théorème 2.2 (*). Soit $R$ un anneau de valuation discrète hensélien, à corps de fractions $K$ et corps résiduel $k$. Soit $\ell \in \mathbb{P}$. On a

$$\mathrm{cd}_\ell K = \mathrm{cd}_\ell k + 1$$

dans les deux situations suivantes :

(i) $\ell \neq \mathrm{car}\ k$.

(ii) $\ell \neq \mathrm{car}\ K$, $k$ parfait, et $\mathrm{cd}_\ell k < \infty$.

Remarque : Naturellement, si $\ell = \mathrm{car}\ K$ on a $\mathrm{cd}_\ell K \leqslant 1$ en tous cas (CG II 2.2). Il reste donc à étudier la relation de $\mathrm{cd}_\ell K$ avec, peut-être, le module des différentielles absolues $\Omega^1_k$ (EGA IV 20.4.3), dans le cas d'inégales caractéristiques lorsque $\mathrm{car}\ k = \ell$, $k$ non parfait.

Démonstration du théorème. Comme pour le théorème (2.1), la plupart est due à Tate. Le cas (ii) est traité explicitement dans (CG II Prop. 12) si $R$ est complet, et on se réduit à ce cas au moyen du lemme suivant :

Lemme 2.2.1. Soit $R$ un anneau de valuation discrète hensélien, à corps des fractions $K$, et soit $\hat{K}$ le corps des fractions du complété $\hat{R}$ de $R$. Alors

$$G(\bar{\hat{K}}/\hat{K}) \simeq G(\bar{K}/K) .$$

Démonstration. Cela veut dire que le foncteur $L \longmapsto \hat{L} = L \otimes_K \hat{K}$

(*) Ce théorème a été démontré récemment par Ax [1].

de la catégorie des K-algèbres étales dans la catégorie des $\hat{K}$-algèbres étales est une équivalence. Or chaque algèbre étale $\hat{K}'$ de $\hat{K}$ est induite par une algèbre étale convenable $K'$ de $K$. En effet, si $\hat{K}' = \hat{K}[\alpha]$ où $\alpha$ satisfait à l'équation irréductible séparable $f(T) = 0$ à coefficients dans $\hat{R}$, il suffit de prendre pour $K'$ l'algèbre $K[\alpha_o]$, où $\alpha_o$ est racine d'une équation $f_o(T) = 0$ à coefficients dans $R$ avec $f_o \equiv f \ (\hat{\mathfrak{m}}^N)$, $N$ grand et $\hat{\mathfrak{m}}$ l'idéal maximal de $\hat{R}$. C'est l'application de la "méthode de Newton" habituelle (Bourbaki, Alg. Comm. III 4.5). Il reste à démontrer que le foncteur est pleinement fidèle (il est évidemment fidèle), et il revient au même de démontrer que si $K'$ est un <u>corps</u>, il en est de même de $\hat{K}'$. Soit $R'$ le normalisé de $R$ dans $K'$, qui est fini sur $R$ puisque $K'/K$ est séparable. L'anneau $R'$ est un anneau de valuation discrète, et le complété de $R'$ est $\hat{R}' = R' \otimes_R \hat{R}$. Donc $\hat{R}'$ est un anneau de valuation discrète, et comme $K'$ en est l'anneau total des fractions, il est bien un corps.

Traitons l'assertion i) de 3.1. Si $\mathrm{cd}_\ell k < \infty$ on est encore ramené par 2.2.1 à (CG II Prop. 12) (l'hypothèse faitedans l'énoncé de cette proposition que $k$ soit parfait n'est utilisé dans la démonstration que dans le cas de caractéristique résiduelle $\ell$). Il reste donc à démontrer que $\mathrm{cd}_\ell K < \infty$ implique $\mathrm{cd}_\ell k < \infty$.

Soit $\bar{G} = G(\bar{k}/k) = G(\tilde{K}/K)$ où $\tilde{K}$ est l'extension non ramifiée maximale de $K$ (i.e. le corps des fractions de l'anneau de valuation discrète $\tilde{R}$, à corps résiduel séparablement clos, hensélisé strict de $R$), $G = G(\bar{K}/K)$, $H = G(\bar{K}/\tilde{K})$, donc $\bar{G} = G/H$. Soit $\bar{G}' \subset \bar{G}$ un $\ell$-sous-groupe de Sylow, et soient $k'/k$, $K'/K$ les extensions correspondant à $\bar{G}'$. On a $\mathrm{cd}_\ell k < \infty$ si et seulement si $\mathrm{cd}_\ell k' < \infty$ (CG I Prop. 14), donc en remplaçant $R$ par son normalisé dans $K'$, on se réduit au cas où $\bar{G}$ est un $\ell$-groupe. Il suffit alors de démontrer que si $\mathrm{cd}_\ell G < \infty$, alors $H^N(\bar{G}, \mathbb{Z}/\ell) = 0$ pour $N$ assez grand (CG I Prop. 20).

On a $\mathrm{cd}_\ell H = 1$ d'après la partie de i) déjà démontrée, appliquée à $\tilde{R}$. De plus, on a

(2.2.2 $$H^1(H, \mu_\ell) = H^1(\mathrm{Spec}\ \tilde{K}, \mu_\ell) = \tilde{K}^*/\tilde{K}^{*\ell} = \mathbb{Z}/\ell .$$

En effet, $H^1(\mathrm{Spec}\ \tilde{K}, \mu_\ell) = \tilde{K}^*/\tilde{K}^{*\ell}$ d'après la théorie de Kummer IX 3.2. On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \tilde{R}^* \longrightarrow \tilde{K}^* \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0 ,$$

et $\tilde{R}^*$ est divisible par $\ell$ puisque $\tilde{R}$ est strictement local et inversible dans $\tilde{R}$, d'où (2.2.1 ).

Considérons la suite spectrale de Hochschild-Serre

$$E_2^{pq} = H^p(\bar{G}, H^q(H, \mu_\ell)) \Longrightarrow H^{p+q}(G, \mu_\ell) .$$

On a $E_2^{pq} = 0$ si $q > 1$. Si de plus $\mathrm{cd}_\ell G < \infty$, le morphisme "cobord"

$$H^{n-1}(\bar{G}, H^1(H, \mu_\ell)) \longrightarrow H^{n+1}(\bar{G}, \mu_\ell)$$

doit être bijectif pour $n$ assez grand, et il faut démontrer qu'alors

$$H^{n-1}(\bar{G}, H^1(H, \mu_\ell)) = H^{n-1}(\bar{G}, \mathbb{Z}/\ell) = 0 .$$

Posons $R' = R[x']$ avec $x'^{\ell} = x$, $x$ le paramètre local de $R$, et soient $K'$ le corps des fractions de $R'$, $G' = G(\bar{K}/k')$, etc... Le corps résiduel de $R'$ est $k$, puisque nous avons supposé $\bar{G}$ un $\ell$-groupe, donc que les racines $\ell$.èmes de l'unité sont dans K. On a un diagramme

$$\begin{array}{ccccc} H' & \longrightarrow & G' & \longrightarrow & \bar{G} \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ H & \longrightarrow & G & \longrightarrow & \bar{G} \end{array} ,$$

d'où un morphisme de suites spectrales de Hochschild-Serre, qui donne un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^{n-1}(\bar{G}, H^1(H', \mu_\ell)) & & \\ \uparrow \varepsilon & \searrow & \\ H^{n-1}(\bar{G}, H^1(H, \mu_\ell)) & \nearrow & H^{n+1}(\bar{G}, \mu_\ell) \end{array} .$$

Comme $cd_\ell G < \infty$ implique $cd_\ell G' < \infty$, tous les morphismes dans ce diagramme sont des isomorphismes pour $n$ grand. Mais le morphisme

$$\mathbb{Z}/r = H^1(H, \mu_\ell) \longrightarrow H^1(H', \mu_\ell) = \mathbb{Z}/\ell$$

qui induit la flèche $\varepsilon$ est évidemment nul, donc $H^{n-1}(\bar{G}, \mathbb{Z}/\ell) = 0$, cqfd.

Théorème 2.3. Soient A un anneau noethérien hensélien de dimension 1, et $\ell \in \mathbb{P}$ inversible dans A. Soient k le corps résiduel de A et R(A) l'anneau des fonctions rationnelles sur Spec A. On a

$$cd_\ell R(A) \leq cd_\ell k + 1 ,$$

et l'égalité est vraie si $\ell \neq 2$ ou si k n'est pas ordonnable.

Démonstration. En remplaçant A par A/P pour un idéal premier minimal P de A et en appliquant (VIII 1) on voit qu'on peut supposer A intègre. Soient K son corps des fractions, R son normalisé, qui est local et hensélien, donc un anneau de valuation discrète (il est noethérien d'après Krull-Akizuki (Bourbaki, Alg. Comm. Chap. 7, § 2, prop. 5)) et soit k' le corps résiduel de R. Il est connu que $[k':k] < \infty$ (loc. cit.). Or K est le corps des fractions de R et on a donc

$$\mathrm{cd}_\ell K = \mathrm{cd}_\ell k' + 1 \leq \mathrm{cd}_\ell k + 1$$

d'après 2.2 , avec l'égalité sous la dernière hypothèse de 2.3 , d'après 2.1 .

Exemple : L'égalité n'est pas vraie pour $\ell = 2$ , A étant le hensélisé à l'origine de $\mathbb{R}[x,y]/(x^2+y^2)$ .

Corollaire 2.4. Soit A un anneau local noethérien à corps résiduel k , et soit $\ell \in \mathfrak{p}$ inversible dans A . Supposons que $\ell \neq 2$ où qu'aucun corps résiduel de Spec A ne soit ordonnable. Alors on a

$$\mathrm{cd}_\ell R(A) \geq \mathrm{cd}_\ell k + \dim A \ ,$$

où R(A) est l'anneau des fonctions rationnelles sur Spec A .

Démonstration. On peut supposer A intègre, a corps des fractions $R(A) = K$ . Soit $x \in \Gamma A$ un élément qui n'est pas diviseur de zéro. Alors $\dim A/(x) = \dim A - 1$ . Par récurrence sur dim A, on a

$$\mathrm{cd}_\ell R(A/(x)) \geq \mathrm{cd}_\ell k + \dim A - 1 \ .$$

Soit k' un corps résiduel de R(A/(x)) tel que $\mathrm{cd}_\ell k' = \mathrm{cd}_\ell R(A/(x))$ (cf VIII 1), et soit P l'idéal premier, noyau de $A \longrightarrow k'$ . L'anneau A est de dimension 1 . Il suffit donc de démontrer le corollaire pour l'anneau local $A_P$ , c'est-à-dire, on est réduit au cas où $\dim A = 1$ . Soit $\tilde{A}$ le hensélisé de A . Chaque corps résiduel de $R(\tilde{A})$ s'identifie à une extension séparable de $R(\tilde{A}) = K$ , et on a donc

$$\mathrm{cd}_\ell R(A) = \mathrm{cd}_\ell K \geq \mathrm{cd}_\ell R(\tilde{A}) \ .$$

On est ainsi ramené au cas où A est de dimension 1 et hensélien, ce qui est conséquence de 2.3 .

**Corollaire** 2.5. Soit X un schéma noethérien et soit $\ell \in \mathbb{P}$ inversible sur X . Alors

$$\mathrm{cd}_\ell R(X) \geqslant \dim X .$$

En effet, soit $x \in X$ un point tel que $\dim X = \dim \mathcal{O}_{X,x}$ (ou tel que $\dim \mathcal{O}_{X,x}$ est très grand si $\dim X = \infty$ ). Soit A le hensélisé strict de $\mathcal{O}_{X,x}$ . Alors on a $\mathrm{cd}_\ell R(X) \geqslant \mathrm{cd}_\ell R(\mathcal{O}_{X,x}) \geqslant \mathrm{cd}_\ell R(A)$ d'après le raisonnement habituel. De plus, $\dim A = \dim X$ (resp. est très grand). Si $\ell = 2$ , et si $\ell$ est inversible sur X , alors l'équation $T^2 + 1 = 0$ est séparable sur A , donc $-1$ est un carré dans A parce que A est strictement local, donc les corps résiduels de A sont non ordonnables. Donc les hypothèses de 2.4 sont satisfaites pour A en tout cas, et on a $\mathrm{cd}_\ell R(A) \geqslant \dim A$ , d'où le résultat.

## 3. Corps des fractions d'un anneau strictement local.

**3.0.** Nous aurons un besoin essentiel, pour les numéros suivants, de la connaissance de $\mathrm{cd}_\ell R(A)$, où A est un anneau strictement local, c'est-à-dire hensélien à corps résiduel séparablement clos. Malheureusement on ne connaît pas $\mathrm{cd}_\ell R(A)$ dans le cas général, par exemple si $A = \hat{\mathbb{Z}}_p[[x]]$ $(p \neq \ell)$.

On conjecture cependant que si A est noethérien et $\ell$ est inversible dans A, on aura

$$\mathrm{cd}_\ell R(A) = \dim A \quad (\ell \text{ inversible dans } A) , \tag{3.1}$$

du moins dans les cas les plus importants, par exemple si A est un anneau excellent (EGA IV 7.8.2).

Notons que si $\dim A = 1$ , (3.1) est vrai d'après 2.3 . De plus, on a l'inégalité $\geqslant$ d'après 2.5 en tout cas. Nous démontrerons plus tard (XIX) que (3.1) est aussi vrai si A est excellent de

caractéristique résiduelle nulle, en utilisant la résolution des singularités [3] . Ici nous démontrerons (3.1) seulement dans le cas facile 3.2. ci-dessous.

Naturellement on a $cd_\ell R(A) \leq 1$ si A est de caractéristique $\ell$ , donc ce cas est trivial. Il reste de plus à analyser le cas d'inégales caractéristiques, avec caractéristique résiduelle $\ell$ , et on ne s'attend pas à ce que 3.1 soit vrai dans ce cas là. Il faudra certainement tenir compte du rang du module $\Omega^1_k$ (k le corps résiduel), i.e. du degré $[k : k^\ell]$ .

Proposition 3.2. Soit X un préschéma de type fini sur le spectre d'un corps k ou sur le spectre d'un anneau de valuation discrète R , et soit $\ell \in \mathbb{P}$ inversible dans k (resp. R). Alors 3.1 est vrai pour chaque anneau A qui est un localisé strict de X .

Démonstration. Prenons X intègre (on se réduit à ce cas comm d'habitude), et soit $n = \dim X$ .

Supposons que X soit défini sur un corps séparablement clos k . Alors pour chaque anneau A qui est un localisé strict de X en u point fermé, on a $\dim A = n$ . Comme chaque corps résiduel K de R(A) s'identifie à une extension algébrique de R(X) et comme

$$\text{deg.tr.}(R(X)/k) = \dim X = n ,$$

on a $cd_\ell K \leq n$ d'après 2.1 , d'où $cd_\ell R(A) \leq n$ . L'inégalité oppo est conséquence de 2.5.

Supposons maintenant que X soit de type fini sur Spec R , R un anneau de valuation discrète, et soit A le localisé strict de X en un point x . Si x n'est pas au-dessus du point fermé de Spec R , on se réduit immédiatement au cas où X est de type fini sur un corps (en localisant R). On peut aussi pour la même raison supposer que le morphisme $X \longrightarrow \text{Spec } R$ est dominant.

Supposons pour l'instant que de plus R est un anneau de valuation discrète strictement local et que le point x est fermé dans X . Alors on a dim A = dim X = n (EGA IV 5.6.5) . Comme chaque corps résiduel K de R(A) s'identifie à une extension séparable de R(X) on a

$$cd_\ell R(A) \leq cd_\ell R(X) \leq cd_\ell L + \deg.tr.(R(X)/L)$$
$$= 1 + (n-1) = n$$

d'après 2.1 et 2.2 , où L est le corps des fractions de R , d'où le résultat dans ce cas, compte tenu de 2.5 .

On déduit le cas général de ces cas particuliers au moyen du lemme suivant :

Lemme 3.3.

(i) Soit X de type fini sur le spectre d'un corps k et soit A un anneau localisé strict de X en un point x . Alors il existe un corps k' séparablement clos, un schéma X' de type fini sur Spec k' , et un point x' fermé dans X' tel que A soit isomorphe à un anneau localisé strict de X' en x' .

(ii) Soit X de type fini sur Spec R , R un anneau de valuation discrète, soit x un point de X au-dessus du point fermé de Spec R et soit A un localisé strict de X en x . Il existe un anneau de valuation discrète strictement local R', un schéma X' de type fini sur Spec R' , et un point fermé x' de X' au-dessus du point fermé de Spec R' , tel que A soit isomorphe à un localisé strict de X' en x'.

Démonstration. (i) On peut prendre X affine.
Soit Y l'adhérence de x dans X , avec la structure induite réduite, et soit d = dim Y . Par le lemme de normalisation ([2] Chap. V § 3 n° 1) , il existe un morphisme

$$X \longrightarrow \text{Spec } k[y_1, \ldots, y_d] = T$$

induisant un morphisme fini $Y \longrightarrow T$ . Par suite l'anneau localisé strict de $O_{X,x}$ est isomorphe au localisé strict de $O_{X',x'}$ , où $X' = X \times_T \mathrm{Spec}\overline{R(T)}$ , et où $x'$ est un point fermé dans $X'$ .

(ii) Ce cas se traite d'une façon analogue. On peut supposer $X$ affine, d'anneau $A$ . Soit $Y$ l'adhérence de $x$ dans $X$ avec la structure induite réduite, qui est un sous-schéma fermé de la fibre fermée $X_o$ de $X$ sur $\mathrm{Spec}\ R$ , et soit $d = \dim Y$ . Alors, en relevant les éléments $y_1,\dots,y_d$ de $A \otimes_R k$ envisagés dans i) en des éléments de $A$ , on trouve un morphisme

$$X \longrightarrow \mathrm{Spec}\ R[y_1,\dots,y_d] = T$$

induisant un morphisme fini $Y \longrightarrow T_o$ . Soit $R'$ le localisé strict de $R[y_1,\dots,y_d] = B$ en l'idéal premier $\mathfrak{m}B$ . Alors $R'$ est un anneau de valuation discrète strictement local, et on peut prendre $X' = X \times_T \mathrm{Spec}\ R'$, et $x'$ un point fermé de $X'$ au-dessus de $x$ .

## 4. Dimension cohomologique : cas $\ell$ inversible dans $O_X$ .

**Théorème 4.1** *Soit $X$ un schéma noethérien, $\ell \in \mathbb{P}$ , et $\varphi$ une fonction sur $X$ , à valeurs dans $\mathbb{N}$ , et satisfaisant aux conditions suivantes :*

(i) *Pour chaque $x \in X$ , $\mathrm{cd}_\ell\, k(x) \leq \varphi(x)$ .*

(ii) *Soit $x \in X$ et $y \in Y =$ adhérence de $x$ , $y \neq x$ . Soit $K$ l'anneau des fonctions rationnelles d'un localisé strict de $Y$ au-dessus de $y$ . On a $\mathrm{cd}_\ell\, K < \varphi(x) - \varphi(y)$ .*

*Alors pour chaque faisceau de $\ell$-torsion $F$ sur $X$ on a*

$$H^q(X,F) = 0$$

*si*

$$q > \varphi(F) \underset{\text{déf}}{=\!=} \mathrm{Sup}\left\{ \varphi(x) \mid x \in X\ ,\ F_{\bar{x}} \neq 0 \right\} .$$

Démonstration. Les hypothèses seront aussi vérifiées pour la fonction restriction de $\varphi$, à un sous-préschéma quelconque de $X$, donc par récurrence noethérienne nous pouvons supposer le théorème vrai pour chaque sous-préschéma fermé de $X$ distinct de $X$. Soit $F$ donné et écrivons $F = \varinjlim F_i$ où les $F_i$ sont les sous-faisceaux constructibles de $F$ (IX 2.9 (iii)).

Pour chaque $F_i$, l'ensemble des $x \in X$ tels que $F_x \neq 0$ est constructible dans $X$, et nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence à chaque $F_i$ dont le support n'est pas dense. On voit ainsi que l'hypothèse de récurrence implique en fait que le théorème est vrai pour chaque $F$ qui est nul en au moins un des points maximaux de $X$. Nous allons donc supposer que $F$ ne satisfait pas à cette condition.

Soit maintenant $i$ : Spec $R(X) \longrightarrow X$ l'inclusion, où $R(X)$ est l'anneau des fonctions rationnelles de $X$, et considérons la suite exacte suivante, où $K$ et $C$ sont définis comme noyau et conoyau respectivement :

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow i_* i^* F \longrightarrow C \longrightarrow 0 \quad .$$

Ici $K$ et $C$ sont nuls en chaque point maximal de $X$, donc d'après (ii), $\varphi(K)$ (resp. $\varphi(C)$) est strictement plus petit que $n = \varphi(F)$, d'où $H^q(X,K) = H^q(X,C) = 0$ pour $q \geq n$. Donc pour démontrer $H^q(X,F) = 0$ pour $q > n$, il suffit, grâce aux suites exactes de cohomologie, de démontrer $H^q(X, i_* i^* F) = 0$, donc nous pouvons supposer que $F$ est de la forme $i_* G$, pour un $\mathcal{L}$-faisceau convenable $G$ sur Spec $R(X)$.

Examinons la suite spectrale de Leray.

$$E_2^{p,q} = H^p(X, R^q i_* G) \Longrightarrow H^{p+q}(\text{Spec } R(X), G) \quad .$$

Or $R(X)_{réd}$ est produit des corps $k(x)$ pour $x$ maximal dans $X$, donc $\mathrm{cd}_{\mathcal{L}} R(X) \leq n$ d'après (i), donc l'aboutissement de la suite spectrale est nul en dim $> n$.

Nous voulons démontrer que $E_2^{p0} = 0$ pour $p > n$ . En examinant la suite spectrale, on voit qu'il suffit de démontrer que $E_2^{pq} = 0$ si $q > 0$ et si $p > n-q-1$ . Donc, par récurrence, il suffit de démontrer que $\varphi(R^q i_* G) < n - q$ pour $q > 0$ . Mais d'après VIII 5.2 la fibre de $R^q i_* G$ en un point géométrique $\bar{y}$ au-dessus d'un point $y \in X$ n'est autre que $H^q(\mathrm{Spec}\ K, G_K)$, où $K$ est l'anneau des fonctions rationnelles du localisé strict de $X$ en $\bar{y}$ , et $G_K$ est le faisceau induit sur $\mathrm{Spec}\ K$ . On a $\mathrm{cd}_\ell K < n - \varphi(y)$ d'après (ii) , d'où $(R^q i_* G)_{\bar{y}} = 0$ si $q \geqslant n - \varphi(y)$ , ce qui donne le résultat cherché.

Corollaire 4.2. Soient $X$ un schéma noethérien, $\ell \in \mathbb{P}$ , $n \in \mathbb{N}$ et supposons que les conditions suivantes soient satisfaites :

(i) Pour chaque point $y$ de $X$ de codimension $c$ , on a $\mathrm{cd}_\ell k(y) \leqslant n - 2c$ .

(ii) Pour chaque anneau $A$ , localisé strict d'un sous-schéma fermé irréductible $Y$ de $X$ , on a $\mathrm{cd}_\ell R(A) \leqslant \dim A$ .

Alors

$$\mathrm{cd}_\ell X \leqslant n \ .$$

Plus précisément, si $F$ est un $\ell$ -faisceau qui est nul en chaque point $y$ de codimension $< s$ , on a

$$H^q(X,F) = 0 \text{ si } q > n - 2s \ .$$

En effet, on peut prendre $\varphi(y) = n-2\mathrm{codim}\ y$ et appliquer 4.1, dont la condition (i) (resp. (ii)) résulte de la condition correspondante de (i) (resp. (ii)) de (4.2), compte tenu pour (ii) de l'inégalité $\dim \underline{O}_{Y,y} + \dim \underline{O}_{X,x} \leqslant \dim \underline{O}_{X,y}$ .

Corollaire 4.3. Soit $X$ de type fini et de dimension $n$ sur un corps $k$ et soit $\ell \neq \mathrm{car}\ k$ . Alors $\mathrm{cd}_\ell X \leqslant 2n + \mathrm{cd}_\ell k$ .

On applique le corollaire précédent, en y remplaçant $n$ par $2n + cd_\ell k$, et utilisant 2.1 et 3.2 pour vérifier les conditions (i) et (ii) de 4.2, et tenant compte pour (i) de l'inégalité

$$\deg.tr.K(y)/k + \dim \underline{O}_{X,y} \leqslant \dim X \quad .$$

Corollaire 4.4. Soit $X$ noethérien, et $\ell \in \mathbb{P}$ inversible sur $X$. Supposons que la condition (ii) de 4.2 est satisfaite, et que de plus $\ell \neq 2$ où qu'aucun corps résiduel de $X$ ne soit ordonnable. Alors on a

$$cd_\ell X \leqslant cd_\ell R(X) + \dim X \leqslant 2cd_\ell R(X) \ .$$

On pose $n = cd_\ell R(X) + \dim X$ dans 4.2, et on applique 2.4, qui implique la condition (i) de 4.2, car $cd_\ell k(y) \leqslant cd_\ell R(\underline{O}_{X,y}) - \dim \underline{O}_{X,y} \leqslant cd_\ell R(X) - \dim \underline{O}_{X,y} \leqslant n - 2 \dim \underline{O}_{X,y}$. La deuxième inégalité dans 4.4 résulte de 2.5.

Exemple 4.5. L'hypothèse inélégante sur les corps résiduels faite dans 4.4, est nécessaire, comme on voit avec $X = \operatorname{Spec} \mathbb{R}[x,y,z]/(x^2 + y^2 + z^2)$, où toutes les autres conditions sont satisfaites, avec $\dim X = cd_\ell R(X) = \ell = 2$, mais le faisceau $\mathbb{Z}/2$ concentré au point $(0,0,0)$ a une cohomologie non nulle en chaque dimension, donc $cd_\ell X = +\infty$.

4.6. On est tenté aussi d'essayer dans 4.2 de mettre des hypothèses seulement sur les points fermés de $X$, mais ce n'est pas possible. Par exemple il existe des anneaux de valuation discrète à corps résiduel algébriquement clos et à corps de fonctions ayant une dimension cohomologique arbitrairement grande (*). Le spectre d'un tel anneau aura aussi une dimension cohomologique très grande.

(*) Pour s'en convaincre, il suffit de noter que si $X$ est un schéma algébrique lisse sur un corps $k$, admettant un point $x \in X(k)$, alors on peut trouver un "arc de courbe formel" passant par $x$ dont "l'enveloppe algébrique" soit $X$, et dont le corps des fonctions contient donc celui $K$ de $X$, et $y$ induit une valuation discrète dont le corps résiduel est $k$.

5. Dimension cohomologique : cas $\ell = p$ .

5.0. En utilisant la théorie d'Artin - Schreier (IX 3.5) on obtient une meilleure majoration que 4.3 pour la p-dimension cohomologique d'un schéma X de caractéristique p . Soit cdqc X le plus grand nombre n tel que $H^n(X,F) \neq 0$ pour au moins un faisceau de Modules F quasi-cohérent sur X (au sens de Zariski). On a le

Théorème 5.1. Soit X un schéma noethérien de caractéristique $p > 0$ . Alors

$$cd_p X \leqslant cdqc\ X + 1 .$$

En particulier, la p-dimension cohomologique d'un schéma noethérien affine X de caractéristique $p > 0$ est au plus égale à 1 .

Démonstration. Appliquons IX 5.5 :
Tenant compte du fait que les $R^q f_* F$ , $q > 0$ , sont nuls pour un morphisme f fini et pour un faisceau abélien F (VIII 5.5) (resp. un faisceau F quasi-cohérent), on se ramène à démontrer que $H^q(X, i_!(\mathbb{Z}/p)_U) = 0$ pour $i:U \longrightarrow X$ une immersion ouverte et pour $q > cdqc\ X$ .

Or soit Y un sous-préschéma fermé de X de support X - U et soit J le faisceau cohérent d'idéaux définissant Y . Le morphisme $p : f \longmapsto f^p - f$ (IX 3.5) induit un morphisme $J \longrightarrow J$ . En examinant la suite exacte IX 3.5 et la suite exacte

$$0 \longrightarrow i_!(\mathbb{Z}/p)_U \longrightarrow (\mathbb{Z}/p)_X \longrightarrow (\mathbb{Z}/p)_Y \longrightarrow 0 \quad ,$$

on voit qu'on a en fait une suite exacte

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow i_!(\mathbb{Z}/p)_U \longrightarrow J \longrightarrow J \longrightarrow 0 .$$

Puisque J est cohérent on a $H^q(X,J) = 0$ pour $q > cdqc\ X$ , d'où le

résultat par la suite exacte de cohomologie.

Pour un schéma quasi-projectif sur un corps $k$ séparablement clos, on peut réduire cette majoration dans certain cas par 1 . On a en fait

Corollaire 5.2. *Soit $X$ un schéma de type fini sur un corps $k$ de caractéristique $p > 0$ . On a*

$$cd_p X \leqslant \dim X + 1 \ ,$$

*et si $k$ est séparablement clos et $X$ quasi-projectif(*), on a*

$$cd_p X \leqslant \dim X \ .$$

En effet, la première assertion est claire, puisque $cdqc\ X \leqslant \dim X$ ([6] 4.15.2) . Traitons la deuxième : Pour un tel $X$ , les groupes de cohomologie $H^n(X,F)$ $(n = \dim X)$ , pour un faisceau cohérent $F$ , sont des espaces vectoriels de dimension finie sur $k$ . Soit $V = H^n(X,J)$, où $J$ est le faisceau d'idéaux qui figure dans la suite exacte $(*)$. Le morphisme $\varphi : V \longrightarrow V$ déduit de $(*)$ est évidemment de la forme $\varphi = \mathcal{E} - id$ ou $\mathcal{E}$ satisfait à $\mathcal{E}(rv) = r^p \mathcal{E}(v)$ pour $r \in k$ et $v \in V$ . La jacobienne de l'application $\Phi$ du schéma affine déduit de $\Phi$ est donc $-I$ , $I$ la matrice identique. Par suite $\Phi$ est étale, donc surjectif parce que additif, et il s'ensuit que $\Phi$ est surjectif puisque $k$ est séparablement clos, d'où aussitôt la conclusion.

(*) Utilisant le lemme de Chow, il est facile de remplacer la condition "X quasi-projectif" par "X séparé".

## 6. Dimension cohomologique pour un préschéma de type fini sur Spec $\mathbb{Z}$.

Proposition 6.1. Soit X quasi-fini au-dessus de Spec $\mathbb{Z}$. Supposons que $\ell \neq 2$ où que chaque corps résiduel de X de caractéristique zéro est totalement imaginaire. Alors $\mathrm{cd}_\ell X \leqslant 3$.

C'est une conséquence de Théorème 2.2 (ii), du Corollaire 4.2 et du fait qu'un corps de nombres (totalement imaginaire si $\ell = 2$) est de $\ell$-dimension cohomologique $\leqslant 2$ (CG II 4.4).

Il s'ensuit en fait de la théorie des corps de classes qu'on a l'égalité si le morphisme $X \longrightarrow \mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}$ est propre et surjectif.

Malheureusement les résultats du n° 4 ne s'appliquent pas tels quels si X est seulement de type fini sur Spec $\mathbb{Z}$, parce que l'hypothèse (ii) de (4.2) n'est pas en général vérifiée pour les anneaux locaux de caractéristique résiduelle $\ell$. On doit donc utiliser le résultat (5.1) pour obtenir la bonne majoration; on va maintenant se payer pour le théorème (5.1).

Théorème 6.2. Soit X de type fini sur Spec $\mathbb{Z}$, et soit $\ell \in \mathbb{P}$. Supposons, si $\ell = 2$, qu'aucun corps résiduel de X n'est ordonnable. Alors

$$\mathrm{cd}_\ell X \leqslant 2 \dim X + 1 .$$

Plus précisément, soit F un faisceau de $\ell$-torsion tel que pour tout point x de X tel que $F_{\overline{x}} \neq 0$, on ait

$$\dim \{\overline{x}\} \leqslant \begin{cases} (N-1)/2 & \text{si } \ell \neq \mathrm{car}\ k(x) \\ N-1 & \text{si } \ell = \mathrm{car}\ k(x) \end{cases}$$

($\{\overline{x}\}$ est l'adhérence de $\{x\}$); alors

$$H^p(X,F) = 0 \quad \text{si} \quad p > N .$$

Démonstration. Par récurrence sur $X$, nous pouvons supposer le théorème vrai pour chaque sous-préschéma fermé distinct de $X$. Si $F$ est comme dans l'énoncé et si on écrit $F = \varinjlim F_i$ où les $F_i$ sont les sous-faisceaux constructibles de $F$ (IX 2.9 (iii)), chaque $F_i$ vérifie aussi les mêmes hypothèses. Il suffit donc de démontrer le théorème lorsque $F$ est constructible.

Or dans ce cas l'ensemble $E$ des $x \in X$ tels que $F_{\bar{x}} \neq 0$ est un sous-ensemble constructible, et l'hypothèse de récurrence implique que le théorème est vrai pour chaque $F$ tel que $E$ ne soit pas dense. De plus, le théorème est une conséquence de 5.1 pour un faisceau concentré sur la fibre de $X$ en le point $(\ell)$ de Spec $\mathbb{Z}$, et de 4.3 pour un faisceau concentré sur la fibre en $(p)$, où $p \neq \ell$, compte tenu que $\mathrm{cd}_\ell\, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = 1$ (CG II 2.2).

Prenons $X$ réduit, et soit $X = X_0 \cup X_1$ où $X_1$ est le sous-ensemble fermé, réunion des composantes irréductibles de $X$ de caractéristique $\ell$, et où $X_0$ est la réunion des autres composantes irréductibles, $X_0$ et $X_1$ étant munis des structures induites réduites. Soient $j_\nu : X_\nu \to X$ les inclusions et soit $d_\nu = \dim X_\nu$, et $N = \sup \{2d_0+1, d_1+1\}$. Pour tout $F$ constructible sur $X$ on a une suite exacte.

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow F \longrightarrow j_0{}_*j_0^*F \oplus j_1{}_*j_1^*F \longrightarrow C \longrightarrow 0 \ ,$$

où $C$ est concentré sur $X_0 \cap X_1$, qui est de caractéristique $\ell$ et de dimension $\leqslant d_1 - 1$. Il s'ensuit que

$$H^q(X,C) = 0 \quad \text{si} \quad q > N - 1 \ ,$$

car en vertu de 5.1 on a $\mathrm{cd}_\ell (X_0 \cap X_1) \leqslant \dim X_0 \cap X_1 + 1 \leqslant d_1 \leqslant N-1$. En examinant la suite exacte de cohomologie relative de $(*)$, on se ramène au cas $X = X_0$ où $X = X_1$, et ce dernier est conséquence de 5.1, comme on l'a déjà signalé.

Supposons donc que chaque point maximal de $X$ est de caractéristique différente de $\ell$ , et soient $i_\nu : x_\nu \longrightarrow X$ les inclusions des points maximaux. En examinant la suite exacte

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow \bigoplus_\nu i_{\nu *} i_\nu^* F \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

on se réduit par récurrence au cas $F = i_{\nu *} i_\nu^* F$ , c'est-à-dire $F$ de la forme $i_* G$ pour un faisceau $G$ convenable sur Spec $k(x)$ , $x$ un point de $X$ . On peut donc supposer $X$ irréductible et réduit, à point générique $x$ , et que la caractéristique de $k(x)$ est zéro d'après 4.3

Examinons la suite spectrale

$$(**) \qquad H^p(X, R^q i_* G) \Longrightarrow H^{p+q}(\text{Spec } k(x) , G) .$$

Soit $s = \dim X$ . Il nous faut démontrer que

$$(+) \qquad E_2^{p0} = 0 \quad \text{pour} \quad p > 2s + 1 .$$

Or $k(x)[i]$ est de degré de transcendance $s-1$ au-dessus de $0[i]$ qui est un corps de dimension cohomologique 2 . Puisque $k(x)$ n'est pas ordonnable si $\ell = 2$ , il s'ensuit de 2.1 qu'on a $\text{cd}_\ell k(x) = s + 1$ . Ça implique que le but de la suite spectrale est nul pour $n > s + 1$ . Il suffit donc pour (+) de démontrer que dans (**) on a

$$(++) \qquad E_2^{pq} = 0 \quad \text{si} \quad p > 2s - q \quad \text{et} \quad q > 0 .$$

Soit $y$ un point de $X$ et $K$ l'anneau des fractions d'un localisé strict en un point géométrique $\tilde{y}$ de $X$ au-dessus de $y$ . Alors $K$ est produit direct de corps dont chacun est de degré de transcendance $s-1$ sur un localisé strict de $\mathbb{Z}$ , et on a donc, d'après 2.1 et 2.2 , $\text{cd}_\ell K \leqslant s$ . De plus on peut appliquer 3.2 si la caractéristique résiduelle de $y$ n'est pas $\ell$ . On a donc

(") $(R^q i_* G)_{\tilde{y}} = 0$ { si $q >$ codim $y$, i.e. dim $\bar{y} > s-q$, et $\ell \neq$ car k(y), ou si $q > s$ en tout cas.

En particulier on a $E_2^{pq} = 0$ si $q > s$. Pour vérifier (++) dans le cas $0 < q \leqslant s$, on applique l'hypothèse de récurrence aux faisceaux $R^q i_*(G)$.

D'après l'énoncé et (''),il faut poser $N' = 2s - q$ et vérifier les deux inégalités

$$s - q \leqslant (N'-1)/2$$

$$s-1 = \dim X_\ell \leqslant N'-1 \ ,$$

où $X_\ell$ est le fibré de $X$ au-dessus du point $(\ell)$ de Spec $\mathbb{Z}$.
Elles sont bien vraies si $0 < q \leqslant s$, cqfd.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Ax, J. Proof of some conjectures of Serre on cohomological dimension, Proc. Amer. Math. Society 16 (1965) 1214-1221.

[2] Bourbaki, N. Algèbre Commutative, Paris (1960)

[3] Hironaha, H. Resolution of singularities of an algebraic surface over a field of characteristic zero, Annals of Math. Vol. 79, No. 1,2 (1964)

[4] Nagata, M. Local Rings, New York (1962)

[5] Serre, J-P. Sur la dimension cohomologique de groupes profinis, Topology Vol. 3, p. 413 (1965)

[6] Godement, R. Théorie des Faisceaux, Paris (1958).

[7] E. Artin et A. Schreier - Eine Kennzeichnung der reel abgeschlossenen Körper, Hamb. Abh. 5 (1927) pp. 225-231.

[8] Serre, J.P. Cohomologie Galoisienne, Lecture Notes n°5 (Springer).

E X P O S E XI

# COMPARAISON AVEC LA COHOMOLOGIE CLASSIQUE : CAS D'UN SCHEMA LISSE

par M. ARTIN

Sommaire :

1. Introduction

2. Existence de sections hyperplanes assez générales

3. Construction des bons voisinages

4. Le théorème de comparaison.

## 1. Introduction.

Dans le n° 4 nous démontrerons que la cohomologie étale à valeurs dans un faisceau localement constant de torsion coïncide avec la cohomologie classique pour un schéma X lisse sur Spec $\mathbb{C}$. La démonstration, qui est essentiellement celle donnée dans [1], est élémentaire à partir du théorème de Grauert rappelé plus bas (4.3 (iii)), qui dit que chaque revêtement fini de $X(\mathbb{C})$ provient d'un revêtement étale de X ; c'est pourquoi on la donne ici, bien qu'on prouvera un résultat plus complet plus tard, en utilisant le théorème de résolution des singularités de Hironaka [3] (*). De plus, les bons voisinages construits dans la section 3 pourraient être utiles dans

(*) Notons d'ailleurs que la résolution des singularités de Hironaka permet également de donner une démonstration très simple du résultat de Grauert, et à ce titre peut être considérée comme étant de toutes façons à la base des théorèmes de comparaison. Voir à ce sujet l'exposé de Mme M. Raynaud dans SGA 1 XII (North Holland Pub. Cie).

d'autres situations.

Notons qu'il n'est pas vrai que la cohomologie étale et la cohomologie classique coïncident pour les faisceaux qui ne sont pas de torsion. Par exemple, on a $H^1(X_{et}, \mathbb{Z}) = 0$ pour tout schéma normal X (IX 3.6 (ii)), mais la cohomologie classique n'est pas nécessairement nulle.

## 2. Existence de sections hyperplanes assez générales.

Le résultat suivant est classique mais on manque de référence (en attendant EGA V) :

**Théorème** 2.1. Soit k un corps et $V \subset \mathbb{P}^n_k$ un schéma algébrique projectif purement de dimension r. Soit V' le sous-schéma ouvert des points de V lisses sur Spec k et soit P un point rationnel de $\mathbb{P}^n$. Alors :

(i) Un sous-espace linéaire "assez général" L de dimension donnée d de $\mathbb{P}^n$ coupe V transversalement en chaque point de $L \cap V'$.

(ii) Soit $\{H_1, \ldots, H_s\}$ $(s \leq r)$ un système d'hyperplane de degré $d \geq 2$ passant par P et soit $Y = H_1 \cap \ldots \cap H_s$. Si $\{H_1, \ldots, H_s\}$ est assez général, alors Y coupe V transversalement en chaque point de $Y \cap V'$.

La locution "pour un sous-espace linéaire assez général" veut dire qu'il existe un sous-ensemble ouvert dense U de la grassmannienne qui paramétrise les sous-espaces linéaires de dimension d, tel que l'assertion envisagée sur L soit vraie chaque fois que le paramètre de L est dans U. Cela n'implique donc pas qu'il existe un tel L (défini sur k), si k n'est pas défini. De même, les hyperplans de degré d passant par P sont paramé-

trisés par un espace projectif $\mathbb{P}^N$, et la locution "pour $\{H_1,\ldots,H_s\}$ assez général" veut dire qu'il existe un sous-ensemble ouvert dense U de $(\mathbb{P}^N)^s$ tel que l'assertion envisagée soit vraie chaque fois que le paramètre de $(H_1,\ldots,H_s)$ est dans U.

Démonstration (i) : Par récurrence on est ramené immédiatement au cas où L est hyperplan. Soit $(V'_\nu)$ un recouvrement fini ouvert de V'. Si l'assertion (i) est vraie quand on remplace le symbole V' par $V'_\nu$ quel que soit $\nu$, c'est aussi vrai pour V', parce que l'intersection d'un nombre fini de sous-ensemble ouverts denses est également ouvert et dense. On peut donc remplacer la situation par un schéma algébrique affine, disons $V \subset \mathbb{E}^n_k = \operatorname{Spec} k\,[x_1,\ldots,x_n]$. L'hyperplan L sera l'ensemble des zéros d'une équation linéaire

$$\ell(x) = a_o + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \quad .$$

Rappelons qu'un schéma lisse est localement intersection complète. On peut donc remplacer V' par un sous-ensemble ouvert de points de V tel qu'il existe des polynômes $f_1(x),\ldots,f_{n-r}(x)$ qui s'annulent sur V et des indices $1 \le j_\nu \le n$ $(\nu = 1,\ldots,n-r)$ tels que le déterminant

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_{j_\nu}} \right| \qquad (i,\nu = 1,\ldots,n-r)$$

soit inversible. Disons $j_\nu = \nu$ $(\nu = 1,\ldots,n-r)$. Alors on peut résoudre les équations

$$y_j = \sum_{i=1}^{n-r} c_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

pour $c_i$ comme fonction rationnelle des variables $x_i$, $y_j$ ($i = 1,\ldots,n-r$ ; $j = 1,\ldots,n$), et ces fonctions $c_i(x,y)$ sont définies en chaque point de V' .

Or dire que L coupe V transversalement en un point Q de V' revient à dire que la valeur de la matrice

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_{n-r}}{\partial x_1} & & \frac{\partial f_{n-r}}{\partial x_n} \\ a_1 & \cdots\cdots & a_n \end{bmatrix}$$

en Q est de rang n-r+1. Donc pour que L coupe V transversalement en chaque point de V' il faut et suffit que le système des r+1 équations

$$a_j = \sum_{i=1}^{n-r} c_i(x,a) \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad (j = n-r+1,\ldots,n)$$

$$a_o + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$$

n'ait aucune solution sur V'. Une telle condition est évidemment constructible en (a) : Soit X = V'XA, où A est l'espace affine de coordonnées $a_o,\ldots,a_n$, et soit $Y \subset X$ le sous-ensemble fermé des solutions de ces équations. La condition est que la fibre de Y/A soit vide, ce qui est bien une

condition constructible (EGA IV 9.5.1). Il suffit donc de vérifier que la fibre au-dessus du point générique de A est vide, ce qui se voit immédiatement sur la formé des équations. Ceci achève la démonstration de (i).

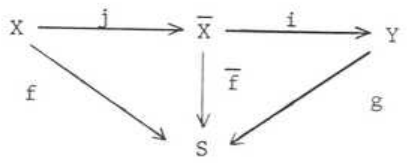
(ii) : Considérons l'application rationnelle $\mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^N$ donnée par le système linéaire des hyperplans de degré d ($d \geq 2$) passant par P. Il est bien connu (et on le vérifie aisément) que c'est un "éclatement" de P, donc donne une immersion localement fermée

$$f : \mathbb{P}^n - \{P\} \longrightarrow \mathbb{P}^N \quad .$$

Soit $V'' = V' - (\{P\} \cap V')$, $\overline{V}'' = F(V'')$ et soit $L_i$ l'hyperplan de $\mathbb{P}^N$ correspondant aux hyperplans $H_i$ ($i = 1,\ldots,s$). Alors V" est isomorphe à $\overline{V}''$, et d'après la définition de f, dire que Y coupe V" transversalement revient à dire que $L_1 \cap \ldots \cap L_s$ coupe $\overline{V}''$ transversalement. En posant $\overline{V}$ = adhérence de $\overline{V}''$, on est ramené à l'assertion (i) pour $\overline{V}$, qui implique (ii) avec V" au lieu de V'. Il reste donc à considérer le point P, si c'est un point lisse de V. Mais il est évident que si $\{H_1,\ldots,H_s\}$ est assez général et P est lisse sur V, alors Y coupe V transversalement en P, d'où le résultat.

## 3. Construction des bons voisinages.

Définition 3.1. On appelle fibration élémentaire un morphisme de schémas $f : X \longrightarrow S$ qui peut être plongé dans un diagramme commutatif



satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) j est une immersion ouverte dense dans chaque fibre, et $X = \overline{X} - Y$.

(ii) $\overline{f}$ est lisse et projectif, à fibres géométriques irréductibles et de dimension 1 .

(iii) g est un revêtement étale, et chaque fibre de g est non-vide.

On vérifie facilement qu'un tel plongement de X est unique s'il existe, à isomorphisme canonique près.

Définition 3.2. On appelle bon voisinage relatif à S un S-schéma X tel qu'il existe des S-schémas

$$X = X_n, \ldots, X_o = S$$

et des fibrations élémentaires $f_i : X_i \longrightarrow X_{i-1}$ , $i = 1, \ldots, n$.

Proposition 3.3. (*) Soit k un corps algébriquement clos, X/Spec k un schéma lisse, et $x \in X$ un point rationnel. Il existe un ouvert de X contenant x qui est un bon voisinage (relatif à Spec k).

Démonstration. Prenons X irréductible. Par récurrence sur dim X = n, il suffit de trouver un voisinage U de x dans X et une fibration élémentaire $f : U \longrightarrow V$, avec V lisse et de dimension n-1. En effet, il existera un voisinage V' de v = f(x) qui est un bon voisinage, et on pourra prendre $U' = U \cap V'$ comme bon voisinage de x.

On peut supposer $X \subset \mathbb{E}^r$ affine. Soit $X_o$ l'adhérence de X dans $\mathbb{P}^r$. Soit $\overline{X}$ le normalisé de $X_o$ et $Y = \overline{X} - X$, avec la structure induite réduite.

(*) Ce résultat s'étend sans difficulté à une assertion semi-locale.

Soit de plus $S \subset \overline{X}$ le sous-ensemble fermé des points singuliers. On a $S \subset Y$ et

$$\dim \overline{X} = \dim X = n,$$

$$\dim Y = n-1,$$

$$\dim S \leq n-2.$$

Plongeons $\overline{X}$ dans un espace projectif $\mathbb{P}^N$, au moyen d'un faisceau inversible L qui soit de la forme $M^{\otimes r}$ avec M très ample et $r \geq 2$. Il existe alors des hyperplans $H_1, \ldots, H_{n-1}$ de $\mathbb{P}^N$, où $H_i$ est l'ensemble des zéros de

$$\sum_{\nu=0}^{N} a_{i\nu} \; x_\nu = 0 \quad ,$$

qui contiennent x et tels que l'intersection $L = H_1 \cap \ldots \cap H_{n-1}$ soit de dimension N-n+1 et coupe $\overline{X}$ et Y transversalement (2.1). L'intersection $\overline{X} \cap L$ est une courbe lisse et connexe (cela résulte du théorème de Bertini), et $Y \cap L$ est de dimension 0. Choisissons de plus un autre hyperplan

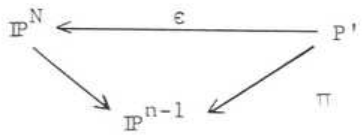
$$H_o \; : \; \sum_{\nu=0}^{N} a_{o\nu} \; x_\nu = 0$$

tel que $H_o$ coupe $X \cap L$ transversalement et $H_o \cap Y \cap L = \emptyset$ .

Considérons la projection $\mathbb{P}^N \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ obtenue en "introduisant les coordonnées projectives"

$$y_i = \sum_{\nu=0}^{N} a_{i_\nu} x_\nu \quad .$$

C'est une application rationnelle définie en dehors du centre de projection $C = H_o \cap \ldots \cap H_{n-1}$ . Soit $\varepsilon : P' \longrightarrow \mathbb{P}^N$ l'éclatement de C, tel qu'on ait un diagramme



où $\pi$ est un morphisme. Soit $\overline{X}' \subset P'$ l'image inverse "propre" de $\overline{X}$, c'est-à-dire, l'adhérence de $\varepsilon^{-1}(\overline{X}-(\overline{X} \cap C))$. Puisque par hypothèse C coupe $\overline{X}$ transversalement, le morphisme $\overline{X}' \longrightarrow \overline{X}$ est un éclatement de l'ensemble fini $\overline{X} \cap C$. Soient $X' = X - \overline{X} \cap C$, qui s'identifie aussi à un sous-schéma ouvert de $\overline{X}'$, et $Y' = \overline{X}' - X'$ le sous-schéma fermé avec la structure induite réduite. On a un diagramme $\mathbb{D}$ de morphismes

$$\begin{array}{ccccc} X' & \xrightarrow{j} & \overline{X}' & \xleftarrow{i} & Y' \\ & \searrow^{f'} & \downarrow{\scriptstyle \overline{f}'} & \swarrow_{g'} & \\ & & \mathbb{P}^{n-1} & & \end{array} ,$$

et je dis qu'il existe un voisinage V de $v = f'(x)$ tel que la restriction de $\mathbb{D}$ à V satisfasse aux conditions (i), (ii), (iii) de (3.1), donc que $f'|V$ soit une fibration élémentaire. Cela achevera la démonstration.

La condition (i) sera triviale. Pour (ii), notons que $\overline{X} \cap L$ est une courbe lisse par hypothèse, et on voit immédiatement qu'on a un morphisme biunivoque $\overline{f}'^{-1}(v) \longrightarrow \overline{X} \cap L$ induit par $\varepsilon$. Donc $(\overline{f}'^{-1}(v))_{red} \to \overline{X} \cap L$ est bijectif. Pour vérifier que $\overline{f}'$ est lisse au-dessus d'un voisinage de v, il suffit par le lemme de Hironaka (SGA 1 II 2.6 (*)) de vérifier qu'il est lisse au point générique de $\overline{f}'^{-1}(v)$. En ce point, $\overline{X}'$ est isomorphe à $\overline{X}$, et le morphisme est lisse parce que L coupe $\overline{X}$ transversalement.

Il reste à démontrer que g' est étale dans un voisinage de v (puisque Y est de dimension n-1, il est évident que chaque fibre de g' est non-vide). On a $Y' = \varepsilon^{-1}(Y) \amalg D_1 \amalg \ldots \amalg D_r$, où $\overline{X} \cap C = \{P_1, \ldots, P_r\}$ et $D_i$ est

(*) et EGA IV 5.12.10.

l'éclatement de $P_i$ dans $\bar{X}$ . Chaque $D_i$ s'identifie à $\varepsilon^{-1}(P_i)$, et s'envoie isomorphiquement sur $\mathbb{P}^{n-1}$ est définie en chaque point de Y, et le morphisme induit sur Y n'est autre que $g'|\varepsilon^{-1}(Y)$. Il est étale au-dessus de v, car L coupe Y transversalement, donc g' est étale au-dessus de v.

4. Le théorème de comparaison.

4.0. Soit X un schéma localement de type fini sur Spec $\mathbb{C}$ et considérons la topologie usuelle sur l'espace $X(\mathbb{C})$ des points rationnels de X. On va noter par $X_{cl}$ le site des isomorphismes locaux $f : U \longrightarrow X(\mathbb{C})$, c'est-à-dire, des morphismes f d'espaces topologiques ayant la propriété suivante :

Pour chaque $x \in U$ il existe un voisinage ouvert $U_x$ tel que $f|U_x$ est un homéomorphisme de $U_x$ sur un voisinage ouvert de f(x).

Une famille $\{U_\nu \longrightarrow U\}$ de morphisme de $X_{cl}$ est dit couvrant si U est la réunion des images des $U_\nu$.

Puisqu'une immersion ouverte est un isomorphisme local, on a un morphisme (inclusion) de sites (IV )

(4.1) $\delta : X_{cl} \longrightarrow X(\mathbb{C})$ (*).

Or pour chaque isomorphisme local $U \longrightarrow X(\mathbb{C})$ il existe d'après la définition un "recouvrement" de U par des ouverts de $X(\mathbb{C})$, et on déduit de ( ) que les topos associés aux deux sites sont équivalents (par $\delta_*$). En particulier on peut remplacer $X(\mathbb{C})$ par $X_{cl}$ pour le calcul de la cohomologie usuelle

Soit maintenant $f : X' \longrightarrow X$ un morphisme étale de schémas. Alors $f(\mathbb{C}) : X'(\mathbb{C}) \longrightarrow X(\mathbb{C})$ est un isomorphisme local. Cela résulte immédiatement

(*) Plus précisément, l'inclusion de catégories $Ouv(X(\mathbb{C})) \longrightarrow X_{cl}$ définit un morphisme de sites (4.1) en sens inverse.

du critère jacobien (SGA 1 II 4.10) et du théorème des fonctions implicites. Le foncteur $X' \longmapsto X'(\mathbb{C})$ donne donc un morphisme de sites

(4.2) $$\varepsilon : X_{cl} \longrightarrow X_{et} \quad ,$$

où $X_{et}$ est le site étale.

Rappelons les résultats suivants (**) :

Théorème 4.3. (i) X est connexe et non-vide si et seulement si $X(\mathbb{C})$ est connexe et non-vide.

(ii) Le foncteur $\varepsilon$ est pleinement fidèle.

(iii) ("Théorème de Grauert-Remmert"). Le foncteur $\varepsilon$ induit une équivalence de la catégorie des revêtements finis de $X(\mathbb{C})$, muni de sa topologie habituelle d'espace localement compact, avec la catégorie des revêtements étales de X.

Nous accepterons (i) comme connu. Il résulte par exemple de (GAGA) [4]. L'assertion (ii) résulte facilement de (i). En effet, pour vérifier l'assertion de surjectivité contenue dans (ii), soit $\varphi : X'(\mathbb{C}) \longrightarrow X''(\mathbb{C})$ un $X(\mathbb{C})$-morphisme. On peut supposer tous les schémas connexes et affines, donc séparés. Alors le graphe $\Gamma$ de $\varphi$ est une composante connexe de $X' \times_X X''(\mathbb{C})$, d'où $\Gamma = Y(\mathbb{C})$ pour une certaine composante connexe Y de $X' \times_X X''$, par (i). Alors Y est le graphe d'un morphisme $f : X' \longrightarrow X''$ qui induit $\varphi$, i.e. la projection $Y \longrightarrow X'$ est un isomorphisme : en effet $Y(\mathbb{C}) \longrightarrow X(\mathbb{C})$ est un isomorphisme, d'où on tire facilement qu'il en est de même de $Y \longrightarrow X'$ (qui est étale, radiciel, surjectif !). Pour (iii) tout revient d'après (ii) à démontrer que chaque revêtement fini de $X(\mathbb{C})$ est de la forme $X'(\mathbb{C})$ où

(**) Qui figurent dans l'exposé cité en note de bas de page, p. 2.

$X' \longrightarrow X$ est étale.

Pour cela, on se réduit immédiatement par descente (SGA 1 IX 4.7) au cas X connexe et normal. Le problème est local sur X (pour la topologie de Zariski), et on peut donc supposer X affine. Soient $f : X \longrightarrow \mathbb{E}^n$ un morphisme fini, et $T' \longrightarrow X(\mathbb{C})$ un revêtement fini connexe. On constate immédiatement que le morphisme composé $\eta' : T' \longrightarrow \mathbb{E}^n(\mathbb{C})$ est un "revêtement analytique" dans le sens de ([2] § 2, Def. 3). D'après ([2] § 2, Satz 8) s'étend à un "revêtement analytique" $\eta : T \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, et il suffit de démontrer que $\eta$ est induite par un morphisme de schémas $f : Y \longrightarrow \mathbb{P}^n$ convenable, avec Y normal. Or le théorème fondamental ([2] § 13 Satz 42) affirme qu'il y a une structure canonique analytique normale sur T telle que $\eta$ induise un morphisme d'espaces analytiques. Puisque alors $\eta$ est un morphisme fini, l'image directe du faisceau structural sur T est un faisceau $\mathcal{A}$ d'algèbres analytiques cohérentes sur $\mathbb{P}^n$. Il résulte de GAGA [4] que $\mathcal{A}$ est le faisceau analytique associé à un faisceau algébrique A sur $\mathbb{P}^n$, et on prend $Y = \underline{\text{Spec}}\ A$.

Nous pouvons maintenant démontrer le résultat suivant :

Théorème 4.4. Soit X un schéma lisse sur Spec $\mathbb{C}$.

(i) Il y a une équivalence entre la catégorie des faisceaux de torsion localement constants constructibles sur $X_{et}$ et la catégorie des faisceaux de torsion localement constants, à fibres finies, sur $X_{cl}$, l'équivalence étant donnée par les foncteurs quasi-inverses $_*$ et $^*$ .

(ii) Soit F un faisceau de torsion localement constant, à fibres finies, sur $X_{cl}$, et notons aussi par F le faisceau $\varepsilon_* F$ induit sur $X_{et}$. Alors

$$R^q \varepsilon_* F = 0 \quad \text{si } q > 0 \quad .$$

(iii) Avec les notations de (i), le morphisme canonique

$$H^q(X_{et},F) \longrightarrow H^q(X_{cl},F)$$

est bijectif pour chaque q. En particulier,

$$H^q(X_{et}, \mathbb{Z}/n) \xrightarrow{\sim} H^q(X_{cl}, \mathbb{Z}/n)$$

pour chaque q.

Démonstration. Pour (i), notons que les faisceaux en question sont ceux qui sont représentables par des revêtements étales de X (resp. par des revêtements finis de $X(\mathbb{C})$). Puisqu'il y a une équivalence entre les catégories de ces revêtements (4.3), l'assertion (i) en résulte immédiatement. L'isomorphisme de (iii) est conséquence de (ii) et de la suite spectrale de Leray V 5.2 pour $\varepsilon$ . Il reste donc à démontrer (ii).

Or $R^q \varepsilon_* F$ est le faisceau associé au préfaisceau $\mathcal{R}^q F$, où $(\mathcal{R}^q F)(X') = H^q(X'_{cl},F)$ pour $X' \longrightarrow X$ étale. Pour démontrer que $R^q \varepsilon_* F = 0$ si $q > 0$, on doit donc démontrer le suivant :

Lemme 4.5. Soit $\xi \in H^q(X_{cl},F)$ et $x \in X_{cl} = X(\mathbb{C})$. Il existe un morphisme étale $X' \longrightarrow X$ dont l'image contient x et tel que l'image de $\xi$ dans $H^q(X'_{cl},F)$ soit nulle.

Démonstration du lemme. Récurrence sur $n = \dim X$ ; le problème est local sur X pour la topologie étale, et on peut donc supposer F constant, et par dévissage on peut même supposer que $F = \mathbb{Z}/n$. De plus, en remplaçant X par un voisinage ouvert de Zariski de x, on peut (3.3) supposer que X admet une fibration élémentaire (3.1) $f : X \longrightarrow S$. Reprenons les notations de (3.1) :

par calcul direct, on voit que $R^q j_{cl*}F = 0$ si $q > 1$, que $R^1 j_{cl*}F$ est l'extension par 0 d'un faisceau constant sur $Y_{cl}$, et enfin que $j_{cl*}F$ est le faisceau constant $\mathbb{Z}/n$ sur $\overline{X}$ . De plus, on peut calculer $R^q\overline{f}_{cl*}(j_{cl*}F)$ fibre par fibre. De la suite spectrale de Leray

$$E_2^{pq} = R^p\overline{f}_{cl*}(R^q j_{cl*}F) \Longrightarrow R^{p+q}f_{cl*}F$$

on déduit qu'on peut de même calculer $R^{p+q}f_{cl*}F$ fibre par fibre, et donc que

$R^0 f_{cl*}\mathbb{Z}/n = \mathbb{Z}/n$ ,

$R^1 f_{cl*}\mathbb{Z}/n$ est un faisceau localement constant de torsion sur $S_{cl}$ ,

$R^q f_{cl*}\mathbb{Z}/n = 0$ si $q > 1$ .

La suite spectrale de Leray

$$E_2^{pq} = H^p(S_{cl}, R^q f_{cl*}F) \Longrightarrow H^{p+q}(X_{cl},F)$$

se réduit ainsi à la suite exacte

$$(*) \ \ldots \longrightarrow H^q(S_{cl}, f_{cl*}F) \longrightarrow H^q(X_{cl},F) \longrightarrow H^{q-1}(S_{cl}, R^1 f_{cl*}F) \longrightarrow$$

Soit s l'image de x dans S. Par hypothèse de récurrence et grâce à (i), il existe pour chaque classe $\eta \in H^q(S_{cl},G)$ (G localement constant de torsion, à fibres finies) un "voisinage étale" $S' \longrightarrow S$ de s tel que l'image de $\eta$ dans $H^q(S'_{cl},G)$ soit nul. Or les foncteurs $R^q f_{cl*}$ commutent évidemment aux changements de base étales, et si $S' \longrightarrow S$ est un voisinage étale de s, alors $X' = X \times_S S' \longrightarrow X$ est un voisinage étale de x. Lorsque $q \geq 1$ on termine donc grâce à la suite exacte (*) en prenant d'abord $G = R^1 f_{cl*}F$ et

ensuite $G = f_{cl}{}^{*}F$ . Lorsque $q = 1$, on note que $H^1(X_{cl}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ (resp. $H^1(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$) classifie les revêtements étales principaux de $X_{cl}$ (resp. X), de groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, donc en vertu de 4.3 (iii) l'application $H^1(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(X_{cl}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est bijective, d'où aussitôt le résultat d'effacement 4.5 pour $q = 1$.

Variante 4.6. On peut aussi démontrer (4.5) de la manière élégante suivante, due à Serre : on remarque qu'un bon voisinage (3.2) connexe X satisfait aux deux conditions suivantes :

(i) $\pi_n(X(\mathbb{C})) = 0$ si $n > 1$,

(ii) $\pi_1(X(\mathbb{C}))$ est une extension successive de groupes libres de type fini.

En effet, si $X \longrightarrow S$ est une fibration élémentaire où S est un bon voisinage, on peut supposer (i) et (ii) vrai pour S par récurrence. Or $X(\mathbb{C}) \longrightarrow S(\mathbb{C})$ est un espace fibré localement trivial, comme on voit aisément, à fibres isomorphes à $X_o(\mathbb{C})$, où $X_o$ est une fibre arbitraire de X/S. Or $X_o$ est une courbe non-singulière connexe non complète et il est bien connu que cela implique que $\pi_n(X_o(\mathbb{C})) = 0$ si $n > 1$, et que $\pi_1(X_o(\mathbb{C}))$ est un groupe libre. Alors (i) et (ii) sont des conséquences de la suite exacte d'homotopie

$$\longrightarrow \pi_o(X_o(\mathbb{C})) \longrightarrow \pi_n(X(\mathbb{C})) \longrightarrow \pi_n(S(\mathbb{C}) \longrightarrow \ \ldots$$

Donc $X(\mathbb{C})$ est un espace $K(\pi,1)$, et cela implique que chaque classe de cohomologie $\xi \in H^n(X(\mathbb{C}),F)$ devient nulle sur le revêtement universel de $X(\mathbb{C})$. Il suffit de démontrer que $\xi$ devient nulle déjà sur un revêtement fini X' de X, ce qui revient au même que de démontrer que $\pi_1 = \pi_1(X(\mathbb{C}))$

est un bon groupe (cf. CG I 16), c'est-à-dire que le morphisme de $\pi_1$ dans son complété $\hat{\pi}_1 = \varprojlim_N \pi_1/N$ (où N parcourt l'ensemble des sous-groupes invariants de $\pi_1$ d'indice fini) induit une bijection.

$$H^q(\hat{\pi}_1, M) \xrightarrow{\sim} H^q(\pi_1, M)$$

pour tout $\pi_1$-module fini M continu (où le symbole de gauche est la cohomologie de $\hat{\pi}_1$ en tant que groupe profini). Or une extension successive de groupes libres de type fini est un bon groupe (cf. CG I p. 15-16, exc. 1,2), d'où le résultat.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GIRAUD J., "Analysis Situs", Séminaire Bourbaki, Exposé n° 256.

[2] GRAUERT H et REMMERT R., "Komplexe Räume", Math. Ann. Bd. 136, p. 345 (1958).

[3] HIRONAKA H., "Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero" Annals of Math. Vol. 39, n° 1,2 (1964).

[4] SERRE J.P., "Géométrie Algébrique et Géométrie Analytique", Annales de l'Institut Fourier, t. VI, p. 1-12 (1956).

EXPOSE XII

# THEOREME DE CHANGEMENT DE BASE POUR UN MORPHISME PROPRE

par M. ARTIN

## 1. Introduction.

Nous donnons dans cet exposé le théorème fondamental qui dit, sous une forme un peu plus précise, que pour un morphisme propre $f : X \longrightarrow Y$ de schémas, et pour un faisceau abélien F de torsion sur X, la fibre de $R^q f_* F$ en un point géométrique de Y est isomorphe à la cohomologie $H^q(X_\xi, F|X_\xi)$ de la fibre $X_\xi$.

Rappelons que pour un morphisme propre d'espaces paracompacts le résultat analogue est bien connu (GODEMENT II 4.11) et facile. Il est beaucoup plus délicat dans le cas des schémas. Par exemple, l'hypothèse que F soit de torsion est bien nécessaire, contrairement à ce qui se passe pour les espaces paracompacts.

La démonstration se fait en plusieurs étapes : on se réduit par des méthodes de dévissage plus ou moins formelles au cas où Y est noethérien, où la dimension relative de f est $\leq 1$, et où le faisceau F est constant. Pour traiter ce cas particulier, on se sert du théorème de spécialisation pour le groupe fondamental (5.9) qui est une variante non-abélienne du théorème énoncé plus haut, et qu'on peut démontrer directement dans le cas particulier envisagé (XIII 2).

2. Un exemple.

Montrons que l'hypothèse que F soit de torsion est nécessaire : Soit X une surface non singulière sur un corps k algébriquement clos, Y une courbe non singulière sur k, et $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme propre dont la fibre générique est lisse et la fibre géométrique en le point géométrique $\bar{y}$ de Y a un point double ordinaire, et est irréductible. Soit F le faisceau constant $\mathbb{Z}_X$.

Rappelons le fait suivant : pour un point quelconque z d'un schéma Z, soit $i : z \longrightarrow Z$ l'inclusion. On a $H^1(Z, i_* \mathbb{Z}_z) = 0$ (IX 3.6 (i)). Or puisque X est normal donc unibranche, il s'ensuit que $\mathbb{Z}_X \xrightarrow{\sim} i_* \mathbb{Z}_x$, où $i : x \longrightarrow X$ est l'inclusion du point générique. Donc $H^1(X, \mathbb{Z}_X) = 0$ et de même $R^1 f_* \mathbb{Z}_X = 0$. Mais je dis que pour la fibre géométrique $X_o$ de X/Y avec le point double ordinaire on a $H^1(X_o, \mathbb{Z}_{X_o}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ (*), ce qui donne le contre-exemple, puisque $\mathbb{Z}_{X_o} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_X | X_o$ .

Soit $i_o : x_o \longrightarrow X_o$ l'inclusion du point générique de $X_o$, et soit Q le point singulier de $X_o$. La courbe $X_o$ a deux "branches" en Q et il s'ensu que la fibre de $i_{o*}(\mathbb{Z}_{x_o})$ au point Q est isomorphe à $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. En dehors de Q la courbe $X_o$ est normale et donc $i_{o*}(\mathbb{Z}_{x_o}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_{X_o}$ dans $X_o - Q$. On a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_{X_o} \longrightarrow i_{o*}(\mathbb{Z}_{x_o}) \longrightarrow (\mathbb{Z})_Q \longrightarrow 0 \quad ,$$

où le dernier membre est l'extension par 0 du faisceau $\mathbb{Z}$ au point Q. Tous les trois membres ont un $H^0$ isomorphe à $\mathbb{Z}$, et $H^1(X_o, i_{o*}(\mathbb{Z}_{x_o})) = 0$, d'où

(*) Comparer, du point de vue $\pi_1$, avec SGA 3 X (6, Exemples) et (1.6).

$H^1(X_o, \mathbb{Z}_{X_o}) = \mathbb{Z}$ par la suite exacte de cohomologie.

3. Rappels sur le $H^1$ non-abélien.

On va indiquer brièvement quelques résultats sur la cohomologie non-abélienne dont nous aurons besoin dans la suite. Nous omettrons la plupart des démonstrations, bien connues dans divers cas particuliers, et qu'on trouvera dans la thèse de GIRAUD [1].

Soient X un schéma, et F un faisceau en groupes sur X. Pour chaque X'/X étale, on définit un ensemble pointé $H^1(X',F)$, fonctoriel covariant en F et contravariant en X'. Le $H^1$ commute aux produits finis de faisceaux. Si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme, on définit un faisceau d'ensembles pointés (c'est-à-dire, avec section distinguée) $R^1f_*F$. C'est le faisceau associé au préfaisceau (d'ensembles pointés) $\mathcal{R}^1F$, qui, à chaque Y'/Y étale, associe l'ensemble $H^1(X \times_Y Y', F)$.

On a les suites exactes de cohomologie habituelles, dont nous nous contenterons d'indiquer une :

Proposition 3.1. Soit $0 \longrightarrow F \xrightarrow{u} G$ une injection de faisceaux de groupes, et soit $C = G/F$ le faisceau d'ensembles homogènes sous G. On a une suite exacte de faisceaux d'ensembles pointés

$$0 \longrightarrow f_*F \longrightarrow f_*G \longrightarrow f_*C \xrightarrow{\partial} R^1f_*F \xrightarrow{u^1} R^1f_*G \quad .$$

Bien entendu, cette suite exacte est obtenue en passant à la suite de faisceaux associée à la suite exacte de préfaisceaux dont la valeur pour Y'/Y étale est

$$0 \longrightarrow F(X') \longrightarrow G(X') \longrightarrow C(X') \xrightarrow{\partial} H^1(X',F) \longrightarrow H^1(X',G) \quad ,$$

où $X' = X \times_Y Y'$. La relation d'équivalence induite par $\partial$ est celle donnée par l'opération de $f_*G$ sur $F_*C$. On peut comme d'habitude expliciter la relation d'équivalence induite par $u^1$ grâce à la notion de "torsion" [1].

Proposition 3.2. Soient $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ des morphismes de schémas. On a une suite exacte pour chaque $Z'/Z$ étale, posant $Y' = Y \times_Z Z'$, $X' = X \times_Z Z'$ :

$$0 \longrightarrow H^1(Y', f_*F) \longrightarrow H^1(X', F) \longrightarrow H^0(Y', R^1 f_* F) \quad ,$$

d'où en passant aux faisceaux associés, une suite exacte de faisceaux pointés sur $Z$ :

$$0 \longrightarrow (R^1 g_*) f_* F \longrightarrow R^1 (gf)_* F \longrightarrow f_* (R^1 g_*) F \quad .$$

Proposition 3.3. La famille des foncteurs de la forme $H^1(X', F)$, pour $X'$ étale sur $X$, et de la forme $R^1 f_* F$, pour un morphisme quelconque $f : X \longrightarrow Y$, est effaçable, c'est-à-dire il existe une injection $F \xrightarrow{u} G$ tel que les morphismes induits $H^1(X', F) \longrightarrow H^1(X', G)$ et $R^1 f_* F \longrightarrow R^1 f_* G$ soient tous nuls. Plus précisément, il existe une injection $F \xrightarrow{u} G$ tel que chacun des ensembles $H^1(X', G)$, avec $X'$ étale sur $X$, et chacun des faisceaux pointés $R^1 f_* G$, soient nuls. Si $X$ est noethérien et $F$ est un faisceau de ind- $\mathbb{L}$-groupes constructible, alors il existe une telle injection, où de plus $G$ est un faisceau de ind- $\mathbb{L}$-groupes.

Démonstration. La première assertion est sans doute vraie dans un topos quelconque, mais pour la topologie étale, il est commode de faire l'effacement avec la "résolution de Godement"

$$(3.4) \qquad F \longrightarrow G = \prod_{x \in X} i_{x*} i_x^* F \quad ,$$

où x parcourt l'ensemble des points de X et où $i_x : \bar{x} \longrightarrow X$ est un point géométrique de X au-dessus de x. Notons que pour X'/X étale, on a

$$G(X') = \prod_{x \in X} (i_x^* F)(X' \times_X \bar{x}) = \prod_{x \in X} \Big( \prod_{\bar{x}'/\bar{x}} F_{\bar{x}'} \Big) ,$$

où les $\bar{x}'$ sont des points géométriques de X'. Or il est clair que pour chaque point de X' il y a au moins un $\bar{x}'$ au-dessus, d'où $F(X') \subset G(X')$ (VIII 3), donc $F \subset G$. D'autre part, un $\bar{u} / \bar{x}$ étale quelconque est somme de spectres de corps séparablement clos, d'où $H^1(\bar{u}, \bar{G}) = 0$, quel que soit le faisceau $\bar{G}$ sur $\bar{x}$. Il résulte alors de 3.2 que $H^1(X', i_{x*} i_x^* F) = 0$ pour chaque X'/X étale, d'où (puisque $H^1$ commute aux produits) $H^1(X', G) = 0$, donc de même $R^1 f_* G = 0$ pour tout $f : X \longrightarrow Y$, grâce à la description de $R^1 f_*(G)$ comme faisceau associé au préfaisceau $Y' \longmapsto H^1(X \times_Y Y', G)$.

Supposons maintenant que de plus F est constructible et X noethérien. Alors on voit immédiatement qu'il existe un ensemble fini de points $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de X tel que le morphisme

$$F \longrightarrow \prod_{1 \leq i \leq n} i_{x*} i_x^* F$$

soit déjà injectif. Le faisceau $i_{x*} i_x^* F$ est un faisceau de groupes ind-fini (IX 1.5), donc le produit fini l'est aussi (IX 1.4 et 1.6 (iii)). En remplaçant G par ce faisceau, on obtient la dernière assertion.

3.5. Comme dans le cas de la cohomologie abélienne (traité dans V 2.4), on peut calculer le $H^1$ par le procédé de ČECH [1].

4. Le morphisme de changement de base.

Soit

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{g'} & X' \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ S & \longleftarrow & S' \end{array}$$

un carré cartésien de morphisme de schémas. On en déduit un morphisme de foncteur $\varphi = \varphi_g$

$$(4.1) \qquad g^*f_* \xrightarrow{\varphi} f'_*g'^* \qquad (4.1)$$

de la manière suivante : donner un tel morphisme équivaut à donner un morphisme de foncteurs

$$(4.1\ adj) \qquad f_* \longrightarrow g_*f'_*g'^* \quad , \qquad (4.1\ adj)$$

parce que $g_*$ et $g^*$ sont adjoints. Nous prenons pour ce morphisme le morphisme

$$f_* \xrightarrow{(id \to g'_*g'^*)} f_*g'_*g'^* = g_*f'_*g'^* \quad ,$$

en tenant compte que

$$g_*f'_* = (gf')_* = (fg')_* = f_*g'_* \quad .$$

Notons qu'il y a un autre condidat pour (4.1). En effet, donner un tel morphisme équivaut à donner

$$f'^*g^*f_* \longrightarrow g'^*$$

et on peut prendre

$$f'^*g^*f_* \simeq g'^*f^*f_* \xrightarrow{(f^*f_* \to id)} g'^* \quad .$$

J'ignore si ces deux choix coïncident toujours (*), et en tout cas nous nous servirons uniquement du premier. Nous l'appellons morphisme de changement de base.

En restreignant (4.1) aux faisceaux abéliens (resp. de groupes) on déduit un morphisme $\varphi^q = \varphi^g$ g pour chaque $q \geq 0$ (resp. pour $q = 0, 1$) :

$$(4.2) \qquad g^*(R^q f_*) \xrightarrow{\varphi^q} (R^q f'_*) g'^* \quad .$$

En effet, cela revient au même que de donner

$$(4.2\ \text{adj}) \qquad (R^q f_*) \longrightarrow g_*(R^q f'_*) g'^* \quad ,$$

et on a des morphismes "évidents"

$$(R^q f_*) \xrightarrow{a} (R^q f_*) g'_* g'^* \xrightarrow{b} R^q{}'fg')_* g'^* =$$

$$= (R^q (gf')_* g'^* \xrightarrow{c} g^*(R^q f'_*) g'^* \quad .$$

Remarque 4.3. Supposons que g(donc g') soit une immersion fermée. Alors les morphismes b et c ci-dessus sont des isomorphismes (VIII 5.7). Il suit que (4.2) n'est autre essentiellement que le morphisme a ci-dessus, qui est défini en appliquant $R^q f_*$ au morphisme canonique $F \longrightarrow g'_* g'^* F$ .

Proposition 4.4. (Composition des morphismes de changement de base).

(i) Soit

$$\begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{g'} & X' & \xleftarrow{h'} & X'' \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f''} \\ S & \xleftarrow{g} & S' & \xleftarrow{h} & S'' \end{array}$$

(*) Mr. DELIGNE a résolu par l'affirmative cette perplexité, dans un contexte sensiblement plus général, cf. Exp. XVII.

un diagramme cartésien de morphismes de schémas. Alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} (gh)^*f_* & & \xrightarrow{\quad gh \quad} & & f''_*(g'h')^* \\ \downarrow\wr & & & & \downarrow\wr \\ h^*g^*f_* & \xrightarrow{h^*{}_*g} & h^*f'_*g'^* & \xrightarrow{h\ {}_*g'^*} & f''_*h'^*g'^* \end{array}$$

et le diagramme avec $f_*, f'_*f''_*$ remplacé par $R^qf_*, R^qf'_*, R^qf''_*$ l'est aussi, dans les domaines de définition naturels des foncteurs en question (cf. n° 3).

(ii) Soit

$$\begin{array}{ccc} Y & \xleftarrow{g''} & Y' \\ {\scriptstyle e}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle e'} \\ X & \xleftarrow{g'} & X' \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ S & \xleftarrow{g} & S' \end{array}$$

un diagramme cartésien de morphismes de schémas. Alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} g^*(fe)_* & & \longrightarrow & & (f'e')_*g''^* \\ \| & & & & \| \\ g^*f_*e_* & \longrightarrow & f'_*g'^*e_* & \longrightarrow & f'_*e'_*g''^* \end{array} ,$$

où les trois flèches horizontales proviennent des homomorphismes de changement de base pour fe, f et e respectivement.

Dans le cas abélien, les morphismes de changement de base pour fe sont induits par un morphisme de suites spectrales

$$E_2^{p,q} = g^*(R^q f_*)(R^q e_*)F \Longrightarrow g^* R^{p+q}(fe)_* F$$
$$\varphi \downarrow \qquad\qquad \varphi \downarrow$$
$$(R^p f'_*)(R^q e'_*)g''^*F \Longrightarrow R^{p+q}(f'e')_* g'^*F$$

qui, pour les termes initiaux, est induit par les morphismes de changement de base pour e et f ; et pour un faisceau de groupes, on a un morphisme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & g^*(R^1 f_*)e_*F & \longrightarrow & g^* R^1(fe)_* F & \longrightarrow & g^* f_*(R^1 e_*)F \\ & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ 0 & \longrightarrow & (R^1 f'_*)e'_* g''^*F) & \longrightarrow & R^1(f'e')_* g''^*F & \longrightarrow & f'_*(R^1 e'_*)g''^*F \end{array}$$

Nous laissons la démonstration au lecteur.

5. Enoncé du théorème principal et de quelques variantes.

Le théorème est le suivant :

Théorème 5.1. (Théorème de changement de base pour un morphisme propre). Soit

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{g'} & X' \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ S & \xleftarrow{g} & S' \end{array}$$

un diagramme cartésien de schémas, avec f propre.

(i) Soit F un faisceau d'ensembles sur X. Alors le morphisme (4.1)

$$\varphi : g^* f_* F \longrightarrow f'_* g'^* F$$

est bijectif.

(ii) Soit f un faisceau de groupes (resp. de groupes ind-finis) sur X. Alors le morphisme (4.2)

$$\varphi^1 \quad : \quad g^*(R^1 f_*)F \longrightarrow (R^1 f'_*)g'^*F$$

est injectif (resp. bijectif).

(iii) Soit F un faisceau abélien de torsion sur X. Alors le morphisme (4.2)

$$\varphi^q \quad : \quad g^*(R^q f_*)F \longrightarrow (R^q f'_*)g'^*F$$

est bijectif pour chaque $q \geq 0$.

On va d'abord énoncer des conséquences immédiates du théorème. Si $S' = \xi$ est un point géométrique de S, de sorte qu'un faisceau sur $\xi$ est déterminé par ses sections globales, on a $H^o(\xi, R^q f'_* G) = H^q(X', G)$ pour chaque faisceau G sur X, d'où le corollaire suivant (qui est d'ailleurs essentiellement équivalent à (5.1)) :

Corollaire 5.2. Soient $f : X \longrightarrow S$ propre, $\xi \longrightarrow S$ un point géométrique, et $X_\xi$ la fibre de f au point $\xi$ .

(i) Si F est un faisceau d'ensembles sur X, le morphisme canonique de changement de base

$$(f_* F)_\xi \longrightarrow H^o(X_\xi, F|X_\xi)$$

est bijectif.

(ii) Si F est un faisceau de groupes (resp. de groupes ind-finis) le morphisme de changement de base

$$R^1 f_*(F)_\xi \longrightarrow H^1(X_\xi, F|X_\xi)$$

est injectif (resp. bijectif).

(iii) Si F est un faisceau abélien de torsion, alors pour chaque $q \geq 0$ le morphisme de changement de base

$$(R^q f_*)F_{\bar{\xi}} \longrightarrow H^q(X_{\bar{\xi}}, F|X_{\bar{\xi}})$$

est bijectif.

Tenant compte de (X 4.3) et (X 5.2), on trouve :

Corollaire 5.3. Sous les conditions de (5.2), soit n la dimension de la fibre $X_{\bar{\xi}}$. Alors pour chaque faisceau abélien de torsion F sur X, la fibre $(R^q f_* F)_{\bar{\xi}}$ est nulle pour $q > 2n$. Si F est un faisceau de p-torsion (p la caractéristique de $\xi$), alors la fibre de $R^q f_*(F)$ en $\xi$ est nulle pour $q > n$.

Rappelons qu'on dit que la dimension relative de X/S est $\leq n$ si la dimension de chaque fibre est $\leq n$ . On a donc

Corollaire 5.3 bis. Soit $f : X \longrightarrow S$ propre et X/S de dimension relative $\leq n$. Alors $R^q f_* F = 0$ si $q > 2n$ pour chaque faisceau abélien F de torsion sur X. Si S est de caractéristique p, et si F est un faisceau abélien de p-torsion, alors $R^q f_* F = 0$ si $q > n$ .

En appliquant (5.1) a un morphisme de spectres de corps séparablement clos, on obtient

Corollaire 5.4. (Invariance de la cohomologie par changement de corps de base dans le cas propre). Soient $k \subset K$ des corps séparablement clos et X un schéma propre sur Spec k. Soit $X' = X_K$ . Soit F un faisceau sur X et F' le faisceau image inverse sur X'. Alors

(i) $$H^0(X,F) \xrightarrow{\sim} H^0(X',F') .$$

(ii) Si F est un faisceau de groupes (resp. de groupes ind-finis)

$$H^1(X,F) \xrightarrow{\sim} H^1(X',F')$$

est injectif (resp. bijectif).

(iii) Si F est un faisceau abélien de torsion,

$$H^q(X,F) \xrightarrow{\sim} H^q(X',F')$$

pour tout q.

Une variante légèrement différente de (5.2) est la suivante :

Corollaire 5.5. Soit S le spectre d'un anneau hensélien et soit $S' = s_o$ le point fermé. Soit $f : X \longrightarrow S$ propre. Posons $X_o = X'$, $F_o = g'^*F$. Alors on a :

(i) $H^o(X,F) \xrightarrow{\sim} H^o(X_o,F_o)$

pour tout faisceau d'ensembles F.

(ii) $H^1(X,F) \longrightarrow H^1(X_o,F_o)$

est injectif (resp. bijectif) pour tout faisceau de groupes (resp. de groupes ind-finis) F.

(iii) $H^q(X,F) \xrightarrow{\sim} H^q(X_o,F_o)$

pour tout faisceau abélien de torsion F, et tout q .

En effet, cet énoncé n'est qu'un cas particulier de (5.2) si S est strictement local. Supposons que (5.2) soit connu. Soit $\overline{S}$ le localisé strict de S, $\overline{s}$ le point fermé de $\overline{S}$, et G le groupe de Galois de $\overline{S}/S$ (qui est aussi le groupe de Galois de $\overline{s}/s_o$). Alors G opère sur les fibres des $R^q$, et on a (avec des notations évidentes)

$$H^o(X,F) \simeq H^o(\overline{X},\overline{F})^G$$

$$H^o(X_o,F_o) \simeq H^o(\overline{X}_o,\overline{F}_o)^G$$

pour un faisceau d'ensembles F, d'où (i) puisque $H^0(\overline{X},\overline{F}) \xrightarrow{\sim} H^0(\overline{X}_o,\overline{F}_o)$ et que l'isomorphisme commute évidemment avec l'opération de G.

Si F est un faisceau de groupes, on définit aisément un morphisme de suites exactes d'ensembles pointés

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^1(G,H^0(\overline{X},\overline{F})) & \longrightarrow & H^1(X,F) & \longrightarrow & H^1(\overline{X},\overline{F})^G \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H^1(G,H^0(\overline{X}_o,\overline{F}_o)) & \longrightarrow & H^1(X_o,F_o) & \longrightarrow & H^1(\overline{X}_o,\overline{F}_o) \end{array} \qquad (5.5.1)$$

où les flèches verticales extrêmes sont des isomorphismes d'après (5.2). Soient $\alpha$ , $\beta \in H^1(X,F)$ des classes qui ont même image dans $H^0(X_o,F_o)$, et soit $F^\alpha$ le faisceau obtenu en tordant F à l'aide de $\alpha$ [1]. Soit $\beta'$ la classe $H^1(X,F^\alpha)$ correspondant à $\beta$. Alors, puisque la classe $\alpha'$ correspondant à $\alpha$ est nulle, l'image de $\beta'$ dans $H^1(X_o,(F^\alpha)_o)$ est nulle.

Examinons le diagramme déduit de (5.5.1) en remplaçant F par $F^\alpha$ : on trouve que l'image de $\beta'$ dans $H^0(\overline{X},\overline{F}^\alpha)^G$ est nulle, donc que $\beta'$ est image d'un élément de $H^1(G,H^0(\overline{X},\overline{F}))$, et que cet élément doit être nul. Donc $\beta'$ est nul, i.e. $\beta' = \alpha'$ , d'où $\beta = \alpha$ . Cela donne l'injectivité du morphisme de (ii).

Supposons maintenant que F soit un faisceau de groupes ind-finis, et démontrons la surjectivité de la flèche (ii). Or il suffit de démontrer que le foncteur $F \longmapsto H^1(X_o,F_o)$ est effaçable. En effet, soit $0 \longrightarrow F \xrightarrow{u} G$ une injection qui efface ce foncteur. Soit $C = G/F$ . On a un morphisme de suites exactes (4.4)

$$\begin{array}{ccccc} H^0(X,C) & \longrightarrow & H^1(X,F) & \longrightarrow & H^1(X,G) \\ \downarrow & & \varepsilon \downarrow & & \downarrow \\ H^0(X_o,C_o) & \longrightarrow & H^1(X_o,F_o) & \xrightarrow{u^1_o} & H^1(X_o,G_o) \end{array}$$

où le morphisme $u^1_o$ est nul, ce qui implique bien la surjectivité de $\varepsilon$ .

Démontrons que le foncteur $F \longmapsto H^1(X_o, F_o)$ est effaçable pour les faisceaux F de groupes ind-finis. Soit $F \xrightarrow{u} C$ la "résolution de Godement" (3.4). On a

$$H^1(G, H^o(\overline{X}_o, \overline{C}_o)) \simeq H^1(G, H^o(\overline{X}, \overline{C})) \subset H^1(X, C) = 0 \quad .$$

De plus, on a le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^1(\overline{X}, \overline{F}) & \xrightarrow{\sim} & H^1(\overline{X}_o, \overline{F}_o) \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 = H^1(\overline{X}, \overline{C}) & \longrightarrow & H^1(\overline{X}_o, \overline{C}_o) \end{array}$$

(puisque $H^1(\overline{X}, \overline{G}) = \varinjlim H^1(X', C) = 0$ , $X'/X$ étale), donc est nul. On a donc un morphisme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^1(G, H^o(\overline{X}_o, \overline{F}_o) & \longrightarrow & H^1(X_o, F_o) & \longrightarrow & H^1(\overline{X}_o, \overline{F}_o)^G \\ & & \downarrow & & \downarrow \beta & & \downarrow \alpha^G \\ & & 0 & \longrightarrow & H^1(X_o, G_o) & \longrightarrow & H^1(\overline{X}_o, \overline{G}_o)^G \end{array}$$

où $\alpha^G$ est nul, ce qui implique que $\beta$ est également nul, d'où l'effaçabilité.

Démontrons enfin l'assertion (iii) de (5.5) : On a un morphisme de suites spectrales

$$\begin{array}{ccc} E_2^{p,q} = H^p(G, H^q(\overline{X}, \overline{F}) & \Longrightarrow & H^n(X, F) \\ \downarrow & & \downarrow \varphi \\ H^p(G, H^q, \overline{X}_o, \overline{F}_o)) & \Longrightarrow & H^n(\overline{X}_o, \overline{F}_o) \end{array} \quad .$$

D'après (5.2), les morphismes $H^q(\overline{X}, \overline{F}) \longrightarrow H^q(\overline{X}_o, \overline{F}_o)$ sont des isomorphismes. Cela implique que $\varphi$ est un isomorphisme pour $E_2^{p,q}$ , donc pour les aboutissements, d'où le résultat, cqfd.

5.6. Examinons (5.5) (i) et (ii) dans le cas où F est constant : Soit $F = S_X$ un faisceau d'ensembles constant sur le schéma X, de valeur T. Alors F(X) n'est autre que l'ensemble des applications localement constantes de X dans T. Si $X_o$ est un sous-schéma de X, et si T a au moins deux éléments, on en conclut que $F(X) \longrightarrow F(X_o)$ est bijectif si et seulement si l'application $U \mapsto U_o = U \cap X_o$ de l'ensemble $\theta(X)$ des parties à la fois ouvertes et fermées de X dans l'ensemble analogue $\theta(X_o)$ est bijective. Si l'ensemble $\pi_o(X_o)$ des composantes connexes de $X_o$ est fini, cela revient au même que de dire que l'application $\pi_o(X_o) \longrightarrow \pi_o(X)$ est bijective. Ainsi, (5.5) (i) peut aussi se reformuler de la façon suivante (compte tenu que dans ce cas $X_o$ est de type fini sur un corps, donc est noethérien, donc $\pi_o(X_o)$ est fini) :

Corollaire 5.7. Soient S le spectre d'un anneau hensélien, $s_o$ son point fermé. Soit $f : X \longrightarrow S$ un morphisme propre et $X_o$ la fibre fermée de X/S. Alors l'application $\pi_o(X) \longrightarrow \pi_o(X_o)$ induite par $X_o \longrightarrow X$ est bijective.

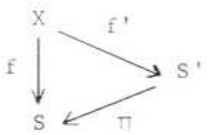
(En particulier, cela implique que l'ensemble $\pi_o(X)$ est fini). Nous alons démontrer directement (5.7) dans le cas noethérien :

Lemme 5.8. L'énoncé (5.7) est vrai si S est noethérien (*).

Démonstration. Dans le cas noethérien, $\pi_o(X)$ est certainement fini, et en remplaçant X par une composante connexe on peut supposer que $\pi_o(X)$ est un ensemble à un élément, c'est-à-dire que X est connexe et non-vide. Il faut démontrer qu'alors $X_o$ est également connexe et non-vide. Or l'image de X dans S est fermée puisque f est propre et non-vide car X est non-vide, donc contient $S_o$, ce qui explique que $X_o$ est non-vide. Soit

---

(*) Cf. EGA IV 18.5.19.




la factorisation de Stein de f (EGA III 4.3.3) de sorte que S'/S est fini et S' est connexe. On sait que chaque fibre de f' est connexe non-vide, et l'espace sous-jacent à $X_o$ est la réunion des espaces sous-jacents aux fibres fermées de S'. Tout revient donc à démontrer que S' est le spectre d'un anneau local. Mais puisque S est hensélien, l'anneau A' de S' est produit d'anneaux locaux (VII 4.1 (i)), donc A' est local puisque S' est connexe, ce qui prouve 5.8.

5.9.0. Supposons maintenant que $F = G_X$ est un faisceau constant de groupes, de valeur G, où G est un groupe fini. Alors $H^1(X, G_X)$ classifie les revêtements principaux galoisiens de X, de groupe G (VII 2.1)). Le corollaire 5.5 (ii) dit que le morphisme $X_o \longrightarrow X$ induit une bijection entre les ensembles de classes de ces revêtements. Il s'ensuit donc, de la définition des $\pi_1$, que 5.5 (ii) pour les faisceaux de groupes finis constants (en présence de (i) équivaut à :

Théorème 5.9. (Théorème de spécialisation pour le groupe fondamental). Avec les notations de (5.5), supposons X connexe non-vide. Alors $X_o$ est connexe non-vide, et si $\overline{x}_o$ est un point géométrique de $X_o$, le morphisme de groupes fondamentaux

$$\pi_1(X_o, \overline{x}_o) \longrightarrow \pi_1(X, \overline{x}_o)$$

est bijectif.

D'autre part, d'après la théorie de Galois (SGA V) l'énoncé 5.9 (dans le cas $X_o$ connexe, ce qu'on peut supposer, grâce à 5.7) équivaut à

Théorème 5.9 bis. Soient S le spectre d'un anneau hensélien, $s_o$ le point fermé de S, $f : X \longrightarrow S$ un morphisme propre, et $X_o$ la fibre fermée de X/S. Pour un schéma Z, notons Et(Z) la catégorie des revêtements étales de Z. Alors le foncteur restriction

$$Et(X) \longrightarrow Et(X_o)$$

est une équivalence de catégories.

Remarque 5.10. Rappelons que 5.9 a été déjà démontré (SGA 1 X 2.1) dans le cas où S est le spectre d'un anneau local noethérien complet. Malheureusement on n'arrive pas à utiliser ce résultat pour prouver 5.9 en général (*), et la démonstration donnée de 5.9, dans le présent exposé et le suivant, est très différente de celle donnée dans SGA 1 X.

5.11. On peut donner une autre variante "non commutative" de (5.5) (ii), en utilisant la théorie de la 2-cohomologie de J. GIRAUD (cf. Thèse de J. GIRAUD, en préparation). Supposons S noethérien. Prenons un lien L sur X, et supposons que L se réalise localement (pour la topologie étale) par un faisceau en groupes ind-finis. Considérons l'application

$$\varphi^{(2)} : H^2(X,L) \longrightarrow H^2(X_o,L_o) \quad ,$$

où $L_o$ est la restriction de L à $X_o$. Alors on a

$$(\varphi^{(2)})^{-1} (H^2(X_o,L_o)') = H^2(X,L)' \quad , \tag{5.11.1}$$

(*) La situation a changé depuis ces lignes ont été écrites, cf. th. 3.1 dans M. Artin, Algebraic approximation of structures over complete local rings (à paraître).

où les "primes" désignent les parties formées des éléments neutres.

Compte tenu de 5.5 (iii), cet énoncé équivaut aussi au suivant :

Pour toute gerbe $\mathcal{G}$ sur X, de lien L comme ci-dessus, désignant par $\mathcal{G}_o$ la restriction de $\mathcal{G}$ à $X_o$, le foncteur restriction sur les catégories de sections

$$\mathcal{G}(X) \longrightarrow \mathcal{G}_o(X_o)$$

est une équivalence de catégories.

Le fait que ce foncteur soit pleinement fidèle résulte en effet de 5.5 (i), et le fait qu'il soit essentiellement surjectif lorsque $\mathcal{G}(X) \neq \emptyset$ i.e. lorsque la classe $\xi \in H^2(X,\mathcal{G})$ de $\mathcal{G}$ est neutre, résulte de 5.5 (ii). Il reste donc à exprimer que $\mathcal{G}_o(X_o) \neq \emptyset$ implique $\mathcal{G}(X) \neq \emptyset$ , ce qui n'est autre que (5.11.1).

Nous ne donnerons pas ici la démonstration de (5.11.1), et nous nous contenterons de signaler que pour tout schéma noethérien X et tout sous-schéma fermé, on peut montrer en fait que la validité des énoncés 5.5 (i) (ii) implique celle de (5.11.1) ; la démonstration se fait assez élémentairement, en utilisant le résultat de descente VIII 9.4 a).

## 6. Premières réductions.

Nous utilisons l'abréviation (f,F,g) pour désigner les données de 5.1 dans l'un quelconque des trois cas (i), (ii) ou (iii) de ce théorème.

Lemme 6.1. Pour que 5.1 soit vrai pour les données (f,F,g), où f,F sont fixés, et g queldonque, il suffit que pour tout S-schéma $\overline{S}$, localisé strict d'un schéma

localement de type fini S' sur S en un point qui est fermé dans sa fibre, le théorème soit vrai pour $(\overline{f},\overline{F},\overline{g})$, où $\overline{f},\overline{F}$ sont déduits de f,F par le changement de base $\overline{S} \longrightarrow S$, et où $\overline{g} : \overline{s} \longrightarrow \overline{S}$ est l'inclusion du point fermé de $\overline{S}$ .

Démonstration. On peut supposer évidemment S,S' affines, spectres d'anneaux A,A' . Alors A' est la limite inductive de ses sous-A-algèbres de type fini $A'_i$ , et utilisant la théorie de passage à la limite (VII 5.11 et 5.14), on est ramené à prouver 5.1 pour les $(f,F,g_i)$ où $g_i : \mathrm{Spec}(A'_i) = S'_i \longrightarrow S$, ce qui nous ramène au cas où g est de type fini. Pour prouver que les homomorphisme de changement de base sont des isomorphismes, il suffit de prouver qu'ils induisent des isomorphismes sur les fibres des faisceaux en jeu, et il suffit de regarder les fibres géométriques en des points s' de S' qui sont fermés dans leur fibre sur S (VIII 3.13). Soit $\overline{s}'$ un point géométrique de S' correspondant à une clôture séparable de k(s') ; comme s' est algébrique sur le point corespondant s de S, $k(\overline{s}')$ est donc aussi une clôture séparable de k(s). Désignons par $\overline{s}$ le préschéma $\overline{s}'$, considéré comme étant au-dessus de S, i.e. considéré comme point géométrique de S, et considérons les localisés stricts $\overline{S}$ et $\overline{S}'$ de S en $\overline{s}$ et en $\overline{s}'$ respectivement, de sorte qu'on a un carré commutatif.

$$\begin{array}{ccc} \overline{s}' & \longrightarrow & \overline{s} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{S}' & \longrightarrow & \overline{S} \end{array} ,$$

où la première flèche horizontale est un isomorphisme. Compte tenu de VIII 5.2 et 5.3, l'homomorphisme induit sur les fibres en $\overline{s}'$ par l'homomorphisme de changement de base relatif à (f,F,g) s'identifie à l'homomorphisme

$$H^i(\overline{X},\overline{F}) \longrightarrow H^i(\overline{X}',\overline{F}')$$

induit par $\overline{X}' \longrightarrow \overline{X}$, où $\overline{X}$ et $\overline{X}'$ désignent les schémas déduits de X par les changements de base $\overline{S} \longrightarrow S$ et $\overline{S}' \longrightarrow S$. Or le carré commutatif ci-dessus fournit de façon évidente un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^i(\overline{X}_{\overline{s}}, \overline{F}) & \longrightarrow & H^i(\overline{X}'_{\overline{s}}, , \overline{F}') \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^i(\overline{X},\overline{F}) & \longrightarrow & H^i(\overline{X}',\overline{F}') \end{array} ,$$

où la première flèche horizontale est encore un isomorphisme, donc la deuxièn flèche horizontale est un isomorphisme dès que les deux flèches verticales le sont. Or c'est ce qu'assure l'hypothèse de (6.1), cqfd.

6.1.1 Ainsi, pour prouver 5.1 dans une situation (F,f,-), on est ramené à étudier le cas particulier 5.5, avec S strictement local. Cela nous amène à étudier de façon générale la situation où on a un morphisme h : Y $\longrightarrow$ X de schémas, et où on se propose de donner les conditions générales moyennant lesquelles les homomorphismes correspondants

$$H^i(X,F) \longrightarrow H^i(Y,h^*(F))$$

sont bijectifs. Le présent numéro donnera quelques résultats auxiliaires faciles sur cette situation, que (pour la commodité de références ultérieures) nous énoncerons avec plus de généralité et de précision qu'il ne serait nécessaire pour la démonstration de 5.1.

Lemme 6.2. Soient C,C' deux catégories abéliennes, $T^\cdot = (T^i)$ et $T'^\cdot = (T'^i)$ deux foncteurs cohomologiques de C dans C', $\varphi = (\varphi^i)$ un homomorphisme de

foncteurs cohomologiques de $T'$ dans $T''$. On suppose $T'$ et $T''$ nuls en degrés $< 0$, et $T^i$ effaçable pour $i > 0$. Soit $n$ un entier. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $\varphi^i$ est un isomorphisme pour $i \leq n$, un monomorphisme pour $i = n + 1$.

b) (Si $n \geq -1$). L'homomorphisme $\varphi^i$ est un monomorphisme si $i = 0$, et un épimorphisme si $i \leq n$.

c) (Si $n \geq 0$). L'homomorphisme $\varphi^0$ est un isomorphisme, et les $T'^i$ sont effaçables pour $0 < i \leq n$.

Si ces conditions sont remplies, et si $A \in Ob(C)$, alors $\varphi^{n+1}(A) : T^{n+1}(A) \longrightarrow T'^{n+1}(A)$ est un épimorphisme (donc un isomorphisme) si et seulement si $T'^{n+1}(A)$ est effaçable, i.e. s'il existe un monomorphisme $A \longrightarrow B$ tel que l'homomorphisme $T'^{n+1}(A) \longrightarrow T'^{n+1}(B)$ correspondant soit nul. Si $C' = (Ab)$ (catégorie des groupes abéliens), et si $\xi \in T'^{n+1}(A)$, alors $\xi$ est dans l'image de $T^{n+1}(A)$ si et seulement si $\xi$ est effaçable, i.e. s'il existe un monomorphisme $A \longrightarrow B$ tel que l'image de $\xi$ dans $T'^{n+1}(B)$ soit nulle.

Démonstration. Evidemment a) implique b) et c). Comme les hypothèses faites sur $T'$ impliquent que les $T^i$ ($i > 0$) sont les satellites droits de $T^0$, l'implication c) $\Longrightarrow$ b) résulte de la caractérisation axiomatique des foncteurs satellites ; elle résulte également, par récurrence sur $n$, de la dernière assertion de 6.2, qui se démontre par l'argument bien connu qu'on se dispense se répéter ici (cf. démonstration de 6." ci-dessous). L'implication b) $\Longrightarrow$ c) est triviale si $n = 1$, et si $n \geq 0$ on procède par récurrence sur $n$ : l'hypothèse de récurrence nous permet de supposer que $\varphi^i$ est un isomorphisme pour

$i \leq n-1$, un monomorphisme pour $i = n$, donc par l'hypothèse un isomorphisme aussi pour $i = n$, et il reste à montrer que c'est un monomorphisme pour $i = n+1$, utilisant que $\varphi^n$ est un isomorphisme. Soit $A \longrightarrow B$ un monomorphisme qui efface $T^{n+1}$, d'où une suite exacte $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ dans C, et un homomorphisme de suites exactes dans C' :

$$\begin{array}{ccccccc} T^n(B) & \longrightarrow & T^n(C) & \longrightarrow & R^{n+1}(A) & \longrightarrow & T^{n+1}(B) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ T'^n(B) & \longrightarrow & T'^n(C) & \longrightarrow & T'^{n+1}(A) & \longrightarrow & T'^{n+1}(B) \end{array} ,$$

où les deux premières flèches verticales sont des isomorphismes d'après ce qu'on vient de voir, et $T^{n+1}(A) \longrightarrow T^{n+1}(B)$ est nul par construction. Alors le lemme des cinq implique que $T^{n+1}(A) \longrightarrow T'^{n+1}(A)$ est un monomorphisme, cqfd.

Corollaire 6.3. Supposons que $T^\cdot$, $T'^\cdot$ proviennent de foncteurs cohomologiques (dénotés par les mêmes symboles) sur la catégorie dérivée droite [3] $D^+(C)$, à valeur dans C' ; on ne suppose pas nécessairement les $T^i (i > 0)$ effaçables. On suppose que $K^\cdot \in D^+(C)$, $H^i(K^\cdot) = 0$ pour $i < 0$ implique $T^i(K^\cdot) = T'^\cdot(K^\cdot) = 0$ pour $i < 0$. Soit $K^\cdot \in \mathrm{Ob}\, D^+(C)$ un complexe borné à gauche dans C tel que $H^i(K^\cdot) = 0$ pour $i < 0$.

(i) Si la condition a) de 6.2 est satisfaite, alors l'homomorphisme $\varphi^i(K^\cdot) = T^i(K^\cdot) \longrightarrow T'^i(K^\cdot)$ est un isomorphisme pour $i < n$, un monomorphisme pour $i = n+1$.

(ii) Soit de plus $L^\cdot \in \mathrm{Ob}\, D^+(C)$ tel que $H^i(L^\cdot) = 0$ pour $i < 0$, et soit $u : L^\cdot \longrightarrow K^\cdot$ un homomorphisme dans $D^+(C)$, induisant un homomorphisme injectif $H^0(u) : H^0(L^\cdot) \longrightarrow H^0(K^\cdot)$. Alors, pour que $T^{n+1}(L^\cdot) \longrightarrow T'^{n+1}(L^\cdot)$ soit

surjectif, il faut et il suffit que l'image de $T^{n+1}(L^{\cdot})$ dans $T^{n+1}(K^{\cdot})$ soit contenue dans celle de $T^{n+1}(K^{\cdot})$. Si $C' = (Ab)$, et si $\xi \in T'^{n+1}(A)$, alors $\xi$ est dans l'image de $T^{n+1}(A)$ si et seulement si son image dans $T'^{n+1}(K^{\cdot})$ est dans celle de $T^{n+1}(K^{\cdot})$ .

Rappelons que l'hypothèse que $T^{\cdot}$ et $T'^{\cdot}$ proviennent de foncteurs cohomologiques sur $D^{+}(C)$ peut s'expliciter en disant qu'ils proviennent de foncteurs cohomologiques sur la catégorie abélienne des complexes bornés à gauche de C, commutant aux translations des degrés, transformant des homomorphismes de complexes homotopes à zéro en des homomorphismes nuls de C', et transformant tout homomorphisme $u : K^{\cdot} \longrightarrow L^{\cdot}$ de complexes qui est un quasi-isomorphisme (i.e. qui induit des isomorphismes $H^{i}(K^{\cdot}) \longrightarrow H^{i}(L^{\cdot})$) en un isomorphisme de C'. Pratiquement, tous les foncteurs cohomologiques de C dans C' qu'on rencontre sont obtenus ainsi.

Démonstration de 6.3. Prouvons d'abord (i). L'assertion est évidente si $H^{i}(K^{\cdot}) = 0$ pour $i \leq n+1$, car alors d'après les propriétés de degrés imposées à $T^{\cdot}$ , $T'^{\cdot}$, on aura $T^{i}(K^{\cdot}) = T'^{i}(K^{\cdot}) = 0$ pour $i \leq n+1$. Soit d'autre part m un entier $\geq 0$ tel que $H^{i}(K^{\cdot}) = 0$ pour $i < m$ : il en existe, par exemple $m = 0$ fait l'affaire. Nous procédons par récurrence descendante sur m, l'assertion étant prouvée si $m = n+2$. Nous supposons donc l'assertion prouvée pour les $m' > m$, et la prouvons pour m. D'après l'hypothèse sur les degrés de $K^{\cdot}$, $K^{\cdot}$ est quasi-isomorphe à un complexe à degrés $\geq m$, donc on peut le supposer à degrés $\geq m$. Il s'ensuit une suite exacte de complexes

$$0 \longrightarrow H^{m}[-m] \longrightarrow K^{\cdot} \longrightarrow K'^{\cdot} \longrightarrow 0 \quad ,$$

où $H^{m} = H^{m}(K^{\cdot})$, où le signe $[-m]$ indique translation de $-m$ sur les degrés d'un

complexe, et où $K'^{\cdot}$ est défini comme conoyau. Donc les objets de cohomologie de $K'^{\cdot}$ sont ceux de $K^{\cdot}$ en degrés $\geq m+1$, et nuls en degrés $\leq m+1$ ; en particulier, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à $K'^{\cdot}$ . La suite exacte précédente donne lieu à un homomorphisme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} T^{i-1}(K'^{\cdot}) & \longrightarrow & T^{i-m}(H^m) & \longrightarrow & T^{i}(K^{\cdot}) & \longrightarrow & T^{i}(K'^{\cdot}) & \longrightarrow & T^{i+1-m}(H^m) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ T'^{i-1}(K'^{\cdot}) & \longrightarrow & T'^{i-m}(H^m) & \longrightarrow & T'^{i}(K^{\cdot}) & \longrightarrow & T'^{i}(K'^{\cdot}) & \longrightarrow & T'^{i+1-m}(H^m) \end{array} .$$

Faisant alors $i \leq n$ dans le diagramme précédent, et tenant compte de l'hypothèse de récurrence et de $m \geq 0$, on trouve que les flèches verticales autours de la flèche verticale médiane sont des isomorphismes et a fortiori des épimorphismes, et que la flèche verticale de droite est un monomorphisme, donc par le lemme des cinq la flèche verticale médiane est un épimorphisme. Faisant $i \leq n+1$, on trouve de même que les flèches verticales autour de la médiane sont des monomorphismes, la flèche verticale de gauche étant un isomorphisme et a fortiori un épimorphisme, d'où on conclut par le lemme des cinq que la flèche verticale médiane est un monomorphisme, ce qui établit 6.3 (i).

Pour établir la deuxième assertion 6.3 (ii), on utilise de même la suite exacte

$$0 \longrightarrow L^{\cdot} \longrightarrow K^{\cdot} \longrightarrow K'^{\cdot} \longrightarrow 0 \quad ,$$

où $K'^{\cdot}$ est défini comme le mapping-cylinders de $L^{\cdot} \longrightarrow K^{\cdot}$ , donc est encore à cohomologie à degrés positifs. La "chasse au diagramme" habituelle dans

$$\begin{array}{ccccccccc} T^{n}(K^{\cdot}) & \longrightarrow & T^{n}(K'^{\cdot}) & \longrightarrow & T^{n+1}(L^{\cdot}) & \longrightarrow & T^{n+1}(K^{\cdot}) & \longrightarrow & T^{n+1}(K'^{\cdot}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ T'^{n}(K^{\cdot}) & \longrightarrow & T'^{n}(K'^{\cdot}) & \longrightarrow & T'^{n+1}(L^{\cdot}) & \longrightarrow & T'^{n+1}(K^{\cdot}) & \longrightarrow & T'^{n+1}(K'^{\cdot}) \end{array}$$

donne alors la dernière assertion de 6.3, compte tenu du fait que (en vertu de la première partie déjà démontrée) les deux premières flèches verticales sont des isomorphismes, les deux dernières des monomorphismes. Cela achève la démonstration de 6.3.

Lemme 6.4. Le théorème (5.1) est vrai si f est fini.

Cela résulte aussitôt en effet de VIII 5.5 et 5.8.

Proposition 6.5. Soit $h : Y \longrightarrow X$ un morphisme de schémas quasi-compacts et quasi-séparés. Dans (i) ci-dessous, I désigne un ensemble donné ayant au moins deux points, dans (ii) et (iii), $\mathbb{L}$ désigne une partie non-vide de l'ensemble $\mathbb{P}$ des nombres premiers, et dans (iii) n désigne un entier.

(i) Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Pour tout faisceau d'ensembles F sur X, l'application canonique

$$H^0(X,F) \longrightarrow H^0(Y,h^*(F))$$

est injective (resp. bijective).

b) Pour tout morphisme fini $X' \longrightarrow X$, désignant par $h^0 : Y' \longrightarrow X'$ le morphisme déduit de h par le changement de base $X' \longrightarrow X$, l'application canonique

$$H^0(X',I_{X'}) \longrightarrow H^0(Y',I_{Y'})$$

déduite de h' est injective (resp. bijective).

b') Avec les notations de b), l'application $U \longmapsto h'^{-1}(U)$ de l'ensemble des parties de Y' à la fois ouvertes et fermées dans l'ensemble des parties de X' à la fois ouvertes et fermées est injective (resp. bijective).

b") (Si X localement noethérien). Avec les notations de b), l'application induite sur les ensembles de composantes connexes

$$\pi_o(h') : \pi_o(X') \longrightarrow \pi_o(Y')$$

est surjective (resp. bijective), ou encore : si X' est non-vide (resp. connexe non-vide) il en est de même de Y' .

De plus, si ces conditions sont satisfaites, alors pour tout faisceau en groupes F sur X, le foncteur $P \longmapsto h^*(P)$ de la catégorie des torseurs (=fibrés principaux homogènes) sous F dans la catégorie des torseurs sous $h^*(F)$ est fidèle (resp. pleinement fidèle), et a fortiori, dans le cas respé, l'application canonique

$$H^1(X,F) \longrightarrow H^1(Y,h^*(F))$$

est injective. Enfin, sous les mêmes hypothèses, le foncteur $X' \longmapsto Y' = X' \times_X Y$ de la catégorie des revêtements étales de X dans la catégorie des revêtements étales de Y est fidèle (resp. pleinement fidèle).

(ii) Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Pour tout faisceau F de groupes ind-$\mathbb{L}$-finis sur X, l'application canonique

$$H^1(X,F) \longrightarrow H^1(Y,h^*(F))$$

est bijective pour i = 0,1.

b) Pour tout morphisme fini $X' \longrightarrow X$, désignant par $h' : Y' \longrightarrow X'$ le morphisme déduit de h par changement de base, et pour tout $\mathbb{L}$-groupe fini ordinaire G, l'application canonique

$$H^1(X',G_{X'}) \longrightarrow H^1(Y',G_{X'})$$

est bijective pour i = 0,1 .

b') (Si $\mathbb{L} = \mathbb{P}$). Avec les notations de b), le foncteur image inverse par h' induit une équivalence de la catégorie des revêtements étales de X' avec la catégorie des revêtements étales de Y'.

b") (Si X noethérien, $\mathbb{L} = \mathbb{P}$). Avec les notations de b), si X' est non-vide, il en est de même de Y', et si y' est un point géométrique de Y', x' son image dans X', l'application canonique

$$\pi_i(Y',y') \longrightarrow \pi_i(X',x') \quad , \quad \text{pour } i = 0,1 \quad ,$$

est bijective.

(iii) Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Pour tout faisceau F de $\mathbb{L}$-torsion sur X, l'homomorphisme

$$H^i(X,F) \longrightarrow H^i(Y,h^*(F))$$

est un isomorphisme si $i \leq n$, un monomorphisme si $i = n+1$.

a') (Si $n \geq -1$). Pour tout F comme ci-dessus, l'homomorphisme envisagé est injectif si $i = 0$, et surjectif si $i \leq n$.

b) (Si $n \geq -1$). Pour tout morphisme fini $X' \longrightarrow X$, désignant par $h' : Y' \longrightarrow X'$ le morphisme déduit de h par changement de base $X' \longrightarrow X$, et pour tout $\ell \in \mathbb{L}$, $\nu > 0$, l'homomorphisme canonique

$$H^i(X',(\mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z}_{X'}) \longrightarrow H^i(Y', \mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z})_{Y'})$$

est injectif pour $i = 0$, surjectif pour $i \leq n$.

De plus, on a le complément suivant à l'énoncé précédent :

Corollaire 6.6. (i) Supposons la condition non respée 6.5 (i) a) satisfaite, soit F un faisceau d'ensembles sur X, et soit $\xi \in H^0(Y,h^*(F))$. Supposons

qu'il existe un monomorphisme de faisceaux d'ensembles $F \longrightarrow G$ tel que l'image de $\xi$ dans $H^0(Y,h^*(G))$ soit dans l'image de $H^0(X,G)$. Alors $\xi$ est dans l'image de $H^0(X,F)$.

(ii) Supposons la condition 6.5 (i) a) respée satisfaite, soit F un faisceau de groupes sur X, et soit $\xi \in H^1(Y,h^*(F))$. Supposons qu'il existe un monomorphisme de faisceaux de groupes $F \longrightarrow G$ tel que l'image de $\xi$ dans $H^1(Y,h^*(G))$ soit dans l'image de $H^1(X,G)$, alors $\xi$ est dans l'image de $H^1(X,F)$.

(iii) Supposons la condition 6.5 (iii) a) satisfaite (pour une valeur donnée n), soit F un faisceau de $\mathbb{L}$-torsion sur X et soit $\xi \in H^{n+1}(Y,h^*(F))$. Supposons qu'il existe un monomorphisme $F \longrightarrow G$ de faisceaux de $\mathbb{L}$-torsion, tel que l'image de $\xi$ dans $H^{n+1}(Y,h^*(G))$ soit dans l'image de $H^{n+1}(X,G)$, alors $\xi$ est dans l'image de $H^{n+1}(X,F)$.

Démonstration de 6.5 et 6.6. Prouvons d'abord 6.6. Le cas de 6.6 (iii) est un cas particulier de la dernière assertion dans 6.3, appliqué au cas où C est la catégorie des faisceaux abéliens de $\mathbb{L}$-torsion sur X, C' est la catégorie (Ab), et $T^i(F) = H^i(X,F)$, $T'^i(F) = H^i(Y,g^*(F))$ (noter que $T'^{\cdot}$ est bien un foncteur cohomologique en F, grâce au fait que le foncteur $h^{\cdot}$ est exact). Bien entendu, ici la considération des complexes comme dans 6.3 est inutile (elle nous sera commode plus loin (6.8)) et nous utilisons uniquement la dernière assertion de 6.3.

Pour prouver (i), considérons la somme amalgamée $H = G \amalg_F G$, limite inductive, dans la catégorie des faisceaux d'ensembles sur X, du diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & G \\ F & \nearrow & \\ & \searrow & \\ & & G \end{array}$$

Les propriétés d'exactitude habituelles du topos des faisceaux d'ensembles montrent, comme $F \longrightarrow G$ est un monomorphisme, que l'on a un diagramme exact de faisceaux d'ensembles sur X

$$F \longrightarrow G \rightrightarrows H$$

(ce que l'on peut exprimer en disant que dans un topos, tout monomorphisme est effectif, et prouver en se ramenant comme d'habitude à la catégorie des ensembles). Comme les foncteurs $H^0$ et $h^*$ sont exacts à gauche, on en conclut un homomorphisme de diagrammes exacts d'ensembles

$$\begin{array}{ccccc} H^0(X,F) & \longrightarrow & H^0(X,G) & \rightrightarrows & H^0(X,H) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^0(Y,h^*(F)) & \longrightarrow & H^0(Y,h^*(G)) & \rightrightarrows & H^0(Y,h^*(H)) \end{array} ,$$

où les flèches verticales sont injectives. Une "chasse de diagramme" immédiate prouve alors l'assertion 6.6 (i).

Pour prouver 6.6 (ii), nous allons d'abord prouver la deuxième assertion de 6.5 (i), savoir que moyennant la condition a) de 6.5 (i), pour tout faisceau de groupes F sur X, le foncteur $P \longmapsto h^*(P)$, de la catégorie des torseurs sous F dans la catégorie des torseurs sous $h^*(F)$, est fidèle (resp. pleinement fidèle), donc, dans le cas respé, induit une injection sur les $H^1$. Pour ceci, si P et P' sont deux torseurs sous F, désignons par $\underline{\mathrm{Isom}}_F(P,P')$ le faisceau des F-isomorphismes de P sur P'. Il est immédiat que la formation de ce faisceau commute à toute extension de la base, en particulier à l'extension de la base par h . (C'est là une assertion valable pour tout morphisme de sites). Utilisant l'hypothèse sur l'effet de $h^*$ sur les $H^0$ pour le faisceau $\underline{\mathrm{Isom}}_F(P,P')$, on trouve que l'application $\mathrm{Isom}_F(P,P') \longrightarrow \mathrm{Isom}_F(h^*(P),h^*(P'))$ est injective (resp. bijective), ce qui signifie que le foncteur $P \longmapsto h^*(P)$

est fidèle (resp. pleinement fidèle). (NB dans la catégorie des torseurs sous un faisceau en groupes, tout homomorphisme est un isomorphisme). Notons d'autre part, que si F est un sous-faisceau en groupes d'un faisceau en groupes G, alors la donnée d'un torseur P sous F revient à la donnée d'un torseur sous G (savoir celui déduit de P par extension $F \longrightarrow G$ du Groupe structural), muni d'une section de Q/F (qui s'interprète en effet comme une "restriction du Groupe structural" de G à F). Ceci posé, avec les notations de 6.6 (ii), comme l'image de $\eta$ de $\xi$ dans $H^1(Y,h^*(G))$ provient d'un élément de $H^1(X,G)$, ce dernier est défini par un torseur Q sous G, de sorte que $\eta$ est la classe du torseur $h^*(Q)$ sous $h^*(G)$. Le fait que $\eta$ provient d'un $\xi \in H^1(Y,h^*(F))$ s'explicite alors en disant que $\xi$ est la classe du $h^*(F)$-torseur défini par $h^*(Q)$ et une section convenable de $h^*(Q)/h^*(F)$. Comme le foncteur $h^*$ est exact à droite, ce dernier faisceau n'est autre que $h^*(Q/F)$, et comme $h^*$ induit une bijection sur les $H^0$ des faisceaux d'ensembles, il s'ensuit que la section envisagée de $h^*(Q)/h^*(F)$ provient d'une section de Q/F. Cette dernière définit alors un F-torseur par restriction du groupe structural, et la classe de ce torseur dans $H^1(X,F)$ a évidemment $\xi$ comme image dans $H^1(Y,h\xi(F))$. Cela prouve 6.6 (ii) et achève la démonstration de 6

Prouvons maintenant 6.5, en commençant par 6.5 (iii). Evidemment a) implique a'), et l'implication inverse est un cas particulier de 6.2 (appliqué encore au cas où C est la catégorie des faisceaux de $\mathbb{L}$-torsion sur X, et C' la catégorie des faisceaux de groupes abéliens), pourvu qu'on prouve l'effçabilité dans C des foncteurs $H^i(X,F)$ pour $i > 0$ . Cela n'offre en effet pas de difficulté, mais nous pouvons aussi nous dispenser de prouver ce résultat

en notant que F est limite inductive filtrante de ses sous-faisceaux $F_i$ pour lesquels il existe un entier $n > 0$ annulant $F_i$ (IX 1.1). Alors $h^*(F)$ est limite inductive des $h^*(F_i)$, et compte tenu de la commutation de la cohomologie à la limite inductive (VII 3.3), résultant des hypothèses de quasi-compacité et de quasi-séparation faites sur X et Y (qui n'avaient pas servi pour 6.6), on se ramène à prouver la condition a) pour les $F_i$, ce qui nous ramène au cas où il existe un entier $m > 0$ tel que $mF = 0$. On peut évidemment supposer que les diviseurs premiers de m sont $\in \mathbb{L}$, et on peut alors prendre pour C la catégorie des faisceaux de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-Modules sur X. Or on sait que dans cette catégorie, les foncteurs $H^i(X, -)$ pour $i \geq 1$ sont effaçables ( ). Cela montre l'équivalence des conditions a) et a') de 6.5 (iii). D'autre part, appliquant a) à l'image directe d'un faisceau de $\mathbb{L}$-torsion F' sur X', X' fini sur X, qui est de $\mathbb{L}$-torsion grâce à IX 1.2 (v), 1.6 (iii), et utilisant 6.4 et VIII 5.5, on trouve que l'homomorphisme

$$H^i(X',F') \longrightarrow H^i(Y',h'^*(F'))$$

est un isomorphisme pour $i \leq n$, un monomorphisme pour $i = n+1$, d'où a fortiori la condition b). Reste à prouver que cette condition implique a'). Pour ceci, utilisons le fait (IX 2.7.2) que tout faisceau de $\mathbb{L}$-torsion F sur X est limite inductive filtrante de faisceaux de $\mathbb{L}$-torsion constructibles ; alors l'argument de passage à la limite déjà utilisé montre que dans a'), on peut se limiter au cas où F est constructible. En vertu de IX 2.14 il existe alors un nombre fini de morphismes finis $p_i : X'_i \longrightarrow X$, de faisceaux constants de $\mathbb{L}$-torsion $G_{X'_i}$ sur les $X'_i$, et un homomorphisme injectif

$$F \longrightarrow \prod_i p_{i*}(G_i\ X_i')$$

Ceci dit, si n = -1, i.e. lorsque la conclusion voulue se réduit à l'assertion d'injectivité pour $H^o(X,F) \longrightarrow H^o(Y,h^*(F))$, on voit aussitôt qu'on peut dans cette question remplacer F par un faisceau G tel qu'il existe un monomorphisme $F \longrightarrow G$, et par suite on peut remplacer F par le produit des $p_{i*}(G_i\ X_i')$. Compte tenu de 6.4, on est donc ramené à prouver l'assertion d'injectivité en remplaçant $h : Y \longrightarrow X$ par $h' : Y' \longrightarrow X'$, et F par un faisceau constant sur X' de valeur un groupe fini de $\mathbb{L}$-torsion ordinaire G. Or G est isomorphe à une somme de groupes de la forme $\mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z}$, avec $\ell \in \mathbb{L}$. On est donc bien réduit à vérifier b). Lorsque $n \geq 0$, on procède de façon analogue. Par récurrence sur n, on peut supposer la conclusion voulue (et par suite a)) prouvée pour l'entier n-1 au lieu de n. Utilisant alors 6.6 (iii), on voit qu'on peut encore remplacer F par un faisceau G tel qu'il existe un monomorphisme $F \longrightarrow G$, et on prendra encore pour G le faisceau $p_*(G_{X'})$. Compte tenu de 6.4 et de la nullité des $R^i p_*$ ($i \geq 1$) pour un morphisme fini (VIII 5.5), cela nous ramène encore à prouver la surjectivité pour $H^n$ en remplaçant $h : Y \longrightarrow X$ par un $h' : Y' \longrightarrow X'$, et F par un faisceau constant sur X' de valeur un groupe fini de $\mathbb{L}$-torsion ordinaire. Comme l'injectivité est déjà acquise grâce à l'hypothèse de récurrence et l'implication a') $\Longrightarrow$ a), on est encore ramené, par dévissage sur G, au cas où G est de la forme $\mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z}$, c'est-à-dire au cas envisagé dans la condition b) de 6.5 (iii). Cela prouve le cas (iii) de 6.5.

Les cas (i) et (ii) se démontrent exactement de la même façon, pour ce qui est de l'équivalence des conditions a) et b) dans 6.5 (i) resp. 6.5 (ii):

on utilise IX 2.7.2 et la commutation du $H^o$ et $H^1$ aux limites inductives filtrantes de faisceaux (VII 5.14) pour se ramener au cas où F est constructible, puis IX 2.14, 6.6 (i)(ii) et VIII 5.8 pour se ramener au cas particulier envisgé dans b). Par ailleurs, dans (i), l'équivalence des conditions b), b') et b") est triviale et n'est mise que pour mémoire, ainsi que le fait qu'elles impliquent la fidélité (resp. la pleine fidélité) du foncteur $X' \longmapsto Y'$ de la catégorie des revêtements étales de X dans la catégorie des revêtements étales de Y. Il en est de même de l'équivalence des conditions b), b') et b") dans 6.5 (ii), qui ont été ajoutées pour faire bon poids. La démonstration de 6.5 est ainsi achevée.

Remarque 6.7 (*). 1) Evidemment, les arguments démontrant 6.5 et 6.6 sont de nature très générale et essentiellement triviale et auraient intérêt à être dégagés en des lemmes abstraits de la même eau que 6.2 (les faisceaux $p_*(G_{X'})$ jouant le rôle de cogénérateurs de la catégorie C dans laquelle on travaille). On laisse ce plaisant exercice au lecteur, et nous nous bornons à signaler que le même énoncé essentiellement pourrait être donné en regardant des foncteurs tels que $R^i f_*$ au lieu des foncteurs $H^i$. Les mêmes remarques s'appliquent à 6.8, 6.11 ci-dessous.

2) Lorsque X est noethérien, alors les arguments donnés montrent que dans l'énoncé des conditions b) et leurs variantes dans 6.5 (i) (ii) (iii), on peut se borner à prendre X' intègre ; lorsque X est universellement japonais, on peut même les prendre intègre et normaux ; c'est également possible sans

(*) Le rédacteur recommande d'omettre la lecture de ces remarques, ainsi que de (6.13), introduites subrepticement (en même temps que diverses autres modifications plus ou moins heureuses du texte original) par un collaborateur irrévérencieux.

la restriction japonaise sur X, à condition de prendre des morphismes $p : X' \longrightarrow X$ entiers au lieu de morphismes finis. Nous ne nous servirons d'aucune de ces variantes dans la suite du séminaire.

3) La démonstration de 6.6 n'utilise pas l'hypothèse de quasi-compacité et de quasi-séparation faite sur X, et il en est de même pour le fait que dans (i) (ii) (iii) la condition a) implique les autres, ainsi que pour l'équivalence des conditions b), b'), b") entre elles. Notons d'autre part que la forme b) des conditions 6.5 (i) montre que, pour $\mathbb{L} = \emptyset$, ce sont des cas particuliers (lorsque X est quasi-compact quasi-séparé) de 6.5 (iii), pour n = -1 resp. pour n = 0. Cela reste d'ailleurs vrai (en se bornant aux conditions sous la forme a)) sans la restriction énoncée sur X, comme on voit aisément grâce au fait que pour tout faisceau d'ensembles F, et tout nombre premier $\ell$, on peut trouver deux faisceaux abéliens de $\ell$-torsion G et H, et un homomorphisme $u : G \longrightarrow H$ des faisceaux d'ensembles sous-jacents, tels que F soit isomorphe à l'image inverse de la section nulle (on prendra pour F le $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ -Module libre engendré par F, et pour H le faisceau constant $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ sur X). Le même argument montre que (sans restriction de quasi-compacité et de quasi-séparation) 6.5 (ii) a) (où il suffit même de faire i = 0) implique la condition respée 6.5(i) a) ; cela permet par suite, compte tenu que cette dernière implique déjà l'injectivité de $H^1(X,F) \longrightarrow H^1(Y,h^*(F))$ pour tout faisceau en groupes F sur X, de se borner dans l'énoncé de 6.5 (ii) a) d'exiger pour i = 1 la surjectivité de $H^1(X,F) \longrightarrow H^1(Y,h^*(F))$. Malheureusement, le cas 6.5 (ii) ne peut être envisagé comme cas particulier de 6.5 (iii), ce qui nous oblige souvent de répéter dans le cas non commutatif un argument déjà fait pour l'essentiel dans le cas commutatif. Notons également que, sauf 6.10, les résultats qui suivent sont énoncés de sorte qu'ils sont valables

sans hypothèse de quasi-compacité et de quasi-séparation.

Proposition 6.8. (Lemme de descente). Avec les notations générales de 6.5, supposons donné de plus un morphisme $p : \overline{X} \longrightarrow X$, désignons par $\overline{h} : \overline{Y} \longrightarrow \overline{X}$ le morphisme déduit de h par le changement de base p, et par $p_Y : \overline{Y} \longrightarrow Y$ le morphisme canonique. Nous supposons, ou bien que p est surjectif, ou bien que h est une immersion fermée et que $X = p(\overline{X}) \cup h(Y)$.

(i) Supposons que le morphisme $\overline{h} : \overline{Y} \longrightarrow \overline{X}$ satisfasse à la condition d'injectivité (resp. de bijectivité) de 6.5 (i) a). Dans le cas respé, supposons de plus que le morphisme de changement de base

$$(*) \qquad h^*(p_*(\overline{F})) \longrightarrow p_{Y_*}(\overline{h}^*(\overline{F}))$$

est injectif pour tout faisceau d'ensembles $\overline{F}$ sur $\overline{X}$. Alors le morphisme $h : X \longrightarrow Y$ satisfait également la condition d'injectivité (resp. de bijectivité) de 6.5 (i) a).

(ii) Supposons que $\overline{h} : \overline{Y} \longrightarrow \overline{X}$ satisfasse la condition de 6.5 (ii) a), et que pour tout faisceau de ind-$\mathbb{L}$-groupes $\overline{F}$ sur $\overline{X}$, le morphisme de changement de base (*) soit bijectif. Alors $h : Y \longrightarrow X$ satisfait également la condition de 6.5 (ii) a).

(iii) Supposons que $\overline{h} : \overline{Y} \longrightarrow \overline{X}$ satisfasse à la condition de 6.5 (iii) a), et que pour tout faisceau abélien $\overline{F}$ de $\mathbb{L}$-torsion sur $\overline{X}$, l'homomorphisme de changement de base

$$h^*(R^i p_*(\overline{F})) \longrightarrow R^i p_{Y_*}(\overline{h}^*(\overline{F}))$$

soit bijectif pour $i \leq n-1$, injectif pour $i = n$ (où n est un entier $\geq 1$ donné). Alors le morphisme $h : Y \longrightarrow X$ satisfait également à la condition de 6.5 (iii) a).

Démonstration de 6.8. Dans le cas où on ne suppose pas p surjectif, mais h une immersion fermée et $X = p(\overline{X}) \cup h(Y)$, nous considérons le schéma somme $\overline{X}'$ de $\overline{X}$ et Y, et le morphisme $p' : \overline{X}' \longrightarrow X$ déduit de p et h. Alors p' est surjectif, de plus on vérifie trivialement, dans chacun des trois cas envisagés (i) (ii) (iii), que les hypothèses faites sur le couple (h,p) sont encore satisfaites pour le couple (h,p'). Cela nous ramène donc au cas où p est surjectif, dans lequel nous allons nous placer dans la suite. Dans ce cas pour tout faisceau F sur X, l'homomorphisme canonique

$$F \longrightarrow p_*(p^*(F))$$

est injectif. Dans le cas (i), pour vérifier l'injectivité de $H^0(X,F) \longrightarrow H^0(Y,h^*(F))$, on est ramené aussitôt au cas où on remplace F par $p_*(\overline{F})$ (où on pose $\overline{F} = p^*(F)$). Or considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^0(X,p_*(\overline{F})) & \longrightarrow & H^0(Y,h^*(\overline{F})) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \\ & & H^0(Y,p_{Y*}(\overline{h}^*(\overline{F})) \\ & & \wr\downarrow \\ H^0(\overline{X},\overline{F}) & \longrightarrow & H^0(\overline{Y},\overline{h}^*(\overline{F})) \end{array} ,$$

où la flèche verticale gauche et la deuxième flèche verticale droite sont les isomorphismes canoniques, la première flèche verticale droite provenant de l'homomorphisme de changement de base par h. Par hypothèse la deuxième flèche horizontale est injective, ce qui implique aussitôt qu'il en est de même de la première, ce qui prouve l'assertion non respée de (i). Pour l'assertion respée, on suppose que la deuxième flèche horizontale est surjective, de plus l'homomorphisme de changement de base étant un monomorphisme par hypothèse, il en est de même de la première flèche verticale droite, donc du

composé des deux flèches verticales droites. Il s'ensuit aussitôt que la première flèche horizontale est également surjective, ce qui achève de prouver (i). Pour prouver (ii), grâce à ce qui précède et 6.5 (i) on est ramené à prouver la surjectivité pour $H^1(X,F) \longrightarrow H^1(Y,h^*(F))$. Utilisant 6.6 (ii) on est encore ramené à la prouver pour F de la forme $p_*(\overline{F})$, où $\overline{F}$ est un faisceau de ind-$\mathbb{L}$-groupes sur $\overline{X}$ (IX 1.6 (ii)). Ecrivant les suites exactes pour les $H^1$, (variantes de (3.2)) pour les morphismes p et $p_Y$, on trouve un homomorphisme de suites exactes non commutatives :

$$\begin{array}{ccccc} H^1(X,p_*(\overline{F})) & \longrightarrow & H^1(\overline{X},\overline{F}) & \longrightarrow & H^0(X,R^1p_*(\overline{F})) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^1(Y,p_{Y*}(\overline{h}^*(\overline{F})) & \longrightarrow & H^1(\overline{Y},\overline{h}^*(\overline{F})) & \longrightarrow & H^0(Y,R^1(p_{Y*}(\overline{h}^*(\overline{F})) \end{array} ,$$

où dans chaque ligne la première flèche est injective et identifie le premier terme à l'image inverse, par la deuxième flèche, du point marqué du troisième terme. Par hypothèse sur $\overline{h}$, la flèche verticale médiane est bijective. D'autre part, les deux flèches verticales extrêmes se factorisent respectivement par $H^1(Y,h^*(p_*(\overline{F}))$ et $H^0(Y,h^*(R^1(p_*(\overline{F}))$, en composant les homomorphismes $H^i(X,-) \longrightarrow H^1(Y,-)$ (pour i = 1 et i = 0 respectivement) et les homomorphismes déduits en appliquant $H^i(Y,-)$ (pour ces mêmes valeurs de i) à l'homomorphisme de changement de base $h^*(p_*(\overline{F})) \longrightarrow p_{Y*}(\overline{h}^*(\overline{F}))$ resp. $h^*(R^1p_*(\overline{F})) \longrightarrow R^1p_{Y*}(\overline{h}^*(\overline{F}))$. Comme la première de ces flèches est un isomorphisme par hypothèse, il s'ensuit que la première flèche verticale du diagramme ci-dessus s'identifie à l'homomorphisme $H^1(C,-) \longrightarrow H^1(Y,-)$ que nous voulons étudier. Pour prouver sa bijectivité, il reste donc à prouver que la dernière flèche verticale du diagramme est injective. Or d'après ce qu'on vient de dire, elle est composée de deux

applications, dont la première est un homomorphisme canonique $H^0(X,-) \longrightarrow H^0(Y,-)$, donc bijective, et la deuxième est injective, car déduite par le foncteur exact à gauche $H^0(Y,-)$ d'un homomorphisme $H^*(R^1(p_*(\overline{F})) \longrightarrow R^1p_*(\overline{h}^*(\overline{F}))$ qui est un monomorphisme. Ce dernier fait résulte en effet aisément de l'hypothèse de bijectivité faite pour l'homomorphisme de changement de base dans la dimension précédente 0, par exemple en utilisant la deuxième assertion de 6.5 (i) et le calcul habituel des fibres des images directes supérieures (VIII 5.3). Cela prouve 6.8 (ii).

Reste à prouver 6.8 (iii). Pour ceci, il nous sera plus commode, au lieu d'utiliser directement l'injection $F \longrightarrow p_*(p^*(F))$ comme ci-dessus, d'utiliser l'homomorphisme

$$F \longrightarrow Rp_*(\overline{F})$$

dans la catégorie dérivée droite $D^+(C)$, où C désigne la catégorie des faisceaux abéliens sur X. Rappelons que par définition, $Rp_*(\overline{F})$ est le complexe $p_*(C(\overline{F}))$, où $C(\overline{F})$ est un complexe résolution injective de $\overline{F}$ dans la catégorie des faisceaux abéliens sur $\overline{X}$. Si $K^\cdot$ est un complexe sur X, nous désignons par $H^i(X,K^\cdot)$ les groupes d'hypercohomologie de X à coefficients dans $K^\cdot$, et on utilise les notations analogues sur Y. En vertu de 6.3, on est ramené à prouver la surjectivité pour

$$(1) \qquad H^n(X,Rp_*(\overline{F})) \longrightarrow H^n(Y,h^*Rp_*(\overline{F})) \quad .$$

Or par hypothèse, l'homomorphisme de changement de base

$$(2) \qquad H^*(Rp_*(\overline{F})) \longrightarrow Rp_{Y*}(\overline{h}^*(\overline{F}))$$

induit un isomorphisme sur les faisceaux de cohomologie en degrés $\leq n-1$, et un monomorphisme en degrés n, ce qui peut s'exprimer en disant que le

"mapping-cylinder" $K^{\cdot}$ de l'homomorphisme précédent n'a des faisceaux de cohomologie non nuls qu'en degrés $\geq n$. Donc $H^i(Y,K^{\cdot}) = 0$ si $i < n$, ce qui implique, par la suite exacte de cohomologie, que les homomorphismes

(3) $$H^i(Y,h^*(Rp_*(\overline{F}))) \longrightarrow H^i(Y,Rp_{Y*}(\overline{h}^*(\overline{F}))) \quad ,$$

induits par l'homomorphisme ci-dessus, sont des isomorphismes pour $i \leq n-1$, un monomorphisme pour $i = n$. Considérons le composé de (1) et (3)

(4) $$H^n(X,Rp_*(\overline{F})) \longrightarrow H^n(Y,h^*(Rp_*(\overline{F}))) \longrightarrow H^n(Y,Rp_{Y*}(\overline{h}^*(\overline{F}))) \quad .$$

Les termes extrêmes sont respectivement isomorphes, en vertu des définitions, à $H^n(\overline{X},\overline{F})$ et $H^n(\overline{Y},\overline{h}^*(\overline{F}))$, et le composé de (4) n'est autre que l'homomorphisme déduit de $\overline{h}$, qui est bijectif grâce à l'hypothèse faite sur $\overline{h}$. Comme la deuxième flèche de (4) est injective d'après ce qu'on vient de voir, la première est également bijective, ce qui achève la démonstration de 6.8.

D'ailleurs, on constate aussitôt que la démonstration précédente fournit le résultat suivant, légèrement plus précis et plus général :

Corollaire 6.9. Les notations sont celles de 6.8. On suppose de plus satisfaite pour h la condition non respée de 6.5 (i) (resp. la condition respée de 6.5 (i), resp. la condition de 6.5 (iii), avec $n \geq -1$), et que pour tout faisceau d'ensembles $\overline{F}$ sur $\overline{X}$, l'homomorphisme de changement de base $h^*(p_*(\overline{F})) \longrightarrow p_{Y*}(\overline{h}^*(\overline{F}))$ est injectif (resp. bijectif, resp. que pour tout faisceau de $\mathbb{L}$-torsion $\overline{F}$ sur $\overline{X}$, l'homomorphisme de changement de base $h^*R^ip_*(\overline{F}) \longrightarrow R^ip_{Y*}(\overline{h}^*(\overline{F}))$ soit bijectif pour $i \leq n$, injectif pour $i = n+1$). Soit F un faisceau d'ensembles (resp. de ind-$\mathbb{L}$-groupes, resp. un faisceau de $\mathbb{L}$-torsion) sur X, et soit $\xi \in H^{n+1}(Y,h^*(F))$ (où on prend $n = -1$ dans le

cas (i), n = 0 dans le cas (ii)). Posons $\overline{F} = p^*(F)$. Alors, pour que $\xi$ soit dans l'image de $H^{n+1}(X,F)$, il faut et il suffit que son image inverse dans $H^{n+1}(\overline{Y},p_{Y*}(h^*(F))) = H^{n+1}(\overline{Y},\overline{h}^*(\overline{F}))$ soit dans l'image de $H^{n+1}(\overline{X},\overline{F})$.

Nous utiliserons cette forme précisée de 6.8 pour prouver le

Corollaire 6.10. Les notations sont celles de 6.5. On suppose, pour simplifier, vérifiée la condition non respée de 6.5 (i).

(i) Pour que la condition respée de 6.5 (i) soit satisfaite (resp. pour qu'on ait 6.5 (ii) a), resp. pour qu'on ait 6.5 (iii) a)), il faut et il suffit que la condition suivante soit satisfaite : Pour tout faisceau F d'ensembles (resp. de ind-$\mathbb{L}$-groupes, resp. de groupes abéliens de $\mathbb{L}$-torsion) sur X, tout $\xi \in H^0(Y,h^*(F))$ (resp. tout $\xi \in H^i(Y,h^*(F))$ avec i = 0,1 , resp. tout $\xi \in H^i(Y,h^*(F))$ avec $i \leq n$), et toute partie fermée non vide X' de X, désignant par Y' son image inverse dans Y, il existe un morphisme $p : \overline{X} \to X$ satisfaisant les conditions suivantes :

1°) L'image $p(\overline{X})$ est contenue dans X' et contient un ouvert non vide de X'.

2°) Pour tout faisceau d'ensembles $\overline{F}$ sur $\overline{X}$ (resp....) l'homomorphisme de changement de base $h^*(p_*(\overline{F})) \longrightarrow p_{Y*}(\overline{h}^*(\overline{F}))$ est un isomorphisme (resp. pour tout faisceau de ind-$\mathbb{L}$-groupes $\overline{F}$ sur X, l'homomorphisme de changement de base $h^*(R^ip_*(\overline{F})) \longrightarrow R^ip_{Y*}(\overline{h}^*(\overline{F}))$ pour i = 0,1 est bijectif, resp. pour tout faisceau abélien de $\mathbb{L}$-torsion $\overline{F}$ sur $\overline{X}$, l'homomorphisme de changement de base est bijectif pour $i \leq n$).

3°) L'image inverse de $\xi$ dans $H^i(\overline{Y},p_Y{}^*(h^*(F))) = H^i(\overline{Y},\overline{h}^*(p^*(F))$ est contenue dans l'image de $H^i(\overline{X},p^*(F))$.

(ii) Soit $n \geq -1$, et supposons que pour tout faisceau d'ensembles F (resp. tout faisceau de ind-$\mathbb{L}$-groupes, resp. tout faisceau abélien de $\mathbb{L}$-torsion) F sur X, l'homomorphisme $H^i(X,F) \longrightarrow H^i(Y,h^*(F))$ soit bijectif pour $i \leq n$, injectif pour $i = n+1$, (dans le premier cas, on suppose $n = 1$, dans le deuxième, $n = -1$ ou 0). Soit $\xi \in H^{n+1}(Y,h^*(F))$. Pour que $\xi$ soit dans l'image de $H^{n+1}(X,F)$, il faut et il suffit qu'il satisfasse à la condition énoncée dans (i) ci-dessus, avec $i = n+1$).

Démonstration de 6.10. Utilisant 6.5 et une récurrence immédiate sur n, on constate que 6.10 (i) est conséquence de 6.10 (ii), que nous allons maintenant démontrer.

Supposons que $\xi$ ne soit pas dans l'image de $H^n(X,F)$. Soit $\Phi$ l'ensemble des parties fermées X' de X telles que l'image $\xi$ dans $H^n(Y',h^*(F)|\ Y')$ ne soit pas contenue dans celle de $H^n(X',F|X')$. Par hypothèse, $X \in \Phi$, donc $\Phi$ n'est pas vide. Ordonnons $\Phi$ par la relation $\supset$, et montrons que $\Phi$ est inductif. Pour ceci, il suffit de prouver que si $(X'_\lambda)$ est une famille totalement ordonnée d'éléments de $\Phi$, et si X' est leur intersection, alors $X' \in \Phi$. Or, munissant les $X'_\lambda$ et X' de la structure induite réduite, on voit que les morphismes $X'_\lambda \longrightarrow X$ sont affines (puisque ce sont des immersions fermées), donc le système projectif des $X'_\lambda$ satisfait aux conditions envisagées dans VII 5. De plus, on constate aussitôt que X' est la limite projective des $X'_\lambda$. De même, Y' est la limite projective du système projectif des $Y'_\lambda$, qui sont affines sur Y. Utilisant VII 5.8, on trouve donc

$$\varinjlim H^n(X'_\lambda, F|X'_\lambda) \xrightarrow{\sim} H^n(X',F|X'), \quad \varinjlim H^n(Y'_\lambda, h^*(F)|\ Y'_\lambda) \xrightarrow{\sim} H^n(Y',h^*(F)|Y').$$

De ceci, on conclut aussitôt que si on avait $(\xi|Y') \in \operatorname{Im} H^n(X',F|X')$, alors

il existerait un indice $\lambda$ tel que $(\xi|Y'_\lambda) \in \mathrm{Im}\, H^n(X'_\lambda, F|X'_\lambda)$, ce qui est absurde ; donc on a bien $X' \in \Phi$ . Donc $\Phi$ est inductif, et contient par suite un élément minimal, soit X'. Comme évidemment $\emptyset \notin \Phi$, X' est non-vide. Appliquons à $\xi$ et à X' l'hypothèse de 6.10, d'où un morphisme $p : \overline{X} \longrightarrow X$ satisfaisant aux conditions 1°) à 3°) énoncées dans 6.10. Notons qu'on peut supposer même p surjectif. En effet, soit U un ouvert non vide de X' contenu dans $p(\overline{X})$, et soit $X'_1$ son complémentaire dans X', de sorte que par construction on a $X'_1 \notin \Phi$. Utilisant cette relation, on voit tout de suite que, posant $\overline{X}_1 = \overline{X} \amalg X'_1$ et désignant par $\overline{p}_1 : \overline{X}_1 \longrightarrow X$ le morphisme défini par $\overline{p}$ et l'inclusion de $X'_1$ dans X, le morphisme $\overline{p}_1$ satisfait encore aux mêmes hypothèses que $\overline{p}$ ; de plus, il est surjectif. Nous supposons donc p surjectif, et appliquons maintenant 6.9, en y remplaçant le morphisme $h : Y \longrightarrow X$ par le morphisme $h' : Y' \longrightarrow X'$ (X' étant muni, disons, de la structure induite réduite), et $\xi$ par $\xi|Y'$. On conclut alors de 6.9 que l'on a $(\xi|Y') \in \mathrm{Im}\, H^n(X', F|X')$, ce qui contredit la relation $X' \in \Phi$ et achève la démonstration de 6.10.

Nous utiliserons 6.10 pour ramener 5.5 au cas où f est un morphisme projectif ; mais pour ceci, dans le cas non noethérien, nous aurons besoin d'une variante non noethérienne du lemme de Chow, qui sera donnée au numéro suivant.

Proposition 6.11. (Lemme de transitivité). Les notations sont celles de 6.8, mais on ne fait aucune hypothèse de surjectivité relativement à p. On suppose que h satisfait à la condition (i) a) (resp. (ii) a), resp. (iii) a) de 6.5. On suppose de plus, dans le cas (i), que pour tout faisceau d'ensembles $\overline{F}$ sur $\overline{X}$ , l'homomorphisme de changement de base de 6.8 est un monomorphisme (resp. un isomorphisme) ; dans le cas (ii), que $\overline{X}$ est noethérien et que pour tout faisceau $\overline{F}$ de ind- $\mathbb{L}$-groupes, l'homomorphisme de changement de base

$h^*(R^1p_*(\overline{F})) \longrightarrow R^1p_{Y*}(\overline{h}^*(\overline{F}))$ est bijectif pour i = 0,1 ; enfin, dans le cas (iii), que l'homomorphisme de changement de base est bijectif pour $i \leq n$, injectif pour $i = n+1$. Alors le morphisme $\overline{h} : \overline{Y} \longrightarrow \overline{X}$ satisfait également à la condition (i) (resp. (ii), resp. (iii)) de 6.5.

Démonstration de 6.11. Dans le cas (i), on considére le diagramme commutatif de la démonstration de 6.8 (i). Ici les hypothèses impliquent que la première flèche horizontale et la première flèche verticale de droite sont injectives (resp. bijectives), donc il en est de même de la deuxième flèche horizontale, ce qu'on voulait établir. Dans le cas (ii), on se donne un faisceau $\overline{F}$ de ind-$\mathbb{L}$-groupes sur $\overline{X}$, et il faut montrer que tout élément de $H^1(\overline{Y},\overline{h}^*(\overline{F}))$ provient d'un élément de $H^1(\overline{X},\overline{F})$. En vertu de 6.6 (ii) appliqué à $\overline{h}$, il suffit de trouver un monomorphisme $\overline{F} \longrightarrow \overline{G}$ de faisceaux en groupes sur $\overline{X}$ qui efface $H^1(\overline{Y},\overline{h}^*(\overline{F}))$. Or considérons la deuxième ligne du diagramme utilisé dans la démonstration de 6.8 (ii). Il suffit successivement de trouver un monomorphisme $\overline{F} \longrightarrow \overline{G}$, avec $\overline{G}$ un faisceau en groupes in-$\mathbb{L}$-finis, qui efface le dernier terme $H^0(Y,R^1 p_{Y*}(\overline{h}^*(\overline{F}))$, puis un monomorphisme de faisceaux en groupes $\overline{G} \longrightarrow \overline{H}$ qui efface $H^1(Y,p_{Y*}(\overline{h}^*(\overline{F}))$. Or, comme on a remarqué dans la démonstration de 6.8 (i), les deux termes qu'il s'agit d'effacer sont isomorphes respectivement, par les flèches verticales extrêmes du diagramme envisagé, à $H^0(X,R^1p_*(\overline{F}))$ et à $H^1(X,p_*(\overline{F}))$, compte tenu de l'hypothèse sur les homomorphismes de changement de base faites ici sur p,h. D'ailleurs, les isomorphismes envisagés sont évidemment fonctoriels en $\overline{F}$, de sorte qu'il suffit d'effacer les deux termes précédents. Or en vertu de 3.3 on peut effacer $R^1p_*(\overline{F})$ (et à fortiori $H^0(X,R^1p_*(\overline{F}))$ par un monomorphisme de $\overline{F}$ dans un ind-$\mathbb{L}$-groupe $\underline{G}$. Il reste à effacer $H^1(X,p_*(\overline{F}))$, ce qui est possible grâce au fait que par

le diagramme envisagé, ce dernier terme s'envoie dans $H^1(\overline{X},\overline{F})$ par un monomorphisme fonctoriel en $\overline{F}$, et que $H^1(\overline{X},\overline{F})$ est encore effaçable grâce à 3.3.

Il reste à traiter le cas (iii), et pour celui-ci encore nous reprenons à rebours la démonstration de 6.8 (*). Il faut prouver que l'homomorphisme

$$H^i(\overline{X},\overline{F}) \longrightarrow H^i(\overline{Y},\overline{h}^*(\overline{F}))$$

est un isomorphisme pour $i \leq n$, et un monomorphisme pour $i = n+1$. Or les homomorphismes précédents sont induits par un homomorphisme de complexes

$$\mathbb{R}\,\Gamma_{\overline{X}}(\overline{F}) \longrightarrow \mathbb{R}\,\Gamma_{\overline{Y}}(\overline{h}^*(\overline{F}))\ ,$$

déduit d'une résolution injective $C(\overline{F})$ et d'un homomorphisme de $\overline{h}^*(C(\overline{F}))$ (qui est une résolution de $h^*(\overline{F})$) dans une résolution injective de $\overline{h}^*(\overline{F})$. L'homomorphisme ci-dessus s'identifie également à l'homomorphisme composé

$$\mathbb{R}\,\Gamma_X(Rp_*(\overline{F})) \longrightarrow \mathbb{R}\,\Gamma_Y(h^*(Rp_*(\overline{F})) \longrightarrow \mathbb{R}\,\Gamma_Y(Rp_{Y*}(\overline{h}^*(\overline{F}))\ ,$$

où le premier homomorphisme est l'homomorphisme $h^*$ relatif à $\mathbb{R}p_*(\overline{F})$, et le deuxième est déduit des homomorphismes de changement de base $h^*(\mathbb{R}p_*(\overline{F})) \longrightarrow \mathbb{R}p_{Y*}(\overline{h}^*(\overline{F}))$ en appliquant $\mathbb{R}\,\Gamma_Y$. Le premier homomorphisme induit donc un isomorphisme sur les groupes de cohomologie des complexes envisagés, en vertu de l'hypothèse faite sur h et de 6.3 (i). Il en est de même pour le deuxième, en vertu de l'hypothèse que nous avons faite sur les homomorphismes de changement de base, en utilisant l'argument donné dans la démonstration de 6.8 (iii). Par suite, la même conclusion s'applique au composé des deux, ce qui achève de prouver 6.11.

(*) On pourrait aussi, au lieu de 6.3, utiliser la suite spectrale de Leray pour $p$ , $p_Y$ .

Remarque 6.12. L'argument donné pour 6.11 dans les cas (i) et (iii) donne encore un résultat plus précis : pour pouvoir conclure, pour un faisceau $\overline{F}$ donné sur $\overline{X}$, que $H^i(\overline{X},\overline{F}) \longrightarrow H^i(\overline{Y},\overline{h}^*(\overline{F}))$ est bijectif pour $i \leq n$, injectif pour $i = n+1$, il suffit de supposer

1°) l'homomorphisme de changement de base $h^*(R^i p_*(\overline{F})) \longrightarrow R^i p_{Y*}(\overline{h}^*(\overline{F}))$ est un isomorphisme pour $i \leq n$, un monomorphisme pour $i = n+1$, et

2°) pour tout couple d'entiers $i,j \geq 0$, l'homomorphisme $H^i(X,\mathbb{R}^j p_*(\overline{F})) \longrightarrow H^i(Y,h^*(\mathbb{R}^j p_*(\overline{F}))$ induit par h est un isomorphisme si $i+j \leq n$, un monomorphisme si $i+j = n+1$.

Il est plausible qu'on a un résultat analogue dans le cas (ii), mais son énoncé devrait nécessairement faire intervenir de la 2-cohomologie non commutative. C'est pour éviter le recours à cette théorie que nous avons utilisé un argument différent dans 6.10 (ii), utilisant les propriétés d'effaçabilité du $H^1$ non commutatif, argument qui ne donne pas en revanche de résultat, comme ci-dessus, pour un $\overline{F}$ fixé.

Remarques 6.13. Le cas le plus important où les conditions de 6.5 (i) (ii) (iii) sont remplies est celui envisagé dans 5.5, qui sera prouvé dans l'exposé suivant en utilisant les réductions faites dans le présent exposé. Un autre cas intéressant (où h n'est plus une immersion fermée comme dans 5.5 sera étudié dans XV. Signalons également le cas, assez voisin de 5.5, où X est le spectre d'un anneau noethérien, séparé et complet pour la topologie définie par un idéal J, et où Y = Spec (A/J) est le sous-schéma fermé de X défini par J. On vérifie alors directement les conditions de 6.5 (ii) (avec $\mathbb{L} = \mathbb{P}$) sous la

forme b") (EGA IV 18.3.2) ; il est très plausible que les conditions de 6.5 (iii) sont également vérifiées pour tout n , i.e. que pour tout faisceau de torsion F sur X, les homomorphismes $H^n(X,F) \longrightarrow H^n(Y,F|Y)$ soient bijectifs. On peut faire des conjectures considérablement plus générales, liées à une généralisation à des schémas non locaux de la construction de hensélisation. Tout d'abord, notons qu'on ne connait pas d'exmeple, h étant une immersion fermée, où les conditions de 6.5 (ii) (iii) ne soient satisfaites (avec $\mathbb{L} = \mathbb{P}$) lorsque la condition respée de 6.5 (i) l'est, c'est-à-dire lorsque le couple (X,Y) est un couple hensélien dans la terminologie de (EGA IV 18.5.5) ; on peut donc conjecturer qu'un tel couple satisfait aux conditions de 6.5 (ii) (iii) (avec $\mathbb{L} = \mathbb{P}$, tout n). D'autre part, on peut se demander sous quelles conditions la propriété suivante pour un couple (X,Y) d'un schéma X quasi-complet et quasi-séparé et d'un sous-schéma fermé Y implique que le couple est hensélien :

(*) Pour tout schéma X' étale sur X, posant $Y' = X' \times_X Y$ , l'application canonique $\Gamma(Y'/Y) \longrightarrow \Gamma(X'/X)$ est bijective.

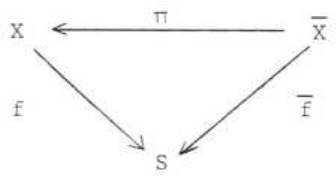
(Cf. EGA IV 18.5.4 b)). Cette condition est évidemment plus faible à priori que la condition hensélienne 6.5 (i) ; elle est même strictement plus faible, car elle est vérifiée par exemple si X est un schéma projectif normal irréductible de dimension $\geq 2$ sur un corps k, et Y une section hyperplane de X (comme il résulte facilement de SGA 2 XII 2.1, où on fait S = Spec(k)), mais évidemment le couple (X,Y) n'est pas hensélien. Il est possible par contre que si X est affine, la condition (*) implique que (X,Y) est un couple hensélien ; s'il en était ainsi, pour tout schéma affine X et tout partie fermée Y de X,

un procédé de localisation étale le long de Y, analogue à celui de la hensélisation des anneaux locaux, devrait permettre de lui associer un couple hensélien (X',Y), où X' est "proétale" sur X. Une autre hypothèse sur (X,Y) (suggérée par des résultats de Hironaka et Rossi sur la contractibilité de certaines sous-variétés de variétés algébriques), qui permettrait peut-être de déduire la propriété hensélienne de la propriété plus faible (*), est la suivante : l'immersion $Y \longrightarrow X$ est régulière de codimension 1, et le faisceau conormal $\underline{N}_{Y/X} = \underline{J}/\underline{J}^2$ (où $\underline{J}$ est l'idéal qui définit Y dans X) est un faisceau inversible ample sur Y. (NB. Dans le cas du contre-exemple envisagé plus haut, ce faisceau conormal était un contraire anti-ample, i.e. son inverse étant ample).

7. Une variante du Lemme de Chow (*).

Nous aurons besoin de la variante suivante de (EGA II 5.6.1) débarrassée de toutes hypothèses noethérienne ou d'irréductibilité.

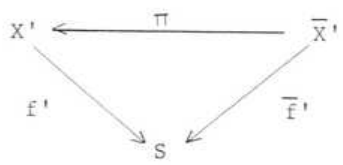
Lemme 7.1. Soit S un schéma quasi-compact et quasi-séparé, et $f : X \longrightarrow S$ un morphisme séparé de type fini, avec X non vide. Il existe un diagramme commutatif




(*) Le lecteur qui ne s'intéresse aux énoncés du par.5 que dans le cas noethérien peut omettre la lecture du présent numéro.

avec $\pi$ projectif et $\overline{f}$ quasi-projectif, et un ouvert non-vide U de X, tels que $\pi$ induise un isomorphisme de $\overline{U} = U \times_X \overline{X} = \pi^{-1}(U)$ sur U.

Démonstration. Notons d'abord : Soit $i : X' \longrightarrow X$ un sous-schéma fermé de X/S et $V \subset X'$ un sous-schéma ouvert dans X et dense dans X'. Si le lemme est vrai pour X', il l'est pour X. En effet, soit




un diagramme comme dans l'énoncé, et $U' \neq \emptyset$ un ouvert de X' tel que $\pi'$ indui un isomorphisme $\overline{U}' = \pi'^{-1}(U') \longrightarrow U'$. Puisque V est dense dans X', $U' \cap V \neq$ et on peut donc remplacer U' par cet ouvert. Alors U' est un ouvert de X, et on pose $\pi = i\,\pi'$, $\overline{f} = \overline{f}'$, $U = U'$.

Or il existe un recouvrement fini de X par des ouverts affines non vides $U_k$ , k=1,...,n ; de l'hypothèse sur S résulte que chaque $U_k \longrightarrow S$ est quasi-affine, et a fortiori quasi-compact. Démontrons le théorème pour tout X par récurrence sur n : Si l'intersection U des $U_k$ est dense dans X on peut copier la démonstration de (EGA II 5.6, B, C, D), tenant compte des modifications de la notation. Si l'intersection est non-vide, on se ramène au cas où elle est dense en remplaçant X par l'adhérence X' de U (cf. plus haut), et $U_k$ par $U'_k = U_k \cap X'$. Supposons enfin que U soit vide et choisissons r, $1 \leq r \leq n$, tel que $V = \bigcap_{k=1}^{n} U_k \neq \emptyset$ mais $V \cap U_{r+1} = \emptyset$ - c'est évidemment possible puisque $U_1 \neq \emptyset$ . Nous pouvons maintenant remplacer X par l'adhérence X' de V et les U par les $U_k \cap V$ non-vides. Comme alors $U_{r+1} \cap V$ est vide, on obtient le résultat par l'hypothèse de récurrence.

8. Réductions définitives

Lemme 8.1. Pour prouver l'un des énoncés 5.1 (i) (ii) (iii), il suffit de le faire lorsque l'on suppose f projectif et S noethérien.

Supposons d'abord 5.1 démontré pour f projectif, montrons comment on en conclut le même énoncé pour tout f. Utilisant 6.1, on est réduit au cas de 5.5, avec S strictement local. Appliquons maintenant 6.10 en faisant $Y = X_o$. Etant donné $(\xi, X')$ comme énoncé dans 6.10, nous appliquons le lemme de Chow 7.1 pour trouver un S-morphisme $p : \overline{X} \longrightarrow X'$, avec $\overline{X}$ projectif sur S, tel que $p(\overline{X})$ contienne un ouvert non vide de X' (condition 1°) de 6.10). Comme p est projectif, par hypothèse les homomorphismes de changement de base pour (p,h) sont des isomorphismes (condition 2°) de 6.10). Enfin, comme X est projectif sur S, par hypothèse le morphisme d'inclusion $\overline{Y} = \overline{X}_o \longrightarrow \overline{X}$ induit un isomorphisme pour les groupes de cohomologie $H^i(\overline{X},\overline{F}) \longrightarrow H^i(\overline{X}_o, \overline{h}^*(\overline{F}))$, (condition 3°) de 6.10). Donc les conditions de 6.10 sont bien satisfaites, d'où la conclusion.

Montrons maintenant que pour vérifier l'un des trois énoncés 5.1 pour toute situation (f,F,g), avec f projectif, on peut supposer de plus que S est noethérien. Pour ceci, on note qu'on peut supposer grâce à 6.1 que S est strictement local et que $S' \longrightarrow S$ est l'inclusion du point fermé, et on est ramené à vérifier l'énoncé 5.5 avec S strictement local. De plus, comme X se plonge dans le schéma projectif-type $\underline{P}^r_S$, on peut (grâce à la compatibilité 4.4 (ii)) remplacer X par $\underline{P}^r_S$, F par son image dans $\underline{P}^r_S$, ce qui nous ramène au cas où $X = \underline{P}^r_S$. Notons que A est limite inductive filtrante de

sous-anneaux locaux henséliens noethériens $A_i$ tels que l'homomorphisme d'inclusion $A_i \longrightarrow A$ soit local : prendre les hensélisés stricts des sous-$\underline{Z}$-algèbres de type fini de A en les idéaux premiers induits par l'idéal maximal de A. Sous ces conditions, le corps résiduel k de A est également la limite inductive des corps k des $A_i$ (EGA IV 5.13.1). Soient $S = \mathrm{Spec}\,(A_i)$, $X_i = \underline{P}^r_{S_i}$, et supposons donné un système inductif $(F_i)$ de faisceaux d'ensembles (resp. ...) sur les $X_i$ comme dans VII 5.7, et soit F le faisceau qu'il définit sur X. Soit $F_{i\,o}$ (resp. $F_o$) le faisceau induit par $F_i$ sur la fibre $X_{io}$ du point fermé $s_i$ de $S_i$ (resp. sur la fibre $X_o$ du point fermé s de S). Alors on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \varinjlim_i H^n(X_i,F_i) & \longrightarrow & H^n(X,F) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \varinjlim_i H^n(X_{io},F_{io}) & \longrightarrow & H^n(X_o,F_o) \end{array} ,$$

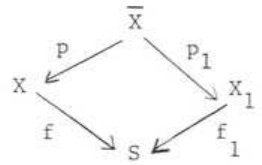
dont les deux flèches horizontales sont des isomorphismes, en vertu de VII 5.7. Par suite, pour prouver que la deuxième flèche verticale est un isomorphe, il suffit de le prouver pour la première, donc il suffit de prouver que les homomorphismes $H^n(X_i,F_i) \longrightarrow H^n(X_{io},F_{io})$ sont des isomorphismes. D'autre part, tout faisceau d'ensembles (resp. ...) F sur X est isomorphe à la limite d'un système inductif comme ci-dessus, en prenant par exemple $F_i = u_{i*}(F)$, $u_i : X \longrightarrow X_i$ étant le morphisme canonique, en vertu de ( 5.2) et (IX 1.6 (iii)). Cela achève la démonstration de 8.1.

Corollaire 8.2. Le théorème 5.1 (i) est vrai.

En effet, il suffit de conjuguer 8.1, le critère 6.5 (i) b"), et 5.8.

Lemme 8.3. Pour prouver l'un des énoncés 5.1 (i) (ii) (iii), il suffit de le faire lorsqu'on suppose f projectif de dimension relative $\leq 1$, et S noethérien.

En effet, nous savons déjà par 8.1 qu'on peut se borner au cas f projectif, S noethérien, et un argument déjà signalé nous permet de supposer de plus qu'on a $X = \underline{P}_S^r$ . Nous procédons alors par récurrence sur r, en notant que le théorème est vrai par hypothèse pour $r = 1$. On peut donc supposer $r \geq 2$, et le théorème démontré pour $\underline{P}_S^{r-1} \longrightarrow S$ (toute base S). Considérons $Z = \underline{P}_S^{r-2}$ come plongé dans $X = \underline{P}_S^r$ de la façon habituelle, et soit $p : \overline{X} \to X$ obtenu en faisant éclater Z dans X. Un calcul immédiat (cf. EGA V) montre que l'on a un morphisme naturel $p_1 : \overline{X} \longrightarrow X_1 = \underline{P}_S^1$ , qui fait de $\overline{X}$ un $X_1$-schéma localement isomorphe à $\underline{P}_{X_1}^{r-1}$ (c'est le fibré projectif sur $X_1$ associé à un faisceau localement libre de rang r convenable sur $X_1$). D'autre part, les fibres de p sont de dimension $\leq 1$, ainsi que celles de $f_1 : X_1 \longrightarrow X$. Nous pouvons donc appliquer l'hypothèse, et l'hypothèse de récurrence, aux trois morphismes p, $p_1$, $f_1$ dans le diagramme commutatif




Comme p est surjectif, le lemme 6.8 nous ramène à prouver 5.1 pour le composé $\overline{f} = fp = f_1 p_1$. Or nous pouvons déjà appliquer 5.1 aux deux morphismes $f_1$ et $p_1$. Compte tenu de 6.11, on en conclut que 5.1 est vrai également pour leur composé $f_1 p_1$. Cela achève la démonstration de 8.3.

Lemme 8.4. Pour démontrer 5.1 (ii), il suffit de démontrer le "théorème de spécialisation pour le groupe fondamental" 5.9 bis, dans le cas où f est projectif de dimension relative $\leq 1$, et où S est strictement local noethérien.

Cela résulte en effet aussitôt de 8.3, 6.1 et 6.5 (ii) (critère b)).

On démontrera directement le théorème de spécialisation, dans le cas 8.4, dans l'exposé suivant (XIII 2).

Lemme 8.5. Pour démontrer 5.1 (iii), il suffit de démontrer 5.1 (ii) et, de plus, la proposition suivante (qui sera démontrée dans l'exposé suivant (XIII 3) ou (EGA IV 21.9.12)) :

Proposition 8.6. Soit S hensélien et noethérien, $f : X \longrightarrow S$ projectif de dimension relative $\leq 1$, et $X_o$ la fibre fermée de X/S. Pour tout schéma Z, soit $\mathrm{Pic}\ Z = H^1(Z,(G_m)_Z)$ le groupe de Picard de Z. Le morphisme de restriction

$$\mathrm{Pic}\ X \longrightarrow \mathrm{Pic}\ X_o$$

est surjectif.

Démonstration de 8.5. D'après 6.5 (iii) et 8.2, il suffit de démontrer que

$$\varphi^q : H^q(X, \mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z}) \longrightarrow H^q(X_o, \mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z})$$

est surjectif pour tout $q \geq 1$, et tout nombre premier l. Or on connaît la surjectivité si $q = 1$, d'après 5.1 (ii). De plus, puisque $X_o$ est un schéma projectif de dimension $\leq 1$ sur un corps k séparablement clos, on a

$$H^q(X_o, \mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z}) = 0$$

si $q > 2$ dans le cas $\ell \neq$ car. k (X 4.3), et si $q > 1$ dans le cas $\ell =$ car. k (X 5.2). La surjectivité est donc triviale pour ces valeurs de q !

Il reste à traiter le cas q = 2 et $\ell \neq$ car. k . Notons $n = \ell^{\nu}$. Comme le faisceau des racines n-ièmes de l'unité $(\mu_n)_S$ est localement isomorphe à $(\mathbb{Z}/n)_S$, et que S est strictement local, il existe un isomorphisme (non canonique) $(\mu_n)_S \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_S$ d'où $(\mu_n)_X \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_X$ .

Par théorie de Kummer IX 3.2 appliquée à X et $X_o$, on a un morphisme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccc} \operatorname{Pic} X & \longrightarrow & H^2(X, \quad_n) & \longrightarrow & H^2(X, G_m) \\ \downarrow \epsilon & & \downarrow \varphi^2 & & \downarrow \\ \operatorname{Pic} X_o & \longrightarrow & H^2(X_o, \quad_n) & \longrightarrow & H^2(X_o, G_m) \end{array} .$$

Or $H^2(X_o, G_m) = 0$ d'après IX 4.6. Donc la surjectivité de $\epsilon$ implique celle de $\varphi^2$, d'où le lemme.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GIRAUD J., Cohomologie non-abélienne, thèse (à paraître), et deux notes aux C.R. t.260, p.2392 et 2656 (1965).

[2] GODEMENT R., Théorie des faisceaux, Paris (1958).

[3] VERDIER J.L., Catégories dérivées, Institut des Hautes Etudes Scientifiques (1964).

E X P O S E XIII

# THEOREME DE CHANGEMENT DE BASE POUR UN MORPHISME PROPRE : FIN DE LA DEMONSTRATION

par M. ARTIN

## 1. Le cas projectif et plat.

Rappelons l'énoncé de XII 5.9. bis dans le cas envisagé ici :

Proposition 1.1. Soit S le spectre d'un anneau hensélien noethérien, et $f : X \longrightarrow S$ un morphisme projectif et plat. Soit $X_o$ la fibre fermée de X/S. Le foncteur de restriction

$$Et(X) \longrightarrow Et(X_o)$$

est une équivalence de catégories.

Comme nous l'avons déjà remarqué, il résulte de XII 6.5 (i) que la flèche est pleinement fidèle. Il reste à démontrer que chaque revêtement étale $Y_o$ de $X_o$ est induit par un revêtement étale Y de X.

Lemme 1.2. Soit S localement noethérien, $f : X \longrightarrow S$ projectif et plat, et $Y \subset X$ un sous-schéma. Le sous-foncteur $\varepsilon = \prod_{X/S} Y/X : (Sch)/S \longrightarrow (Ens)$ du foncteur final "qui exprime la condition $Y = X$ ", i.e. tel que pour $S' \to S$, on ait

$$\varepsilon(S') = \begin{cases} \emptyset & \text{si } Y' \neq X' \\ \{\emptyset\} & \text{si } Y' = X' \end{cases}$$

(où l'on désigne par un prime l'effet du changement de base $S' \longrightarrow S$) est représentable par un sous-préschéma Z de S. Si Y est ouvert (resp. fermé), il en est de même de Z.

Démonstration. Soit Y fermé dans l'ouvert U de X, et soit C le fermé complémentaire de U. Puisque F est propre, l'image de C dans S est un fermé D, et il est évident que la condition U = X est représentée par l'ouvert S - D de S. On peut donc supposer qu'on a déjà U = X, i.e. que Y est un sous-schéma fermé. Considérons le morphisme surjectif $\underline{O}_X \xrightarrow{\alpha} \underline{O}_Y$ de $\underline{O}_X$-modules; dire que Y = X revient au même que de dire qu'il existe un morphisme $\underline{O}_Y \xrightarrow{\beta} \underline{O}_X$ tel que le composé $\beta\alpha$ soit l'identité, c'est-à-dire, qu'il existe une section de $\underline{Hom}(\underline{O}_Y, \underline{O}_X)$ qui relève la section identique de $\underline{Hom}(\underline{O}_X, \underline{O}_X)$. Or il résulte de EGA III 7.7.8 que le foncteur qui à S'/S associe l'ensemble des sections de $\underline{Hom}(\underline{O}_Y, \underline{O}_X)$ (resp. $\underline{Hom}(\underline{O}_X, \underline{O}_X)$) est représenté par un fibré vectoriel $V_1$ (resp. $V_2$) sur S. Soient $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ le morphisme $u \longmapsto u\,\alpha$ induit par $\underline{O}_X \longrightarrow \underline{O}_Y$, et $s : S \longrightarrow V_2$ la section correspondant à l'identité $\underline{O}_X \Longrightarrow \underline{O}_X$. L'image inverse de la section s par $\varphi$ s'identifie à un sous-schéma fermé Z de S, et il est clair que Z représente le foncteur $\mathfrak{C}$, d'où le lemme.

Lemme 1.3. Soient S un schéma localement noethérien, $f : X \longrightarrow S$ un morphisme projectif et plat, et E un faisceau localement libre sur X. Soit

$$QE : (Sch)/S \longrightarrow (Ens)$$

le foncteur qui à S'/S associe l'ensemble QE(S') des faisceaux quotients A' de $E' = E \otimes_{O_S} \underline{O}_{S'}$, munis d'une structure d'Algèbre étale sur $\underline{O}_{X'}$. Ce foncteur est représentable par un schéma localement de type fini sur S.

Démonstration. Le foncteur Quot(E), Quot(E)(S') = ensemble des quotients de E' plat au-dessus de S', est représentable par un schéma localement de type fini (TDTE IV, exp. 221), disons par Z / S. Soit $M_u$ le quotient "universel" de $E \otimes_{O_S} O_Z$ au-dessus de $X_Z$. Le sous-foncteur de Quot(E) des quotients que sont plats au-dessus de X' est représenté par un ouvert U de Z. En effet, soit M' un quotient de E', donné par un S-morphisme S' $\longrightarrow$ Z. Puisque M' est plat au-dessus de S', dire qu'il est plat au-dessus de X' revient au même que de dire que pour chaque point s' $\in$ S', le module $M'_{s'}$, est plat au-dessus de la fibre $X'_{s'}$, (EGA IV 5.9), ce qui équivaut à $(M_u)_z$ plat au-dessus de la fibre $Z_z$ au point z image de s'. Or l'ensemble U des z $\in$ Z tels que $(M_u)_z$ soit plat sur $Z_z$, i.e. que $M_u$ soit plat sur Z en les points de $Z_s$, est ouvert dans Z en vertu de EGA IV 11.1.5, d'où l'assertion.

Il suffit maintenant de représenter le foncteur relatif QE/U[f]. On est donc réduit au lemme suivant, en remplaçant S par U et X par $X \times_S U$ :

Lemme 1.4. Soient S un schéma localement noethérien, f : X $\longrightarrow$ S un morphisme projectif et plat, et M un faisceau localement libre sur $O_X$. Le foncteur Algét : (Sch)/S $\longrightarrow$ (Ens), qui à S'/S associe l'ensemble Algét(S') des structures d'algèbre sur M' étales au-dessus de $O_{X'}$ , est représentable par un schéma de type fini sur S.

Démonstration. Nous dirons, pour abréger, "représentable" en sous-entendant "par un schéma relatif de type fini". Les fibrés vectoriels rencontrés seront tous définis par des faisceaux cohérents, donc seront de type fini. Une loi de composition bilinéaire dans M' est donnée par une section du faisceau localement libre Hom (M'⊗M',M'). Puisque Hom(M'⊗M',M') est S-plat, il résulte

de EGA III 7.7.6 que le foncteur "loi de composition bilinéaire" est représentée par un fibré vectoriel Z sur S. Il faut vérifier que les conditions supplémentaires sur la loi d'être associative, commutative, et d'avoir une section unité, sont représentées par un sous-schéma de Z, et on peut (en considérant le foncteur relatif) remplacer S par Z, donc peut supposer qu'on a une loi de composition donnée sur M, et montrer qu'on peut représenter le sous-foncteur de S exprimant les conditions précédentes par un sous-schéma de S.

Or pour l'associativité, la condition est que deux sections de $\underline{\mathrm{Hom}}(M \otimes M \otimes M, M)$ deviennent égales par changement de base $S' \longrightarrow S$. Soit Y le produit fibré de ces sections au-dessus du fibré vectoriel correspondant à $\underline{\mathrm{Hom}}(M \times M \otimes M, M)$. Le schéma Y s'identifie à un sous-schéma fermé de X, et l'associativité après $S' \longrightarrow S$ est exprimé par la condition $Y' = X'$. Elle définit donc un sous-foncteur de S représentable par un sous-schéma fermé de S d'après 1.2. Pour la commutativité la condition est que deux sections de $\underline{\mathrm{Hom}}(M \otimes M, M)$ deviennent égales, ce qui définit encore un sous-foncteur de S représentable par un sous-schéma fermé d'après 1.2. Supposons enfin, ce qui est maintenant loisible, que la loi est déjà associative et commutative, et examinons la condition pour qu'il existe une section unité, qui sera alors unique. Le foncteur qui en S'/S a comme valeur l'ensemble des sections de M' est représentable par un fibré vectoriel, d'après EGA III 7.7.6, et tout revient à représenter le sous-foncteur de ce dernier correspondant aux sections unités (compte tenu de l'unicité qu'on vient de rappeler). Relativisant comme d'habitude, on peut supposer qu'une section $\varepsilon$ de M est déjà donnée, et montrer que le sous-foncteur de S exprimant qu'elle devient

une section unité est représentable. Or, la condition que $\varepsilon$ soit une unité est que le composé des morphismes évidents $M' \longrightarrow M' \otimes M' \longrightarrow M'$ soit l'identité, c'est-à-dire que deux sections déterminées de $\mathrm{Hom}(M,M)$ deviennent égales. On conclut encore grâce à 1.2.

Supposons enfin qu'une structure d'algèbre commutative unitaire soit donnée sur le module localement libre M. La condition d'être étale est ouverte dans X (SGA I 4.5), donc représentable sur S par un sous-schéma (ouvert). Ceci achève la démonstration de 1.4, donc de 1.3.

1.5. Soit maintenant Z/S l'objet qui représente le foncteur envisagé dans 1.3, et examinons la condition sur Z d'être lisse sur S en un point z. En traduisant SGA 1 III 3.1 en termes du foncteur QE, on trouve la condition suivante :

Soient B un anneau artinien local, $\mathfrak{m} = rB$, J un idéal de B tel que $J\mathfrak{m} = 0$, $S' = \mathrm{Spec}\ B$, $S'' = \mathrm{Spec}\ B/J$ et $S' \longrightarrow S$ un morphisme. On utilise des notations évidentes pour les effets des changements de bases $S' \longrightarrow S$ et $S'' \longrightarrow S$.

(*) Pour chaque quotient A" de E" muni d'une structure d'algèbre étale sur $\underline{O}_{X''}$, correspondant à un S-morphisme $S'' \longrightarrow Z$ d'image z, il existe un quotient A' de E', muni d'une structure d'algèbre étale sur $\underline{O}_{X'}$, qui l'induise.

Or puisque X' et X" ont même espace sous-jacent, une algèbre A' qui induit A" est déjà déterminée à isomorphisme unique près (SGA I 8.3).

On peut donc exprimer la condition (**) ainsi :

(**) Soit A' une algèbre étale sur $\underline{O}_{X'}$, et A" l'algèbre induite de A' sur X".

Chaque homomorphisme surjectif

$$E'' \xrightarrow{\varphi''} A''$$

correspondant à un morphisme S" $\longrightarrow$ Z d'image z, se relève en un homomorphisme (nécessairement surjectif en vertu du lemme de Nakayama)

$$E' \xrightarrow{\varphi'} A' \quad .$$

De la suite exacte

$$0 \longrightarrow J \longrightarrow B \longrightarrow B/J \longrightarrow 0$$

on déduit une suite exacte de faisceaux sur X' :

$$0 \longrightarrow J \otimes \underline{\mathrm{Hom}}(E',A') \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(E',A') \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(E'',A'') \longrightarrow 0 \quad .$$

L'obstruction au relèvement de $\varphi''$ se trouve dans $H^1(X', J \otimes \underline{\mathrm{Hom}}(E',A'))$. Soit $S_o$ = Spec $B/\mathfrak{m}$. Puisque $J\mathfrak{m} = 0$, on a

$$J \otimes \underline{\mathrm{Hom}}\,(E',A') \xrightarrow{\sim} J \otimes \underline{\mathrm{Hom}}\,(E_o,A_o) \quad ,$$

et il est clair que

$$H^1\,(X', J \otimes \underline{\mathrm{Hom}}\,(E_o,A_o)) \xrightarrow{\sim} J \otimes H^1(X_o, \underline{\mathrm{Hom}}\,(E_o,A_o)) \quad .$$

Tenant compte du fait que la cohomologie commute à l'extension des corps de base, on trouve le

Corollaire 1.6. Soient Z/S le schéma qui représente le foncteur de 1.3, $X_Z = X \times_S Z$, et $A_Z$ l'Algèbre étale quotient ("générale") de $E_Z$. Alors Z/S est lisse en tout point $z_o$ tel que

$$H^1 (X_o, \underline{Hom}(E_o, A_o)) = 0 \quad ,$$

où l'indice zéro désigne la restriction à la fibre $X_o$ de $X_Z$ / Z au point $z_o$.

Nous pouvons maintenant achever la démonstration du théorème 1.1 : avec les notations du théorème, soit $Y_o/X_o$ un revêtement étale, donné par un faisceau d'Algèbres $A_o$, étale sur $\underline{O}_{X_o}$. Pour n assez grand, $A_o(n)$ est engendré par ses sections (EGA III 2.2.1). On a donc une surjection

$$\underline{O}_{X_o}^N \longrightarrow A_o(n) \longrightarrow 0 \quad ,$$

d'où une surjection

$$O_{X_o}^N (-n) = E_o \longrightarrow A_o \longrightarrow 0 \quad .$$

Choisissons n assez grand pour qu'on ait aussi

(+) $$H^1 (X_o, \underline{Hom}(E_o, A_o)) = 0 \quad ,$$

ce qui est possible en vertu de (EGA III 2.2.1), puisque

$$\underline{Hom}(E_o, A_o) = [\underline{Hom}(\underline{O}_{X_o}^N, A_o)] \ (n) = [A_o(n)]^N \quad .$$

Posons $E = O_X^N(-n)$, et soit Z/S le schéma qui représente le foncteur envisagé dans 1.3. Le quotient $A_o$ de $E_o$ correspond à un point $z_o \in Z$ de la fibre fermée de Z/S, rationnel sur k(s), et d'après 1.5 et (+), Z/S est lisse au point $z_o$. Or puisque S est le spectre d'un anneau hensélien et Z/S est lisse au point $z_o$ de la fibre fermée, on peut trouver une section de Z/S passant par $z_o$ : c'est par exemple immédiat à partir de la définition originale (SGA II 1.1) de la lissité. Il s'ensuit que $A_o$ est induit par une Algèbre A étale sur X (quotient de E), ce qui achève la démonstration de 1.1.

2. Le cas de dimension relative $\leq 1$.

L'assertion est la suivante :

Proposition 2.1. Avec les notations de XII 5.9 bis, le foncteur $Et(X) \longrightarrow Et(X_o)$ est une équivalence de catégories si S est noethérien strictement local, et f est projectif et de dimension $\leq 1$.

D'après XII 8.5, cela achèvera la démonstration de XII 5.1 (ii), qui généralise à la fois 1.1 et 2.1.

Lemme 2.2. Soit S le spectre d'un anneau local noethérien A, et soit X/S projectif, de dimension relative $\leq n$. Il existe un S-schéma projectif et plat Z/S de dimension relative $\leq n$ et une immersion fermée $X \hookrightarrow Z$ au-dessus de S.

Démonstration. Soit $X \longrightarrow \mathbb{P}^N_S$ un plongement projectif au-dessus de S, et soit $J \subset A[x_o,\ldots,x_N]$ l'idéal homogène qui définit X. Soient $k = A/rA$, $S_o = \operatorname{Spec} k$, $X_o = X \otimes_S k$. Alors $X_o$ est défini par l'idéal homogène $J_o = \operatorname{Im}(J \longrightarrow k[X_o,\ldots,X_N])$. Comme $\dim X_o \leq n$, il est bien connu qu'il existe des éléments $f^o_1,\ldots,f^o_{N-n}$ de $J_o$ qui définissent un sous-schéma $Z_o$ de $\mathbb{P}^N_k$ de dimension n. Soient $f_i$ $(o \leq i \leq N-n)$ des éléments de J qui relèvent les $f^o_i$, et soit Z le sous-schéma de $\mathbb{P}^N_S$ défini par $f_1,\ldots,f_\nu$. En vertu de EGA IV 11.3, Z est plat au-dessus de S, d'autre part en vertu de EGA IV 13.1.5 il est de dimension relative $\dim Z_o = n$. Cela achève de prouver 2.2.

Démonstration de 2.1. Soit X/S projectif de dimension relative $\leq 1$, avec S noethérien strictement local. Nous pouvons supposer X (donc $X_o$) connexe. Soit $X \longrightarrow Z$ une immersion fermée au-dessus de S avec Z projectif, plat et de dimension $\leq 1$, cf. 2.2. Soit $s_o$ le point fermé de S. On a un diagramme

correspondant de schémas

$$\begin{array}{ccc} Et(Z) & \longrightarrow & Et(X) \\ \downarrow a & & \downarrow b \\ Et(Z_o) & \xrightarrow{c} & Et(X_o) \end{array} .$$

On veut démontrer que b est une équivalence. D'après XII 5.8, b est pleinement fidèle, et il reste à démontrer qu'il est essentiellement surjectif. Or a est essentiellement surjectif d'après 1.1, et il suffit donc de démontrer que c est essentiellement surjectif. On est ainsi réduit (laissant tomber le $_o$) à la proposition suivante :

Proposition 2.3. Soient k un corps séparablement clos, Z un k-schéma, localement de type fini et de dimension $\leq 1$, et $X \hookrightarrow Z$ un sous-schéma fermé connexe. Alors tout revêtement étale de X est induit par un revêtement étale de Z.

Démonstration. On peut supposer Z et X de dimension 1, le cas où X est de dimension nulle étant triviale grâce à l'hypothèse faite sur k. Alors $Z = X \cup Y$, où Y est le sous-schéma fermé adhérence de Z-X. Soit $V = X \cap Y$ le schéma intersection, qui est un schéma discret i.e. localement artinien. Le morphisme $X \amalg Y \longrightarrow Z$ est fini et surjectif, donc un morphisme de descente strict pour la catégorie des revêtements étales (SGA IX 4.7). On a évidemment

$$(*) \qquad (X \amalg Y) \times_Z (X \amalg Y) = X \amalg Y \amalg V^{(1)} \amalg V^{(2)} \qquad (V^{(i)} = V) \quad ,$$

où $pr_i$ envoie $V^{(i)}$ dans le composant X de $X \amalg Y$ et $V^{(j)}$ dans le composant Y pour $j \neq i$.

Soit X'/X un revêtement étale de degré n, et soit Y"/Y un revêtement de degré n (par exemple le revêtement trivial de degré n), de sorte que $X' \amalg Y''$

est un revêtement de $X \amalg Y$ de degré n. Il suffit de trouver des données de descente pour ce revêtement et pour le morphsime $X \amalg Y \longrightarrow Z$. En regardant (*), on voit qu'une donnée de descente pour ce morphisme équivaut simplement à un isomorphisme

$$X' \times_X V = V' \xrightarrow{\sim} V'' = Y'' \times_Y V \quad .$$

Puisque k est séparablement clos, il en est de même de $k(z_i)$, et par suite chaque revêtement étale de V est complètement décomposé, d'où $V' \xrightarrow{\sim} V''$, ce qui donne le résultat.

Remarque 2.4. On peut éviter le recours au délicat résultat de SGA IX et à la théorie de la descente, par un argument direct, montrant que la catégorie des revêtements étales de Z est équivalente à la catégorie des triples $(X', Y', \theta)$, où $X'(Y')$ est un revêtement étale de $X(Y)$ et $\theta$ un V-isomorphisme $X' \times_X V \xrightarrow{\sim} Y' \times_Y V$. Ce résultat, valable pour tout schéma Z réunion de deux sous-schémas fermés X,Y, s'établit directement à l'aide du résultat analogue pour la détermination des Modules quasi-cohérents sur X (lorsque $X = V(\mathfrak{J})$, $Y = V(\underline{K})$, $J \cap \underline{K} = 0$).

3. Un résultat auxiliaire sur le groupe de Picard (*).

Proposition 3.1. Soient X un schéma noethérien, $X_o$ un sous-schéma fermé de X tel que a) $\dim X_o \leq 1$, et b) pour toute partie fermée connexe non-vide Y de X, $Y_o = Y \cap X_o$ est connexe non-vide.

(*) Figure aussi dans EGA IV 21.9.11, 21.9.12 sous une forme légèrement plus générale ; notamment il suffit dans 3.2 que f soit séparé au lieu de propre.

...

(i) Soit $Z_o$ la réunion des $\{\overline{x}\} \cap X_o$ pour $x \in \mathrm{Ass}\ \underline{O}_X$ tel que $\{\overline{x}\} \cap X_o$ soit réduit à un point. Alors pour tout diviseur de Cartier $D_o$ sur $X_o$ tel que $\mathrm{supp}(D_o$ ne rencontre pas $Z_o$, il existe un diviseur de Cartier D sur X, induisant $D_o$ (et si $D_o \geq 0$, on peut prendre $D \geq 0$).

(ii) Supposons qu'il existe un ouvert affine $U_o$ de $X_o$ contenant l'ensemble fini $\mathrm{Ass}\ \underline{O}_{X_o} \cup Z_o$ (condition automatiquement satisfaite X est noethérien et si $X_o$ admet un faisceau inversible ample). Alors l'homomorphisme $\mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X_o)$ est surjectif.

Démonstration. (i) Comme $\dim X_o \leq 1$, on voit tout de suite que tout diviseur de Cartier $D_o$ sur $X_o$ a un support discret, donc est la différence de deux diviseurs de Cartier positifs, de supports contenus dans celui de $D_o$. Cela nous ramène dans (i) au cas où $D_o$ est positif, donc où pour tout $x \in \mathrm{Supp}\ D_o$, $D_o$ est défini en x par un élément non diviseur de zéro $f_x \in \mathrm{rad}\ (\underline{O}_{X_o}, x)$. Alors $f_x$ est induit par une section $g_x$ de $\underline{O}_X$ sur un voisinage ouvert $U_x$ de x. Je dis qu'en prenant $U_x$ assez petit, $g_x$ est non diviseur de zéro dans $\underline{O}_{U_x}$, i.e., $V(g_x) \cap \mathrm{Ass}\ \underline{O}_{U_x} = \emptyset$. En effet, il résulte de a) et b) que pour tout $x \in X$, et en particulier pour $z \in \mathrm{Ass}\ \underline{O}_X$, $\overline{z} \cap X_o$ est un fermé connexe de $X_o$ donc est, soit réduit à un seul point fermé, soit à une réunion connexe de composantes irréductibles de dimension 1 sur $X_o$. Comme $x \notin Z_o$ il s'ensuit que dans le premier cas on a $x \notin \overline{z}$. Mais pour $s \in \mathrm{Ass}\ \underline{O}_X$ du deuxième type, on ne peut pas avoir $x \in \overline{z}$ et $z \in V(g_x)$, puisqu'alors $g_x$ donc $f_x$ s'annulerait sur une des composantes irréductibles de $\overline{z} \cap \mathrm{supp}\ X_o$, qui est aussi une composante irréductible de $X_o$, ce qui est incompatible avec le fait que $f_x$ est non diviseur de zéro dans $\underline{O}_{X_o,x}$. Donc quitte à restreindre $U_x$ on peut

supposer que $V(g_x) \cap \mathrm{Ass}\ \underline{O}_{U_x} = \emptyset$, i.e. $g_x$ est non diviseur de zéro. Soit $Y_x$ l'adhérence de $V(g_x)$ dans X, alors $Y_x \cap X_o \cap U_x \subset V(g_x) \cap X_o$ admet x comme point isolé, donc il en est de même de $Y_x \cap X_o$, donc par la condition b) de la proposition, $Y_x$ admet une composante connexe $Y'_x$ telle que $Y'_x \cap X_o = \{x\}$. De plus, on a $Y'_x \subset U_x$, car $T_x = Y'_n - Y'_x \cap U_x$ est un fermé de X tel que $T_x \cap X_o = \emptyset$, donc $T_x = \emptyset$ en vertu de la condition b). Nous prenons maintenant le diviseur de Cartier $D'_x$ sur X qui induit $Y'_x$ sur $U_x$, et induit zéro sur $X - Y'_x$, et poserons $D = \sum_x d'_x$, qui est un diviseur de Cartier positif sur X, induisant évidemment $D_o$ sur $X_o$.

(ii) La conclusion résulte de (i) et du fait que tout module inversible $\underline{L}_o$ sur $X_o$ est isomorphe au module défini par un diviseur de Cartier $D_o$ dont le support ne rencontre pas $Z_o$. Ce dernier fait signifie en effet que pour $\underline{L}_o$ admet une section définie sur un ouvert $V_o$ contenant $\mathrm{Ass}\ \underline{O}_{X_o} \cup Z_o$, cette section ne s'annulant en aucun point de ce dernier ensemble. Or il suffit de prouver cela en remplaçant $X_o$ par l'ouvert affine $U_o$, et dans ce cas cela est bien connu et provient du fait qu'un module inversible sur un schéma semi-local est isomorphe au faisceau structural. Enfin, on sait bien que si $X_o$ admet un faisceau ample, alors toute partie finie de $X_o$ est contenue dans un ouvert affine. Cela prouve (ii).

On a le corollaire suivant, qui généralise XII 8.6 et qui achève la démonstration de 5.1 (iii) :

Corollaire 3.2. Soit S le spectre d'un anneau hensélien noethérien, et $f : X \longrightarrow S$ un morphisme propre et de dimension relative $\leq 1$. Alors pour tout sous-schéma fermé $X'_o$ de X ayant même espace sous-jacent que la fibre

fermée $X_o$ de X/S, l'application canonique $Pic(X) \longrightarrow Pic(X_o)$ est surjective.

En effet, on applique la proposition à $(X,X'_o)$, en notant que la condition a) est satisfaite par hypothèse, et b) en vertu de XII 5.7. Il reste à vérifier l'hypothèse faite dans ii) d'existence d'un $U_o$, ce qui résulte du fait que $X'_o$ est nécessairement projectif (comme toute courbe propre sur un corps).

Remarque. Le lecteur qui ne voudra pas admettre ou reconstituer le fait que les courbes propres sur un corps sont projectives, se bornera à utiliser le corollaire en supposant déjà que f est projectif, ce qui suffit pour l'application que nous avions en vue ici. Signalons d'autre part que, admettant la projectivité des courbes algébriques propres sur un corps, on conclut que sous les conditions de 3.2 X est nécessairement projectif sur S, comme on voit en choisissant un $\xi_o \in Pic(X_o)$ ample et le relevant en un $\xi \in Pic(X)$, et appliquant EGA III 4.7.1.

BIBLIOGRAPHIE

[TDTE] Grothendieck A., Technique de descente et théorèmes d'existence en Géométrie Algébrique, in Fondements de la Géométrie Algébrique (Extraits du Sém. Bourbaki 1957-62) Secrétariat mathématique, 11, rue Pierre Curie.

E X P O S E XIV

# THEOREME DE FINITUDE POUR UN MORPHISME PROPRE ; DIMENSION COHOMOLOGIQUE DES SCHEMAS ALGEBRIQUES AFFINES

par M. ARTIN

Cet exposé contient deux théorèmes importants qui se démontrent en utilisant le théorème de changement de base pour un morphisme propre.

## 1. Théorème de finitude pour un morphisme propre.

Théorème 1.1. Soit $f : X \longrightarrow S$ un morphisme propre et de présentation finie. Soit A un anneau noethérien à gauche qui est une $\mathbb{Z}/n$-algèbre pour $n \in \mathbb{N}$ convenable. Soit F un faisceau d'ensembles (resp. de groupes, resp. de A-modules) constructible sur X. Alors le faisceau $f_*F$ (resp. $R^1f_*F$, resp. $R^qf_*F$ pour chaque $q \geq 0$) est également constructible.

En particulier, on a :

Corollaire 1.2. Soit X un schéma propre sur le spectre d'un corps séparablement clos k, et soit F un faisceau abélien de torsion constructible sur X. Alors les groupes $H^q(X,F)$ sont finis pour chaque $q \geq 0$.

Remarque 1.3. Le théorème est faux pour les faisceaux abéliens si l'on omet la condition que f soit propre, comme on voit en prenant $f = \mathbb{Z}/p$, $p = \text{car } k$, $X = \mathbb{E}^1_k$, l'espace affine, et f l'inclusion de X dans $\mathbb{P}^1_k$, ou le morphisme structural $X \longrightarrow \text{Spec } k$. Cependant, on conjecture qu'il est vrai si F est premier

aux caractéristiques résiduelles de S et S est "excellent" EGA IV 7.8. On peut le démontrer, lorsqu'on dispose du théorème de résolution des singularités (par exemple en caractéristique nulle) pour un schéma excellent S d'égales caractéristiques (XIX 5.1).

Démonstration de 1.1. L'assertion est locale sur S et on peut donc prendre S affine. Alors S est limite des spectres d'anneaux de type fini sur $\mathbb{Z}$, et les données du théorème sont telles qu'on peut les obtenir, par changement de base $S \longrightarrow S_o$, d'un morphisme propre $f_o : X_o \longrightarrow S_o$ avec $S_o$ de type fini sur $\mathbb{Z}$ et un faisceau constructible $F_o$ sur $X_o$, cf. EGA IV 8 et IX 2.7.4. Or, puisque l'image inverse d'un faisceau constructible est encore constructible (IX 2.4 (iii)), on est ramené, en appliquant XII 5.1 au morphisme de changement de base $S_o \longleftarrow S$, à démontrer la constructibilité de $f_{o*}F_o$ (resp. de $R^q f_{o*}F_o$), d'où le

Lemme 1.4. Il suffit de vérifier 1.1 avec S de type fini sur Spec $\mathbb{Z}$.

Lemme 1.5. L'assertion ensembliste de 1.1 est vraie, c'est-à-dire $f_*F$ est un faisceau constructible d'ensembles si F l'est.

Démonstration. On peut supposer S noethérien (1.4). Soit $F \longrightarrow G = \coprod_i \pi_{i*}(C_i)$ une injection avec $\pi_i : X_i \longrightarrow X$ fini et $C_i$ constant et constructible sur $X_i$ (IX 2.14). On a $f_*F \subset f_*G$ et par suite (IX 2.9 (iii)) il suffit de traiter le cas $F = G$. Or $f_*G = \coprod_i (f\pi_i)_* G_i$, et un produit fini de faisceaux constructibles sur S est constructible (IX 2.14). En remplaçant X par $X_i$, on est ramené au cas où $F = D_X$ est un faisceau constant constructible, à valeur D. Or en vertu de XII 5.1 (i), la fibre $f_*(F)_{\overline{S}}$ est isomorphe à $D^{C(S)}$, où

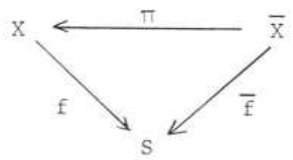
$C(S) = \pi_o(X_{\overline{S}})$, donc elle est finie. D'après IX 2.13 (iii) il suffit de démontrer que la fonction "nombre d'éléments de la fibre de $f_*F$ " est constructible sur S. Or cette fonction est $\mathrm{card}(D^C)$, où C est la fonction "nombre de composantes connexes dans la fibre géométrique", et C est constructible (EGA IV 9.7.9), d'où le résultat.

Lemme 1.6. Soit S un schéma noethérien, $f : X \longrightarrow S$ propre, F un faisceau de groupes (resp. de A-modules) constructible sur X, q un entier égal à 0 ou 1 (resp. un entier $\geq 0$). Soient $S_i$ $(1 \leq i \leq n)$ des sous-schémas de S tels que $S = \bigcup_i S_i$ et soient $F_i$ , $f_i : X_i \longrightarrow S_i$ les "restrictions" des données aux $S_i$. Alors si pour tout i, $R^q f_{i*}F_i$ est constructible, il en est de même de $R^q f_*F$.

Démonstration. La restriction de $R^q f_*F$ à $S_i$ est isomorphe à $R^q f_{i*}F_i$ d'après XII 5.1, et le lemme suit de IX 2.8.

On procède maintenant par des raisonnements analogues à ceux de XII8:

Lemme 1.7. Soient S noethérien,




un diagramme commutatif de morphismes propres, et $j : U \longrightarrow X$ un ouvert tel que l'ouvert $\overline{U} = U \times_X \overline{X}$ s'envoie isomorphiquement sur U. Soit $Y = X-U$ le schéma fermé réduit et soient $f_o : Y \longrightarrow S$ et $i : Y \longrightarrow X$ les morphismes canoniques. Supposons le théorème 1.1 vrai pour $\overline{f}$, $f_o$ et $\pi$. Alors il est également vrai pour

Démonstration. Traitons d'abord le cas d'un faisceau de A-modules F sur X. On a la suite exacte

$$0 \longrightarrow j_! j^*F \longrightarrow F \longrightarrow i_* i^*F \longrightarrow 0 \quad ,$$

et compte tenu de la suite exacte de cohomologie correspondante pour les $R^q f_*$, et de IX 2.6, on voit qu'il suffit de vérifier la constructibilité des $R^q f_*$ pour les membres extrêmes (notons que $i_* i^*F$ est constructible d'après IX 2.4 (iii) et IX 2.15(i), donc $j_! j^*F$ l'est aussi(IX 2.6). Puisque i est une immersion fermée,

$$(R^q f_*) i_* (i^*F) \simeq (R^q f_{o*})(i^*F) \quad ,$$

(VIII 5.6), d'où la constructibilité dans ce cas d'après l'hypothèse sur $f_o$. De plus, désignant par $\bar{j} : \bar{U} \longrightarrow \bar{X}$ le morphisme d'inclusion et $\bar{F} = \pi^* F$, on a

$$(*) \qquad j_! j^*F \simeq \pi_* \bar{j}_! \bar{j}^* \bar{F} \quad ,$$

comme on vérifie en définissant d'abord une flèche $\longrightarrow$, et prouvant qu'elle est inversible fibre par fibre en utilisant XII 5.1 (i). En chaque point géométrique $\bar{y}$ de Y, la restriction de $\bar{j}_! \bar{j}^* \bar{F}$ à la fibre $\bar{X}_{\bar{y}}$ de $\bar{X}$ sur X est nulle, et par suite XII 5.1 (iii) la fibre de $(R^q \pi_*)(\bar{j}_! \bar{j}^* \bar{F})$ en $\bar{y}$ est nulle pour chaque $q \geq 0$. Puisque d'autre part $\pi$ induit un isomorphisme au-dessus de X - Y, on a $(R^q \pi_*)(\bar{j}_! \bar{j}^* \bar{F}) = 0$ si $q > 0$. De la suite spectrale de Leray

$$E_2^{p,q} = (R^p f_*)(R^q \pi_*)(\bar{j}_! \bar{j}^* \bar{F}) \Longrightarrow R^n \bar{f}_* (\bar{j}_! \bar{j}^* \bar{F})$$

et (*) on déduit des isomorphismes

$$(R^q \bar{f}_*)(\bar{j}_! \bar{j}^* \bar{F}) \simeq (R^q f_*)(j_! j^* F)$$

pour $q \geq 0$. Puisque $\bar{j}_! \bar{j}^* \bar{F}$ est constructible (même raisonnement que pour $\bar{j}_! \bar{j}^* \bar{F}$) le membre de droite l'est aussi, d'où la constructibilité de

$(R^q f_*)(j_! j^* F)$ et donc de $R^q f_* F$.

Supposons maintenant que F soit un faisceau de groupes constructible sur X. Remplaçons $\pi : \overline{X} \longrightarrow X$ par $\pi \amalg i : (\overline{X} \amalg Y) \longrightarrow X$. Il suffit ainsi de démontrer que si $\pi : \overline{X} \longrightarrow X$ est surjectif et si 1.1 est vrai pour $\pi$ et pour $\overline{f}$, il l'est également pour f. Soit d'abord $\overline{F}$ un faisceau de groupes constructible sur $\overline{X}$. Alors $\pi_* \overline{F}$ est constructible sur X (1.5) et on a une injection $(R^1 f_*)\, \pi_* \overline{F} \hookrightarrow (R^1 \overline{f}_*)\overline{F}$ . Le membre de droite est constructible par hypothèse, et par suite le membre de gauche l'est aussi (IX 2.9 (ii)). Or puisque $\pi$ est surjectif, on a une injection $F \longrightarrow \pi_* \pi^* F = G$. Le faisceau $\overline{F} = \pi^* F$ est constructible, donc G et $R^1 f_* G$ sont aussi constructibles, comme on a vu ci-dessus. On est ainsi ramené au lemme suivant :

Lemme 1.8. Soient S noethérien, $f : X \longrightarrow S$ un morphisme propre, et $F \overset{u}{\hookrightarrow} G$ une injection de faisceaux de groupes constructibles sur X. Si $R^1 f_* G$ est constructible, $R^1 f_* F$ l'est aussi.

Démonstration. Soit $C = G/F$ qui est un faisceau constructible d'espaces homogènes sous G (appliquer IX 2.6). Considérons la suite exacte

$$(*) \qquad f_* C \xrightarrow{\delta} R^1 f_* F \xrightarrow{u^1} R^1 f_* G \quad .$$

Pour démontrer que $R^1 f_* F$ est constructible, il suffit par récurrence noethérienne et 1.6 de démontrer que si $S \neq \emptyset$, il existe un ouvert non-vide de S sur lequel $R^1 f_*(F)$ soit constructible. On peut donc supposer $R^1 f_* G$ localement constant, donc puisque la constructibilité est une notion locale pour la topologie étale, on peut supposer que S est irréductible et $R^1 f_* G$ est constant (et constructible), à valeur $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Soit $D_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ le

sous-faisceau de $R^1f_*F$ image inverse de la section $e_i$ par $u^1$. On a, puisque dans un topos "les sommes sont universelles", $R^1f_*F = \coprod_i D_i$, et il suffit donc de démontrer que chaque $D_i$ est constructible sur un S' convenable étale sur S et non-vide.

Rappelons que $R^1f_*F$ est le faisceau associé au préfaisceau $\mathfrak{R}^1F$, où $\mathfrak{R}^1F(S') = H^1(X',F)$. Par suite on peut supposer (en remplaçant S par un S' non-vide étale sur S) que $D_i$ est le faisceau "vide" (donc constructible), ou qu'il existe un élément $\alpha \in H^1(X,F)$ qui induit une section $\alpha$ de $D_i$. Dans ce dernier cas, soit

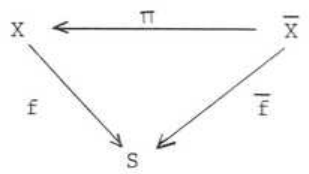
$$f_*C^\alpha \xrightarrow{\delta} R^1f_*F^\alpha \longrightarrow R^1f_*G^\alpha$$

la suite exacte déduite de (*) "en tordant à l'aide de $\alpha$". On a

$$R^1f_*F^\alpha \xrightarrow{\sim} R^1f_*F \quad , \quad R^1f_*G^\alpha \xrightarrow{\sim} R^1f_*G \quad ,$$

et la section de $R^1f_*F^\alpha$ correspondant à $\bar{\alpha}$ est la section unité. Donc le sous-faisceau $D_i^\alpha$ de $R^1f_*F^\alpha$ correspondant à $D_i$ est l'image inverse de la section unité de $R^1f_*G^\alpha$, i.e., $D_i^\alpha$ est l'image de $f_*G^\alpha$ par $\delta$. Puisque $f_*G$ est constructible (1.5) il en est de même de $D_i^\alpha$, donc de $D_i$ (appliquer IX 2.6), d'où le lemme.

Lemme 1.9. Soit S noethérien et




un diagramme commutatif de morphismes propres. Si le théorème 1.1 est vrai

pour f et $\pi$, il l'est également pour $\overline{f}$.

Démonstration. Dans le cas d'un faisceau $\overline{F}$ de A-modules constructible, on utilise la suite spectrale de Leray

$$E_2^{p,q} = (R^p f_*)(R^q \pi_*)\overline{F} \Longrightarrow (R^n \overline{f}_*)\overline{F} \quad .$$

Par hypothèse, on trouve que $E_2^{p,q}$ est constructible pour chaque p,q, et par suite l'aboutissement l'est aussi, comme il résulte alors de IX 2.6.

Soit $\overline{F}$ un faisceau de groupes constructible. On la suite exacte (XII 3.2)

$$(*) \quad 0 \longrightarrow (R^1 f_*)\, \pi_* \overline{F} \longrightarrow (R^1 \overline{f}_*)\overline{F} \longrightarrow f_*(R^1 \pi_*)\overline{F} \quad ,$$

où les membres extrêmes sont constructibles d'après l'hypothèse et 1.5. On procède comme dans la démonstration de 1.8 : Il suffit par récurrence noethérienne et 1.6 de supposer $S \neq \emptyset$, et de démontrer la constructibilité sur un ouvert non-vide convenable. On peut donc supposer $f_*(R^1\pi_*)\overline{F}$ localement constant, et (par localisation étale) même constant et constructible (IX 2.8) à valeur $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Soit $D_i$ le sous-faisceau de $(R^1 \overline{f}_*)\overline{F}$ image inverse de $e_i$, de sorte que $(R^1 \overline{f}_*)\overline{F} = \coprod_i D_i$. Il suffit de démontrer que chacun des faisceaux $D_i$ induit un faisceau constructible sur un S'/S étale connexe et non-vide convenable. Si $D_i$ n'est pas le "faisceau vide", on se ramène au cas où il existe un élément $\alpha \in H^1(\overline{X}, \overline{F})$ qui induit une section $\overline{\alpha}$ de $D_i$. Soit

$$0 \longrightarrow (R^1 f_*)\, \pi_* \overline{F} \longrightarrow (R^1 \overline{f}_*)\overline{F} \longrightarrow f_*(R^1 \pi_*)\overline{F}$$

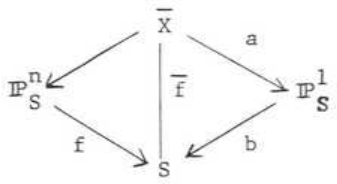
la suite exacte déduite de (*) en tordant $\overline{F}$ à l'aide de $\alpha$. La section de $(R^1 \overline{f}_*)\overline{F}^{\alpha}$ correspondant à $\overline{\alpha}$ est la section unité, et par suite le sous-faisceau $D_i^{\alpha}$ de $(R^1 \overline{f}_*)\overline{F}^{\alpha}$ correspondant à $D_i$ est l'image inverse de la section unité de

...

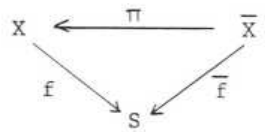
$f_*(R^1\pi_*)\ \overline{F}^{\alpha}$, d'où $D_i^{\alpha} \xrightarrow{\sim} (R^1 f_*)\ \pi_* \overline{F}^{\alpha}$ , qui est bien un faisceau constructible, cqfd.

Lemme 1.10. Il suffit de vérifier 1.1 dans le cas où S est de type fini sur Spec $\mathbb{Z}$ , et f est projectif et de dimension relative $\leq 1$.

Démonstration. Supposons d'abord que f soit projectif et procédons par récurrence sur la dimension relative de f, qu'on peut supposer finie, quitte à remplacer S par un ouvert affine. Si f est de dimension relative $\leq n$, avec $n \geq 2$, on peut trouver, localement sur S, un morphisme fini $\pi : X \longrightarrow \mathbb{P}_S^n$ , et on se ramène par 1.9 et IX 2.15 (i) au cas où f est le morphisme structural de $\mathbb{P}_S^n$ . Considérons le diagramme commutatif de morphismes




déjà envisagé dans la démonstration de XII 8.3, où $\overline{X}$ est déduit de $\mathbb{P}_S^n$ en faisant éclater le sous-schéma fermé $Y \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_S^{n-2}$ . La dimension relative de b est $\leq 1$, celle de a est $\leq n-1$, et par suite le théorème est vrai pour a et b par l'hypothèse de récurrence, donc pour $\overline{f}$ par (1.9). De plus, la dimension de $\pi$ est $\leq 1$, celle de $f_o : Y \longrightarrow S$ est $\leq n-1$. Il résulte donc de 1.7 que 1.1 est vrai pour f, donc pour tout morphisme projectif. Soit maintenant f propre arbitraire, et procédons par récurrence noethérienne sur X : on peut supposer le théorème vrai pour chaque sous-schéma fermé distinct de X et que $X \neq \emptyset$ . Soit



un diagramme du type donné par le lemme de Chow XII 7.1. En appliquant 1.7 à ce diagramme, on déduit 1.1 pour f, d'où le lemme.

1.11. Nous pouvons maintenant achever la démonstration de 1.1. Si F est un faisceau de groupes constructibles, on peut trouver une injection $F \hookrightarrow G = \coprod_i \pi_{i*}C_i$ avec $\pi_i$ fini et $C_i$ constant et constructible (IX 2.15), et il résulte de 1.8 qu'on peut supposer F constant. De même, si F est un faisceau de A-modules constructible, on peut, en appliquant IX 2.15, trouver une résolution $F \to G^\cdot$, $G^\cdot = \{0 \to G^0 \to G^1 \to G^2 \to \ldots\}$, de F, telle que chaque $G^\nu$ soit de la forme $G^\nu = \coprod_i \pi_{i*}C_i$, et on se réduit par la suite spectrale de la résolution $G^\cdot$,

$$E_2^{p,q} = H^q((R^q f_*)G^\cdot) \Longrightarrow (R^n f_*)F \quad ,$$

au cas où F est constant et constructible, à valeur M.

Rappelons que A est une $\mathbb{Z}/n$-algèbre. Soit $\ell$ un nombre premier qui divise n. On a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \ell M \longrightarrow M \longrightarrow M/\ell M \longrightarrow 0 \quad ,$$

et il suffit encore de prouver 1.1 pour $\ell M$ et $M/\ell M$.

On se réduit alors, par une récurrence facile, au cas A est une $\mathbb{Z}/\ell$-algèbre, $\ell \in \mathbb{P}$, et où M est un A-module de type fini. Alors M est un espace vectoriel sur $\mathbb{Z}/\ell$, et par suite le morphisme canonique

$$H^q(Y,\mathbb{Z}/\ell) \otimes_{\mathbb{Z}/\ell} M \longrightarrow H^q(Y,M)$$

est bijectif, quel que soit Y quasi-compact et quasi-séparé (en effet, c'est trivial si M est de rang fini, et les deux membres commutent aux limites

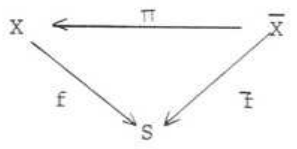
inductives (VI 1.6)), donc

$$[R^q f_* (\mathbb{Z}/\ell)] \otimes_{\mathbb{Z}/\ell} M \xrightarrow{\sim} R^q f_* (M).$$

Il suffit donc évidemment de démontrer que $R^q f_* (\mathbb{Z}/\ell)$ est constructible en tant que $\mathbb{Z}/\ell$-Module, c'est-à-dire, on est réduit au cas $A = \mathbb{Z}/\ell$, ce que nous supposons désormais.

Notons que le cas où F est de dimension relative $\leq 0$ (i.e. où f est fini) et F est arbitraire résulte maintenant de VIII 5.6 et de 1.5.

Procédons par récurrence noethérienne sur S. D'après 1.6, on peut supposer $S \neq \emptyset$, et se permettre de remplacer S par un ouvert non-vide quelconque. De plus, on peut supposer S intègre, de point générique s. La fibre $X_s$ est un schéma algébrique de dimension $\leq 1$, et par suite il existe une extension radicielle K' de $k(s) = K$, telle que le normalisé Y de $(X_s \otimes_K K')_{réd}$ soit lisse au-dessus de Spec K' (*). En remplaçant S par un ouvert non-vide, on peut supposer qu'il existe un morphisme fini radiciel surjectif $S' \to S$ tel que $S'_s$ soit K-isomorphe à Spec K', et un morphisme fini surjectif, un morphisme lisse et projectif $\overline{X}' \longrightarrow S'$ et un S'-morphisme fini surjectif $\pi : \overline{X}' \longrightarrow X' = X \times_S S'$ qui induise $Y \longrightarrow X_S \otimes_K K'$ sur les fibres en le point générique s de S (EGA IV 9.6.1). Or d'après VIII 1.1 il est inoffensif de faire une extension radicielle. On peut donc remplacer S par S' et X par X', c'est-à-dire, on peut supposer que f s'insère dans un diagramme




,

(*) Cf. EGA IV 17.15.14.

où $\pi$ est surjectif et fini, et $\bar{f}$ est lisse. De plus, d'après la construction, on peut supposer qu'il existe un sous-schéma fermé Y de X tel que la fibre générique de Y soit finie, et tel que $\pi$ induise un isomorphisme au-dessus de X - Y. En remplaçant encore S par un ouvert non-vide, on se ramène au cas où de plus $f_o : Y \longrightarrow S$ est un morphisme fini.

Comme F est constant, $\pi^*F$ est également constant, et $F \to \pi_*\pi^*F$ est injectif parce que $\pi$ est surjectif. Si F est un faisceau de groupes, il suffit de démontrer que $(R^1f_*)(\pi_*\pi^*F) \xrightarrow{\sim} (R^1\bar{f}_*)(\pi^*F)$ est constructible (1.8). Si F est un faisceau de $\mathbb{Z}/\ell$-modules, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow \pi_*\pi^*F \longrightarrow C \longrightarrow 0 \quad ,$$

où C est concentré sur Y, parce que $\pi$ induit un isomorphisme au-dessus de X - Y. Il s'ensuit que $R^qf_*C = R^qf_{o*}C$ est constructible (nul si $q > 0$), et ainsi il suffit encore de démontrer que $(R^qf_*)(\pi_*\pi^*F) = (R^q\bar{f}_*)(\pi^*F)$ est constructible. En remplaçant f par $\bar{f}$ et F par $\pi^*F$, on est réduit au cas F constant et constructible et f est lisse.

Traitons le cas d'un faisceau de groupes constant, $f = G_X$. Toutes les fibres de $(R^1f_*)G_X$ sont finies ; en effet, en appliquant XII 5.2 (ii) on est réduit, pour le prouver, au cas où S est le spectre d'un corps séparablement clos et où X est lisse et de dimension $\leq 1$ au-dessus de S. Le résultat est connu dans ce cas (SGA 1 X 2.6). Il suffit donc de démontrer que les morphismes de spécialisation sont injectifs (IX 2.13 (ii)). Pour cela, on est réduit au cas S strictement local, et par le théorème de changement de base XII 5.1 (ii) on peut même remplacer S par le spectre d'un anneau de valuation discrète et strictement local. De plus, on peut supposer X connexe.

Puisque $H^1(X,G)$ classifie les revêtements principaux galoisiens de X de groupe G, il suffit de vérifier que si $X' \longrightarrow X$ est un revêtement étale connexe alors la fibre géométrique est également connexe. Cela résulte facilement du fait que f est lisse et propre, à fibres géométriques connexes.

Traitons maintenant le cas $F = (\mathbb{Z}/\ell)_X$ . Pour les valeurs 0 et 1 de q le résultat est déjà connu((1.5) et ci-dessus). D'après X 4.3 et XII 5.3 bis, il reste seulement le cas q = 2, et de plus, si S est de caractéristique $\ell$, on a $R^2f_*(\mathbb{Z}/\ell) = 0$. En remplaçant S par un ouvert non-vide convenable, on est donc réduit au cas où $\ell$ est inversible sur S. Alors, d'après XII 5.2 (ii) et X 4.7, la fibre de $R^2f_*(\mathbb{Z}/\ell)$ en un point géométrique $\overline{s}$ au-dessus de s S est isomorphe à $(\mathbb{Z}/\ell)^{c(s)}$, où c(s) est le nombre des composantes irréductibles de dimension 1 de la fibre géométrique $X_{\overline{s}}$ . Or c est une fonction constructible sur S (EGA IV 9.7.9), d'où le résultat (IX 2.13 (iii)).

Remarque 1.11. La démonstration de 1.1 se simplifie beaucoup en utilisant le formalisme de la cohomologie à supports propres, qui sera développé dans XVII comme conséquence directe du théorème de changement de base pour un morphisme propre XII 5.1. D'autre part, l'énoncé 1.1 se généralise au cas où on se donne sur Y un faisceau quelconque d'anneaux de torsion $\underline{A}$, et qu'on prend sur X un complexe $K^\cdot$ de $f^*(\underline{A})$-Modules satisfaisant une condition de "constructibilité" qui, dans le cas particulier 1.1, s'exprimerait simplement en disant que des faisceaux de cohomologie $\mathcal{H}^i(K^\cdot)$ de $K^\cdot$ sont des A-modules constructibles, nuls pour i assez grand.

2. Une variante de la dimension.

2.1. Soit X un schéma. On va noter

(2.1.1) $\qquad d(x) = \dim \overline{\{x\}}$

pour $x \in X$, où $\overline{\{x\}}$ est l'adhérence de $\{x\}$. Si F est un faisceau abélien sur X, on pose

(2.1.2) $\qquad d(F) = \sup \{ d(x) \mid x \in X \text{ et } F_{\overline{x}} \neq 0 \}$ .

On aura besoin d'une notion rectifiée dans le cas local :

Définition 2.2. Soient Y le spectre d'un anneau local noethérien universellement caténaire (EGA IV 5.6.2) et $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de type fini. Soit $x \in X$ et $y = f(x)$. On pose

$$\delta(x) = \dim \overline{\{y\}} + \text{deg. tr. } k(x)/k(y) \quad .$$

Si F est un faisceau abélien sur X, on pose

$$\delta(F) = \sup \{ \delta(x) \mid x \in X \text{ et } F_{\overline{x}} \neq 0 \} \quad .$$

Proposition 2.3. (i) Soit $i : X' \longrightarrow X$ une immersion et $x' \in X'$. Alors $\delta(i(x')) = \delta(x')$.

(ii) Soit $X_o$ la fibre fermée de X/Y. On a

$$\delta(x) = \begin{cases} d(x) & \text{si } \overline{\{x\}} \cap X_o \neq \emptyset \\ d(x)+1 & \text{si } \overline{\{x\}} \cap X_o = \emptyset \end{cases} ;$$

(iii) $\qquad \delta(x) = d(x)$ $\qquad$ si f est propre.

Démonstration. L'assertion (i) est triviale à partir de la définition. Puisque $\overline{\{x\}} \cap X_o$ n'est pas vide dans le cas f propre, (iii) est conséquence de (ii). Pour (ii), nous pouvons remplacer X par $\overline{\{x\}}$ et Y par $\overline{\{y\}}$ (avec la structure induite réduite), ce qui est permis d'après (i). Soient $x' \in X'$ et $y' = f(x')$. On a la formule (EGA IV 5.6.1.1)

$$\dim O_{X,x'} = \dim O_{Y,y'} + \text{deg.tr.}k(x)/k(y) - \text{deg.tr.}k(x')/k(y') \quad .$$

Supposons que $X_o \neq \emptyset$ . Alors il est clair que $\sup_{x'} \{\dim O_{X,x'}\} = \dim X$ est obtenu en prenant pour x' un point fermé de $X_o$, d'où

$$\dim X = \dim O_{X,x'} = \dim Y + \text{deg.tr.}k(x)/k(y) = \delta(x) \quad .$$

Si $X_o = \emptyset$, le supremum est évidemment obtenu en prenant pour x' un point fermé dans sa fibre $f^{-1}(y')$, tel que $\dim\overline{\{y'\}} = 1$. Il existe de tels points, parce que les $y' \in Y$ avec $\dim\overline{\{y'\}} = 1$ forment un ensemble très dense (EGA IV 10.1.3, 10.5.9, 1.8.4). On a donc :

$$\dim X = \dim O_{X,x'} = \dim O_{Y,y'} + \text{deg.tr. } k(x)/k(y)$$

$$= \dim Y - 1 + \text{deg.tr. } k(x)/k(y) = \delta(x) = 1 \quad ,$$

d'où le résultat.

Proposition 2.4. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de schémas de type fini sur le spectre d'un corps k. Soient $x \in X$, $y = f(x)$, et $y_o$ une spécialisation de y. Soient $f' : X' \longrightarrow Y'$ le localisé strict de f en un point géométrique $\overline{y}_o$ au-dessus de $y_o$, et $x' \in X'$ un point au-dessus de x. Alors on a

$$\delta(x') = d(x) - d(y_o) \quad .$$

Démonstration. On a

$$d(x) = d(y) + \text{deg.tr. } k(x)/k(y)$$

$$\delta(x') = d(y') + \text{deg.tr. } k(x')/k(y') \ ,$$

où $y' = f'(x')$. De plus

$$\text{deg.tr. } k(x)/k(y) = \text{deg.tr. } k(x')/k(y') \quad ,$$

parce que les extensions $k(x')/k(x)$ et $k(y')/k(y)$ sont algébriques. Il reste donc à démontrer que

$$d(y') = d(y) - d(y_o) \quad .$$

On peut supposer y maximal dans Y, donc y' maximal dans Y', et alors

$$d(y') = \dim \underline{O}_{Y',\overline{y}_o}$$

$$= \dim \underline{O}_{Y,y_o} \quad \text{(EGA IV 6.1.3)}$$

$$= \dim Y - d(y_o) \quad \text{(EGA IV 5.2.3.1)}$$

$$= d(y) = d(y_o) \quad ,$$

d'où le résultat.

3. Dimension cohomologique des schémas algébriques affines.

Théorème 3.1 (d). Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme affine de schémas de type fini sur un corps k. Soit F un faisceau de torsion sur X tel que $d(F) \leq d$ (cf. 2.1). Alors $d(R^q f_* F) \leq d-q$.

En particulier, prenant $Y = \text{Spec}(k)$ :

Corollaire 3.2. Soit X un schéma affine de type fini sur un corps k séparablement clos. Alors

$$\mathrm{cd}\, X \leq \dim X .$$

Corollaire 3.3. Soit $X \subset \mathbb{P}^N_k$ un schéma projectif de dimension n sur un corps séparablement clos k, et soit $Y = H \cap X$ une "section hyperplane" de X. Alors pour tout faisceau de torsion F sur X, l'homomorphisme canonique

$$H^q_Y(X,F) \longrightarrow H^q(X,F)$$

est bijectif pour $q > n+1$, et surjectif pour $q = n+1$.

Le corollaire est trivial à partir de 2.2 et de la suite exacte pour un sous-ensemble fermé (IV 3.7.1), compte tenu que $X - Y = U$ est affine de dimension $\leq n$. Remarquons que 3.3 est une généralisation d'un des théorèmes de Lefschetz sur les sections hyperplanes : en effet, si X est lisse sur k et F est localement constant et premier à la caractéristique, on peut calculer la cohomologie $H^q_Y(X,F)$ explicitement en utilisant le théorème de pureté cohomologique relatif (XVI 3) et la suite spectrale ( ), et on trouve que

$$H^q_Y(X, \mathbb{Z}/n) \xrightarrow{\sim} H^{q-2}(Y, \mu_n^{-1}) \quad \text{pour tout } q \ ;$$

l'homomorphisme $H^{q-2}(Y, \mu_n^{-1}) \longrightarrow H^q(X, \mathbb{Z}/n)$ déduit de 3.3 n'étant autre que l' "homomorphisme de Gysin", qui sera étudié ultérieurement (*).

Le théorème 3.1 (d) équivaut au suivant :

Corollaire 3.4 (d). Soit Y' un schéma strictement local qui est un localisé strict d'un schéma algébrique sur un corps. Soit $f' : X' \longrightarrow Y'$ un morphisme

(*) Cf. SGA 2 XIV pour une étude systématique des théorèmes du type de Lefschetz.

affine de type fini, et F' un faisceau de torsion sur X' tel que $\delta(F') \leq d$ (cf. (2.2)). Alors $H^q(X',F') = 0$ pour $q > d$.

En effet, supposons que 3.4 (d) soit vrai. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme affine de schémas algébriques sur k et soit F un faisceau de torsion sur X tel que $d(F) \leq d$. Soit y un point de Y et $\xi$ un point géométrique au-dessus de y. Pour démontrer 2.1 (d) , il faut démontrer que la fibre $(R^q f_* F)_\xi$ est nulle si $d(y) > d-q$.

Soit $f' : X' \longrightarrow Y'$ le localisé strict de f au point $\xi$, c'est-à-dire, soit Y' le localisé strict de Y en $\xi$ et soit $X' = X \times_Y Y'$.

Soit F' le faisceau induit de F sur X, de sorte que $(R^q f_* F)_\xi = H^q(X',F')$ (VIII 5.2). On a

$$\delta(F') \leq d(F) - d(y) \leq d - d(y) \qquad (2.4) \ ,$$

et en appliquant 3.4 (d), on trouve $H^q(X',F') = 0$ si $q > d - d(y)$, d'où le résultat.

Inversement, supposons que 2.1 (d) soit vrai, et soient F', $f' : X' \longrightarrow Y'$ comme dans l'énoncé de 3.4 (d). Puisque la cohomologie commute aux limites inductives (VII 3.3) et F' est limite inductive de ses sous-faisceaux constructibles (IX 2.9), on peut supposer F' constructible. Or Y' est localisé strict d'un schéma algébrique Y en un point géométrique $\xi$ au-dessus d'un point fermé $y_o$ (X 3.3). Ecrivons $Y' = \varprojlim_\alpha Y_\alpha$ , où $(Y_\alpha)$ est un système projectif filtrant de schémas affines étales sur Y (VIII 4.5). D'après IX 2.7.4, F' est induit d'un faisceau de torsion constructible sur $X = X \times_Y Y_K$ pour $\alpha$ suffisamment grand, et on voit immédiatement, utilisant 2.4

et EGA IV 9.5.5, qu'on peut de plus supposer que $d(F_\alpha) = \delta(F') \leq d$. En remplaçant Y par $Y_\alpha$, on est réduit au cas où F' est induit par un faisceau F sur X, avec $d(F) \leq d$. On a alors $R^q f_* F = 0$ si $q > D$, d'après 2.1 (d), donc en particulier

$$(R^q f_* F)_{\bar{\xi}} = H^q(X', F') = 0 \text{ si } q > d,$$

d'où 3.4 (d).

Comme cas particulier de 3.4 (d), on a

Corollaire 3.5. Soit Y' un schéma strictement local de dimension $\leq d$, localisé strict d'un schéma algébrique sur un corps k. Soit $U \subset Y'$ un ouvert affine. Alors $cd\, U \leq d$.

Remarque 3.6. Il semble très plausible que 3.4, donc 3.5, reste valable pour tout schéma local noethérien Y' (pas nécessairement un localisé strict d'un schéma algébrique), du moins si Y' est excellent (EGA IV 7.8). C'est ce qui sera prouvé dans (XX 6) lorsqu'on suppose de plus Y de caractéristique nulle.

4. Démonstration du théorème 3.1.

La démonstration se fait par récurrence sur d.

Lemme 4.1. 3.1 (0) et 3.1 (1) sont vrais.

Démonstration. Triviale pour d = 0, auquel cas supp F est fini sur k, et on applique (VIII 5.5). Soient F , $f : X \longrightarrow Y$ comme dans l'énoncé de 3.1 et supposons que $d(F) \leq 1$. En remplaçant F par un sous-faisceau constructible (IX 2.9 et VII 3.3), on se réduit au cas où F est constructible. Alors le

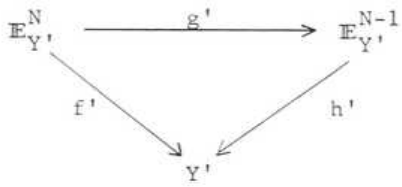
support de F est contenu dans un sous-schéma fermé de X de dimension $\leq 1$ (IX 2.3 (ii)), et on peut remplacer X par ce sous-schéma, c'est-à-dire, on peut supposer qu'on a dim $X \leq 1$. D'après IX 5.7, la dimension cohomologique d'un schéma algébrique affine de dimension 1 sur un corps séparablement clos est $\leq 1$. Il suffit d'ailleurs de traiter le cas où k est séparablement clos : en effet, soit $\overline{f} : \overline{X} \longrightarrow \overline{Y}$ le morphisme déduit de f par le changement de base Spec $\overline{k} \longrightarrow$ Spec k ($\overline{k}$ la clôture séparable de k). Pour un point géométrique $\xi$ de Y, le localisé strict $f' : X' \longrightarrow Y'$ de f en $\xi$ s'identifie à un localisé strict de $\overline{f}$, donc la fibre $(R^q f_* F)_\xi$ à une fibre de $R^q \overline{f}_* \overline{F}$. Puisque f est affine, on trouve donc que $R^q f_* F = 0$ si $q > 1$. De plus, il est évident que $d(f_* F) \leq 1$. Pour le cas $q = 1$, notons que l'hypothèse que X soit de dimension $\leq 1$. Pour le cas $q = 1$, notons que l'hypothèse que X soit de dimension $\leq 1$ implique qu'il existe une partie fermée finie Z de Y telle que f soit fini au-dessus de $Y - Z$. Il en résulte que $R^1 f_* F$ est nul dans $Y - Z$ (VIII 5.6), d'où $d(R^1 f_* F) \leq 1$, ce qui achève la démonstration du lemme.

Soit $d \geq 2$ et supposons maintenant que 3.1 (d') (ou, ce qui revient au même, 3.4 (d')) est vrai pour $d' < d$.

Lemme 4.2. Pour démontrer 3.4 (d) dans tous les cas, il suffit de traiter le cas où $X' = \mathbb{E}^1_{Y'}$ est l'espace affine dimension 1 sur Y', et où f est le morphisme structural.

Démonstration. Evidemment, on peut supposer $X' = \mathbb{E}^N_{Y'}$ pour n convenable, parce qu'on peut plonger X' dans un $\mathbb{E}^N_{Y'}$. Supposons $N > 1$ et le résultat connu pour tout Y' et pour $\mathbb{E}^r_{Y'}$ avec $r < N$. Soit F' un faisceau de torsion sur $\mathbb{E}^N_{Y'}$,

avec $d(F') \leq d$. Considérons le diagramme




,

g' et h' les projections canoniques, de sorte que $\mathbb{E}^N_{Y'}$ est isomorphe à l'espace affine de dimension 1 au-dessus de $\mathbb{E}^{N-1}_{Y'}$. Puisque évidemment chaque anneau localisé strict de $\mathbb{E}^{N-1}_{Y'}$ est aussi le localisé strict d'un schéma algébrique, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence aux fibres de $R^q g'_* F'$, et on trouve que

$$(*) \qquad \delta(R^q g'_* F') \leq d-q \quad .$$

De plus, 3.4 (d') est vrai pour h' , $d' \leq d$, par l'hypothèse de récurrence sur N.

Considérons la suite spectrale de Leray

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathbb{E}^{N-1}_{Y'}, R^q g'_*(F')) \Longrightarrow H^n(\mathbb{E}^N_{Y'}, F') \quad .$$

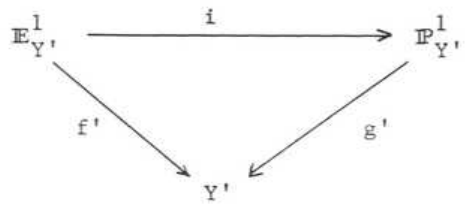
On a $E_2^{p,q} = 0$ si $p > d-q$, comme on trouve en appliquant (*) et 3.4 (d') au morphisme h'. Il s'ensuit que l'aboutissement est nul si $n > d$, d'où le lemme.

Considérons l'énoncé supplémentaire suivant, qui est un cas spécial de 3.5 :

Enoncé 4.3 (d) : Soit X' strictement local de dimension $\leq d$, localisé strict d'un schéma algébrique sur un corps. Soit $f \in \Gamma(X', \underline{O}_{X'})$ et soit $U \subset X'$ l'ouvert $U = X' - V(f)$. Alors $\operatorname{cd} U \leq d$.

Lemme 4.4. 4.3 (d) implique 3.4 (d).

Démonstration. Considérons le diagramme




où Y' est comme dans l'énoncé de 2.6 et où $\mathbb{P}^1_{Y'}$ est l'espace projectif, déduit de $\mathbb{E}^1$ "en ajoutant la section $Y'_\infty$ à l'infini". Soit F' un faisceau de torsion sur $\mathbb{E}^1$ avec d(supp F') ≤ d. On a la suite spectrale

$$H^p(\mathbb{P}^1, R^q i_* F') \Longrightarrow H^n(\mathbb{E}^1, F') \quad .$$

Or les $R^q i_* F$, pour q > 0, sont concentrés sur $Y'_\infty$, qui est Y'-isomorphe à Y'. Puisque Y' est strictement local, il s'ensuit que $H^p(\mathbb{P}^1, R^q i_* F') = 0$ si p,q > 0. De plus, d'après le <u>théorème de changement de base pour un morphisme propre</u> (XII 5.1), la cohomologie d'un faisceau de torsion sur $\mathbb{P}^1$ peut-être calculée sur la fibre fermée, qui est un schéma de dimension cohomologique ≤ 2 (X 4.3). On a donc $H^p(\mathbb{P}^1, i_* F') = 0$, si p > 2. Comme on veut démontrer $H^n(\mathbb{E}^1, F') = 0$ pour n > d, et comme d ≥ 2, on est réduit à démontrer que $H^o(\mathbb{P}^1, R^q i_* F') = 0$ pour q > d. Ce groupe, isomorphe aussi à $H^o(Y'_\infty, R^1 i_*(F'))$, est en vertu de (VIII 4.6) isomorphe à la fibre de $R^q i_* F'$ au point Q, Q étant le point à l'infini de $\mathbb{P}^1$ dans la fibre fermée.

Il suffit (VII 3.3 et IX 2.9) de traiter le cas où F' est constructible. Alors, puisque δ(supp F') ≤ d, il existe un sous-schéma fermé X' de $\mathbb{P}^1$ avec dim X' ≤ d, tel que X' contienne le support de F'. Soit $\widetilde{X}'$ le localisé de X' au point géométrique Q, soit $\widetilde{U} = \widetilde{X}' - \widetilde{X} \times_{\mathbb{P}^1} Y'_\infty$, et soit F le

faisceau induit par F' sur U par le morphisme $\widetilde{U} \longrightarrow \mathbb{P}^1$. Alors la fibre de $R^q i_* F$ au point Q n'est autre que $H^p(\widetilde{U},\widetilde{F})$ (VIII 5.2), et on applique 4.3 (d) au schéma strictement local X' et à l'ouvert $\widetilde{U}$.

Le lemme ci-dessous, joint à 4.4, achèvera la démonstration.

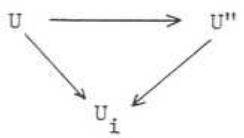
Lemme 4.5. 3.4 (d') pour d' < d implique 4.3 (d') pour d' ≤ d.

Démonstration. Supposons 3.4 (d') pour d' < d. Par récurrence, nous pouvons supposer que 4.3 (d') est vrai pour d' < d. Soient les données X',f,U comme dans l'énoncé 4.3 (d). Alors X est localisé strict d'un schéma algébrique $X_o$ sur un corps k en un point géométrique fermé. On peut prendre $X_o$ affine et de dimension ≤ d, quitte à le remplacer par un voisinage de $x_o$. Alors X est limite projective de schémas affines et étales $X_i$ au-dessus de $X_o$ (VIII 4.5).

Soit F un faisceau de torsion sur U. Il faut démontrer que $H^q(U,F) = 0$ si $q > d$, et il suffit encore de traiter le cas où F est constructible. Alors les données f, F, U proviennent de données analogues sur l'un des $X_i$ (IX 2.7). On aura un faisceau $F_i$ sur $U_i = X_i - V(f_i)$ qui "induit" F sur U. Puisque $U = \varprojlim U_i$, on a (VII 5.8)

$$H^q(U,F) = \varinjlim H^q(U_i,F_i) \quad .$$

Il suffit donc de démontrer le fait suivant : Quel que soit i, il existe un diagramme commutatif




où $U \longrightarrow U_i$ est la flèche donnée, tel que $cd(U") < d$. En effet, cela impliquera

que chaque élément de $H^q(U_i,F_i)$, pour $q > d$, a une image nulle dans $H^q(U,F)$.

Supposons $i = 0$, et considérons le morphism $g : X_o \longrightarrow \mathbb{E}^1_k = Y_o$ donnée par $f_o \in \Gamma(X_o, \underline{O}_{X_o})$. Soit Y" le localisé strict de $\mathbb{E}^1_k$ en un point géométrique au-dessus de l'origine, donc Y" est le spectre d'un anneau de valuation discrète, et soit $X" = X_o \times_{Y_o} Y"$.

Le morphisme $X \longrightarrow X_o$ se factorise par X" puisque X est strictement local. De plus, l'ouvert $U" = X" \times_{X_o} U_o$ n'est autre que la fibre générique de X"/Y". C'est donc un schéma algébrique affine au-dessus du point générique de Y', et on a évidemment dim U" $\leq$ d-1.

Vérifions que cd U" $\leq$ d (ce qui achèvera la démonstration). Soit K le corps résiduel de Y" au point générique. C'est un corps de dimension cohomologique 1, c'est-à-dire, on a cd(G) = 1, G le groupe de Galois de la clôture séparable $\overline{K}$ de K (X 2.2). Soit $\overline{U}" = U" \times_{\text{Spec } K} (\text{Spec } \overline{K})$. On a cd $\overline{U}"$ $\leq$ d-1 par hypothèse de récurrence sur d (c'est 2.2 pour un schéma de dimension $\leq$ d). Le fait que cd U" $\leq$ d suit alors de la suite spectrale de Hochschild-Serre (VIII 8.4)

$$H^q(G,H^q(\overline{U}',\overline{F})) \Longrightarrow H^n(U,F) \quad ,$$

d'où le lemme 4.5.

E X P O S E XV

# MORPHISMES ACYCLIQUES

par M. ARTIN

## Introduction.

Soit $g : X \longrightarrow Y$ un morphisme de schémas. Dans le premier numéro, nous étudions des conditions pour que $g$ soit acyclique, c'est-à-dire, tel que pour tout faisceau de torsion $F$ sur $Y$ on ait $H^q(Y,F) \xrightarrow{\sim} H^q(X,g^*F)$ , et que cela reste vrai si l'on remplace $Y$ par un $Y'$ étale sur $Y$ . Une condition naturelle nécessaire d'acyclicité est que les fibres géométriques soient acycliques, c'est-à-dire, aient une cohomologie triviale pour des faisceaux de torsion constants. On verra que cette condition, jointe à une condition locale, appelée acyclicité locale de $f$ 1.11 , implique que $f$ est acyclique.

Le théorème fondamental est qu'un morphisme lisse est localement acyclique pour les faisceaux de torsion premiers aux caractéristiques résiduelles 2.1 , ce qui impliquera le théorème de changement de base par un morphisme lisse XVI 1.1 , qui sera développé, avec ses premières conséquences, dans l'exposé suivant.

Le présent exposé est indépendant des exposés XI à XIV, et notamment du "théorème de changement de base pour un morphisme propre". Ce dernier interviendra à nouveau de façon essentielle, mais en conjonction avec le théorème fondamental du présent exposé, à partir de l'exposé suivant.

## 1. Généralités sur les morphismes globalement et localement acycliques

Proposition 1.1. Soit $g : X \longrightarrow Y$ un morphisme de schémas. Les assertions (i) à (iii) suivantes sont équivalentes :

(i) Pour chaque $Y' \longrightarrow Y$ étale (qu'on peut prendre affine au-dessus d'un ouvert affine de Y) et chaque faisceau d'ensembles F sur Y' , le morphisme canonique $F \longrightarrow g'_*g'^*F$ est injectif (resp. bijectif).

(ii) Pour chaque $Y' \longrightarrow Y$ étale (qu'on peut prendre affine au-dessus d'un ouvert affine de Y) et chaque faisceau d'ensembles F sur Y' , le morphisme canonique $H^0(Y',F) \longrightarrow H^0(X',g'^*F)$ est injectif (resp. bijectif).

(iii) Pour chaque $Y' \longrightarrow Y$ localement quasi-fini et chaque faisceau d'ensembles F sur Y' , le morphisme canonique $H^0(Y',F) \longrightarrow H^0(X',g'^*F)$ est injectif (resp. bijectif).

(ii bis) (Si f est quasi-compact et quasi-séparé). Comme (ii), mais en prenant F faisceau constant de la forme $I_{Y'}$ , où I est un ensemble donné au préalable, avec card $I \geqslant 2$ .

Démonstration. L'équivalence de (i) et (ii) est immédiate à partir des définitions, et (iii) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (ii bis) sont triviales. On a (ii bis) $\Longrightarrow$ (ii) , car on peut supposer Y affine, donc X et Y quasi-compacts et quasi-séparés, et on peut alors appliquer XII 6.5 (i) . Pour l'implication (i) $\Longrightarrow$ (iii) , notons d'abord le lemme suivant :

Lemme 1.2. Soit $f : Y' \longrightarrow Y$ un morphisme localement quasi-fini. Alors $f$ est "fini localement sur $Y'$ pour la topologie étale", c'est-à-dire, on a des diagrammes commutatifs

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} Y_i' & \xrightarrow{a_i} & Y' \\ \downarrow{\scriptstyle b_i} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y_i & \xrightarrow{c_i} & Y \end{array}$$

où les $a_i$ , $c_i$ sont étales, les $b_i$ sont finis, et les $a_i$ forment un recouvrement de $Y'$ (*).

En effet, soit $y'$ un point de $Y'$ et $y = f(y')$ . Il suffit de trouver un diagramme (*) tel que $y'$ soit dans l'image de $Y_i'$ . Soit $\tilde{Y}$ le spectre de l'anneau hensélisé de $\underline{O}_{Y,y}$ VIII 4.1 et $Z$ le localisé (ordinaire)de $\tilde{Y}' = Y' \times_Y \tilde{Y}$ en l'unique point au-dessus de $y'$ et du point fermé $\tilde{y}$ de $\tilde{Y}$ . D'après VIII 4.1 (ii) , $Z \longrightarrow \tilde{Y}$ est fini, et $Z$ est un ouvert induit de $\tilde{Y}'$ . Puisque $\tilde{Y}$ est limite de préschémas $Y_i$ étales au-dessus de $Y$ , on voit immédiatement EGA IV 9 que pour $Y_i$ convenable il existe un ouvert $Z_i$ de $Y' \times_Y Y_i$ , tel que $Z = Z_i \times_{Y_i} \tilde{Y}$ , et dans (*) il suffira de prendre $Y_i' = Z_i$ , c.q.f.d.

Supposons maintenant que (i) de 1.1 soit vrai. Il est évident que l'assertion (iii) de 1.1 équivaut à l'assertion déduite de (i) en remplaçant le morphisme $Y' \longrightarrow Y$ étale par un morphisme localement quasi-fini. Sous cette forme, l'assertion (pour $Y$, $Y'$ donnés) est locale sur $Y$ et $Y'$ pour la topologie étale, et on est donc réduit par le lemme au cas d'un morphisme $f : Y' \longrightarrow Y$

(*) Cf. EGA IV 18.12.1.

fini. Soit $f' : X' \longrightarrow X$ le morphisme déduit de $f$ par le changement de base $g$. Alors le morphisme de changement de base $g^*f_*F \longrightarrow f'_*g'^*F$ est bijectif VIII 5.6. D'après (i), on a $f_*(F) \longrightarrow g_*g^*f^*F)$. Par suite le morphisme $H^0(Y',F) \xrightarrow{\varepsilon} H^0(Y',g'_*g'^*F)$ de (iii) est le composé $H^0(Y',F) = H^0(Y,f_*F) \xrightarrow{\varepsilon'} H^0(Y,g_*g^*f_*F) = H^0(X,g^*f_*F) \simeq H^0(X,f'_*g'^*F) = H^0(X',g'^*F)$. Puisque $\varepsilon'$ est injectif (resp. bijectif) il en est de même de $\varepsilon$. Cela achève la démonstration de 1.1.

Définition 1.3. On appelle morphisme (-1)-acyclique (resp. 0-acyclique) un morphisme $g : X \longrightarrow Y$ ayant une des propriétés équivalentes (i) à (iii) (resp. (i) à (iii) respées) de 1.1. Le morphisme est dit universellement (-1)-acyclique (resp. 0-acyclique) si pour chaque morphisme de changement de base $Y' \longrightarrow Y$, le morphisme $g' = g \times_Y Y' : X \times_Y Y' \longrightarrow Y'$ est (-1)-acyclique (resp. 0-acyclique). Enfin, un schéma $X$ est dit (-1)-acyclique (resp. 0-acyclique) s'il est non-vide (resp. connexe et non vide).

Corollaire 1.4. Soit $g : X \longrightarrow Y$ un morphisme 0-acyclique. Alors pour chaque $Y' \longrightarrow Y$ localement quasi-fini et chaque faisceau en groupes $F$ sur $Y'$, le morphisme canonique

$$H^1(Y',F) \longrightarrow H^1(X',g'^*F)$$

est injectif.

Cela résulte aussitôt de XII 6.5 (i).

Corollaire 1.5. Soit $g : X \longrightarrow Y$ un morphisme. Si $g$ est surjectif (i.e. ses fibres sont non vides, i.e. ses fibres sont (-1)-acycliques) alors $g$ est (-1)-acyclique. La réciproque est vraie si $g$ est quasi-compact et quasi-séparé.

La première assertion est évidente sur la forme 1.1 (ii) par considération des fibres des faisceaux envisagés. La deuxième résulte de la définition sous la forme 1.1 (iii) et du sorite de passage à la limite VII 5 , compte tenu que pour tout $y$ $Y$ , $y = \mathrm{Spec}\ k(y)$ est limite projective de schémas affines localement quasi-finis sur $Y$ , savoir les voisinages affines de $y$ dans $\overline{\{y\}}$ (muni de la structure réduite induite). - Notons que 1.5 implique que lorsque $g$ est quasi-compact et quasi-séparé, alors $g$ (-1)-acyclique implique déjà $g$ universellement (-1)-acyclique.

Proposition 1.6. Soient $g : X \longrightarrow Y$ un morphisme de schémas, $\mathbb{L} \subset \mathbb{P}$ un ensemble de nombres premiers, et $n$ $\mathbb{N}$ un entier naturel (resp. $n = 1$). Les assertions (i) à (iii) (resp. les assertions (i) à (iii) respées) suivantes sont équivalentes. Si de plus $g$ est quasi-compact et quasi-séparé, alors (i) à (iii) (resp. (i) à (iii) respées) sont aussi équivalentes à (iv) (resp. (iv) respée).

(i) Pour chaque $Y' \longrightarrow Y$ étale et chaque faisceau abélien de $\mathbb{L}$-torsion (resp. de ind-$\mathbb{L}$-groupes) IX 1.5 $F$ sur $Y'$ , on a

$$\begin{cases} F \xrightarrow{\sim} g'_* g'^* F \ , \\ (R^q g'_*) g'^* F = 0 \quad \text{si } 1 \leqslant q \leqslant n \ (\text{resp. si } q = 1). \end{cases}$$

(ii) Pour chaque $Y' \longrightarrow Y$ étale et chaque faisceau abélien de $\mathbb{L}$-torsion (resp. de ind-$\mathbb{L}$-groupes) $F$ sur $Y'$, le morphisme canonique

$$H^q(Y',F) \longrightarrow H^q(X',g'^*F)$$

est bijectif si $q \leqslant n$ et injectif si $q = n+1$ (resp. est bijectif si $q \leqslant 1$).

(iii) Pour chaque $Y' \longrightarrow Y$ localement quasi-fini et chaque faisceau abélien de $\mathbb{L}$-torsion (resp. de ind-$\mathbb{L}$-groupes) $F$ sur $Y'$, le morphisme

$$H^q(Y',F) \longrightarrow H^q(X',g'^*F)$$

est bijectif si $q \leqslant n$ et injectif si $q = n+1$ (resp. est bijectif si $q \leqslant 1$).

(iv) Le morphisme $g$ est surjectif, et pour chaque $Y' \longrightarrow Y$ localement quasi-fini, chaque $\nu > 0$, et chaque $\ell \in \mathbb{L}$, le morphisme canonique

$$H^q(Y',\mathbb{Z}/\ell^\nu) \longrightarrow H^q(X',\mathbb{Z}/\ell^\nu)$$

est surjectif pour $0 \leqslant q \leqslant n$ (resp. pour chaque $Y' \longrightarrow Y$ localement quasi-fini et chaque $\mathbb{L}$-groupe fini ordinaire $G$, le morphisme canonique

$$H^i(Y',G) \longrightarrow H^i(X',G)$$

est surjectif pour $i = 0,1$).

Démonstration de 1.6 . Les implications (ii)$\Longleftarrow$(iii)$\Longrightarrow$(iv) sont triviales. Or $(R^q g'_*)g'^*F$ est le faisceau associé au préfaisceau $R^q(Y'') = H^q(X'', g''^*F)$ ($Y'' \longrightarrow Y'$ étale). Si (ii) est vrai, on a $H^q(Y'',F) \xrightarrow{\sim} H^q(X'',g''^*F)$ , donc le faisceau associé est nul, i.e. (ii)$\Longrightarrow$(i). L'implication (i)$\Longrightarrow$(ii) résulte de 1.1 (i) (qui correspond au cas $n = 0$) joint à la suite spectrale de Leray

$$H^p(Y',(R^q g'_*)g'^*F) \Longrightarrow H^{p+q}(X',g'^*F)$$

dans le cas abélien, et à la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^1(Y',g'_*g'^*F) \longrightarrow H^1(X',g'^*F) \longrightarrow H^0(Y',(R^1g'_*)g'^*F).$$

dans le cas des faisceaux de groupes.

(i)$\Longrightarrow$(iii) : Puisque (i) et (ii) sont équivalentes, il est clair que (iii) équivaut à l'énoncé qui est déduit de (i) en remplaçant le mot "étale" par les mots "localement quasi-fini". Sous cette forme c'est, pour $Y$ , $Y'$ donnés, une assertion locale sur $Y'$ et sur $Y$ pour la topologie étale,et on est donc réduit par 1.2 au cas où $f : Y' \longrightarrow Y$ est un morphisme <u>fini</u>. Soit $f' : X' \longrightarrow X$ le morphisme. On a d'après VIII 5.5 (resp. VIII 5.8 ) (appliqué trois fois)

$$f_*(R^q g'_*)g'^*F \simeq R^q(fg')_*g'^*F \simeq R^q(gf')_*g'^*F \simeq (R^q g_*)f'_*g'^*F$$

$$\simeq (R^q g_*)g^*(f_*F)$$

et ce dernier est nul si (i) est vrai pour les valeurs de $q$ envisagées, d'où (i)$\Longrightarrow$(iii).

Il reste à démontrer (iv)$\Longrightarrow$(iii) ; or ceci résulte aussitôt

de XII 6.5.

Définition 1.7. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{L} \subset \mathbb{P}$ . Un morphisme $g:X \longrightarrow Y$ qui satisfait à une des conditions équivalentes (i) à (iii) (resp. (i) à (iii) respées) de 1.6 est appelé morphisme n-acyclique (resp. morphisme 1-asphérique) pour $\mathbb{L}$ . On dit que $g$ est acyclique pour $\mathbb{L}$ s'il est n-acyclique pour $\mathbb{L}$ pour chaque $n$ . On dit que $g$ est universellement n-acyclique (resp. universellement 1-asphérique) pour $\mathbb{L}$, si pour chaque $Y' \longrightarrow Y$ le morphisme $g' = g \times_Y Y'$ est n-acyclique (resp. 1-asphérique) pour $\mathbb{L}$ . Enfin, un préschéma $X$ est dit n-acyclique (resp. 1-asphérique) pour $\mathbb{L}$ , s'il est 0-acyclique 1.3 et si pour chaque $\ell \in \mathbb{L}$ et chaque $1 \leqslant q \leqslant n$ on a $H^q(X,\mathbb{Z}/\ell)=0$ (resp. et pour chaque $\mathbb{L}$-groupe fini ordinaire $G$ , on a $H^1(X,G) = 0$).

Remarques 1.8.

a) Si $g$ est quasi-compact et quasi-séparé, il suffit, pour que $g$ soit universellement n-acyclique, que $g'$ soit n-acyclique chaque fois que $Y' \longrightarrow Y$ est localement de présentation finie. Nous n'avons pas besoin de ce fait et en laissons la démonstration, qui est un exercice de passage à la limite, au lecteur.

b) Nous ignorons si un morphisme n-acyclique pour $\mathbb{L}$ est déjà universellement n-acyclique pour $\mathbb{L}$ . La même question se pose pour les variantes locales plus bas 1.11.

c) Lorsque $n = 0$ , on retrouve la notion de 1.3. Bien entendu, on aurait pu rédiger 1.6. et 1.7. de façon à inclure le cas $n = -1$ . La proposition qui suit est également valable dans ce

cas.

Proposition 1.9.

(i) Soient $X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{h} Z$ des morphismes de schémas, $\mathbb{L} \subset \mathbb{P}$, et $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $g$ soit 0-acyclique (resp. 1-asphérique pour $\mathbb{L}$, resp. n-acyclique pour $\mathbb{L}$). Soit $f = hg$. Alors pour tout faisceau d'ensembles (resp. de ind $\mathbb{L}$-groupes, resp. abélien de $\mathbb{L}$-torsion) $F$ sur $Z$, on a un isomorphisme $f_*f^*F \xrightarrow{\sim} h_*h^*F$ (resp. des isomorphismes $(R^pf_*)f^*F \xrightarrow{\sim} (R^ph_*)h^*F$ si $p \leqslant 1$, resp. si $p \leqslant n$). En particulier, $h$ est 0-acyclique (resp. 1-asphérique pour $\mathbb{L}$, resp. n-acyclique pour $\mathbb{L}$) si et seulement si $f$ l'est.

(ii) Soit $\{g_\alpha : X_\alpha \longrightarrow Y_\alpha\}$ un système projectif de morphismes de schémas tels que les morphismes $X_\alpha \longrightarrow X_\beta$ et $Y_\alpha \longrightarrow Y_\beta$ soient affines et que les $g_\alpha$ soient quasi-compacts et quasi-séparés. Soit $g : X \longrightarrow Y$ la limite projective des $g$ VII 5.1. Alors si tous les $g_\alpha$ sont 0-acycliques (resp. 1-asphériques pour $\mathbb{L}$, resp. n-acycliques pour $\mathbb{L}$), il en est de même de $g$.

Démonstration. Pour (i), on a d'abord

$$h_*h^*F \xrightarrow{\sim} h_*(g_*g^*)h^*F \simeq f_*f^*F .$$

La deuxième assertion de (i) est conséquence immédiate de la suite spectrale de Leray

$$(R^ph_*)(R^qg_*)f^*F \Longrightarrow (R^{p+q}f_*)f^*F .$$

Enfin l'assertion non-abélienne résulte de la suite exacte XII 3.2.

L'assertion (ii) résulte facilement de la théorie de passage à la limite VII 5 et VI .

Corollaire 1.9.1. Soit $g : X \longrightarrow Y$ un morphisme quasi-compact et quasi-séparé, et $n \in \mathbb{N}$ , $\mathbb{L} \subset \mathbb{P}$ . Si $g$ est n-acyclique pour $\mathbb{L}$ (resp. 1-asphérique pour $\mathbb{L}$), alors pour tout point géométrique $\bar{y}$ de $Y$ , algébrique sur un point $y$ de $Y$ , la fibre géométrique $X_{\bar{y}}$ est n-acyclique pour $\mathbb{L}$ (resp. 1-asphérique pour $\mathbb{L}$).

En effet, $\bar{y}$ est limite projective de schémas affines $Y_i$ qui sont localement quasi-finis sur $Y$ , et comme les $X_i = X \times_Y Y_i \longrightarrow Y_i$ sont n-acycliques pour $\mathbb{L}$ (resp. ...), il en est de même de $X_{\bar{y}} \longrightarrow \bar{y}$ en vertu de 1.9 (ii), d'où la conclusion annoncée.

Proposition 1.10. Soient $g : X \longrightarrow Y$ un morphisme de schémas, $\mathbb{L} \subset \mathbb{P}$ , et $n \in \mathbb{N}$ . Alors les conditions (i) à (iv ) ci-dessous sont équivalentes.

(i) Soit $\bar{y}$ un point géométrique de $Y$ et $\bar{x}$ un point géométrique de $X$ au-dessus de $\bar{y}$ . Soient $\widetilde{X}$ , $\widetilde{Y}$ les localisés stricts de $X$ , $Y$ aux points $\bar{x}$ , $\bar{y}$ , et soit $\widetilde{g} : \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{Y}$ le morphisme induit par $g$ . Alors $\widetilde{g}$ est 0-acyclique (resp. 1-asphérique pour $\mathbb{L}$ , resp. n-acyclique pour $\mathbb{L}$).

(ii) Pour chaque diagramme à carrés cartésiens

$$(*) \qquad \begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{j} & X' & \xleftarrow{j'} & X'' \\ \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle g'} & & \downarrow{\scriptstyle g''} \\ Y & \xleftarrow{i} & Y' & \xleftarrow{i'} & Y'' \end{array}$$

avec i étale et i' étale de présentation finie, et chaque faisceau d'ensembles (resp. de ind- $\mathbb{L}$-groupes, resp. abélien de $\mathbb{L}$-torsion) F sur Y" , le morphisme de changement de base XII 4.1 , 4.2

$$g'^{*}i'_{*}F \longrightarrow j'_{*}g''^{*}F$$

est bijectif (resp. les morphismes

$$g'^{*}(R^{q}i'_{*})F \longrightarrow (R^{q}j'_{*})g''^{*}F$$

sont bijectifs pour $q = 0, 1$, resp. sont bijectifs pour $0 \leqslant q \leqslant n$ et injectifs pour $q = n+1$).

(iii) Même énoncé que (ii), sauf que le morphisme i' est supposé seulement quasi-fini et quasi-séparé.

(iv) Même énoncé que (ii), mais en supposant i seulement localement quasi-fini, et en revanche i' une immersion ouverte quasi-compacte.

Démonstration. L'implication (iii) $\Longrightarrow$ (ii) est triviale. Vérifions que (i) $\Longrightarrow$ (iii). Il suffit de regarder le morphisme de (iii) fibre par fibre. Soient $\bar{y}$ un point géométrique de Y' et $\bar{x}$ un point géométrique de X' au-dessus de $\bar{y}$ . Soit

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X}' & \xleftarrow{\widetilde{j}'} & \widetilde{X}'' \\ \downarrow{\scriptstyle \widetilde{g}'} & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{g}''} \\ \widetilde{Y}' & \xleftarrow{\widetilde{i}'} & \widetilde{Y}'' \end{array}$$

le diagramme cartésien déduit de (*), où $\widetilde{X}'$ , $\widetilde{Y}'$ sont les localisés stricts des X' , Y' aux points $\bar{x}$ , $\bar{y}$ et où $\widetilde{Y}'' = Y'' \times_{Y} \widetilde{Y}'$ ,

$\widetilde{X}'' = X'' \times_{X'} \widetilde{X}'$ . On a VIII 5.2 et 5.3

$$H^q(\widetilde{Y}'', \widetilde{F}) \simeq (R^q i'_* F)_{\overline{y}} \simeq (g'^*(R^q i'_*)F)_{\overline{x}} ,$$

où $\widetilde{F}$ est l'image inverse de $F$ sur $\widetilde{Y}''$ , et

$$H^q(\widetilde{X}'', \widetilde{g}''^*\widetilde{F}) \simeq ((R^q j'_*)g''^*F)_{\overline{x}} .$$

Puisque $\widetilde{i}'$ est quasi-fini, on peut appliquer 1.1 (iii) (resp. 1.5(iii)) au morphisme

$$H^q(\widetilde{Y}', \widetilde{F}) \longrightarrow H^q(\widetilde{X}', \widetilde{g}''^*\widetilde{F})$$

pour les valeurs de $q$ envisagées, d'où (i) $\Longrightarrow$ (iii).

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Supposons (ii) vrai et vérifions le critère 1.6 (ii) d'acyclicité pour un morphisme $\widetilde{g} : \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{Y}$ . Soit $\widetilde{Y}' \longrightarrow \widetilde{Y}$ étale, avec $\widetilde{Y}'$ affine, et soit $\widetilde{F}$ un faisceau d'ensembles (resp. abélien de $\mathbb{L}$-torsion, resp. de ind - $\mathbb{L}$-groupes) sur $\widetilde{Y}'$ . On doit démontrer que

$$H^q(\widetilde{Y}', \widetilde{F}) \xrightarrow{\sim} H^q(\widetilde{X}', \widetilde{g}'^*\widetilde{F}) ,$$

où $\widetilde{g}' : \widetilde{X}' \longrightarrow \widetilde{Y}'$ est le morphisme déduit de $\widetilde{g}$ par changement de base. Or écrivons $\widetilde{Y} = \varprojlim Y_\alpha$ où les $Y_\alpha$ sont étales et affines au-dessus de $Y$ (supposant $Y$ affine, ce qui est loisible). On peut "descendre" le morphisme étale $\widetilde{Y}' \longrightarrow \widetilde{Y}$ à un des $Y_\alpha$ , disons en $Y'_o \longrightarrow Y_o$ , et on a $\widetilde{Y}' = \varprojlim Y'_\alpha = Y \times_{Y_o} Y'_o$ . Or chaque faisceau $\widetilde{F}$ sur $\widetilde{Y}'$ est limite inductive des faisceaux $f'^*_\alpha f'_{\alpha *} \widetilde{F}$ , où $f'_\alpha : \widetilde{Y}'_\alpha \longrightarrow Y'_\alpha$ est le morphisme canonique. D'après XII 1.2 (v) et 1.6 (iii) les faisceaux $f'_{\alpha *} F$ sont des faisceaux d'ensembles (resp. abéliens de $\mathbb{L}$-torsion, resp. de ind- $\mathbb{L}$-groupes). Comp-

te tenu de VII 3.3 , on voit donc qu'il suffit de traiter le cas où $\widetilde{F}$ se descend à un des $Y'_\alpha$ , disons à un $F_0$ sur $Y'_0$ . En appliquant (ii) au diagramme

$$\begin{array}{ccccc} X & \longleftarrow & X_0 & \xleftarrow{j'_0} & X'_0 \\ \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle g_0} & & \downarrow{\scriptstyle g'_0} \\ Y & \longleftarrow & Y_0 & \xleftarrow{i'_0} & Y'_0 \end{array} ,$$

on déduit que $g_0^{*}(R^q i'_{0*})F_0 \xrightarrow{\sim} (R^q j'_{0*})g'^{*}_0 F_0$ pour les valeurs de q applicables. Or les points géométriques $\bar{y}$ , $\bar{x}$ se relèvent canoniquement en des points géométriques de $Y_0$ , $X_0$ (nous les notons par les mêmes symboles), et on a VIII 5.2 et 5.3

$$H^q(\widetilde{Y}', \widetilde{F}) = ((R^q i'_{0*})F_0)_{\bar{y}} = (g_0^{*}(R^q i'_{0*})F_0)_{\bar{x}}$$

et

$$H^q(\widetilde{X}', \widetilde{g}'^{*}\widetilde{F}) = ((R^q j'_{0*})g'^{*}_0 F_0)_{\bar{x}}$$

pour les valeurs de q envisagées, d'où le résultat.

Reste à montrer que les conditions (i) à (iii) sont équivalentes à (iv). Or, utilisant la forme (i), on voit que ces conditions sont stables par extension de la base $Y' \longrightarrow Y$ localement quasi-finie, d'où résulte aussitôt, sous la forme (ii), qu'elles impliquent (iv). D'autre part, (iv) implique (iii), car pour vérifier (iii) on voit tout de suite, utilisant par exemple la suite spectrale de Leray, ou le résultat de descente XII6.8 , que l'on peut supposer Y' et Y" affines. Mais alors par le "Main Theorem" EGA IV 8.12.8 $Y'' \longrightarrow Y'$ se factorise en $Y'' \xrightarrow{i'_1} Y'_1 \xrightarrow{i'_2} Y'$ , avec $i'_1$ une immersion ou-

verte, et $i'_2$ un morphisme fini. Utilisant VIII 5.5 , 5.8 pour $i'_2$, on est réduit à vérifier (ii) pour $i'_1$ , qui relève de (iv). Ceci achève la démonstration de 1.10.

Définition 1.11. Un morphisme $g : X \longrightarrow Y$ de préschémas qui satisfait à une des conditions équivalentes (i) à (iv) de 1.10 est appelé morphisme localement 0-acyclique (resp. localement 1-asphérique pour $\mathbb{L}$ , resp. localement n-acyclique pour $\mathbb{L}$). On définit d'une manière évidente (comparer 1.7 ) les notions de morphisme localement acyclique, et de morphisme universellement localement 0-acyclique (resp. ...) pour $\mathbb{L}$ .

On peut naturellement varier les énoncés (i) à (iii) de 1.10. Ainsi, dans (iii) et (iv) on peut se borner à un faisceau F constant et de la forme $G_I$ , G un ensemble fini (resp. un $\mathbb{L}$-groupe fini, resp. G de la forme $\mathbb{Z}/l^\nu\mathbb{Z}$ , avec $l \in \mathbb{L}$ , $\nu \in \mathbb{N}$) ; cela résulte facilement de VIII 5.2 , 5.3 et de XII 6.5 . Signalons également la variante suivante :

Corollaire 1.12. Supposons $g : X \longrightarrow Y$ localement de type fini. Pour vérifier la 0-acyclicité (resp. ...) locale, il suffit de vérifier 1.10 (i) dans le cas où le point géométrique $\bar{x}$ est fermé dans la fibre géométrique $X_{\bar{y}}$ .

En effet, dans la démonstration de (i) $\Longrightarrow$ (iii) de 1.10 , on a vérifié (iii) fibre par fibre, et il suffisait de le faire pour les fibres aux points géométriques $\bar{x}$ qui sont fermés dans leur fibre

géométrique, puisque $g$ est localement de type fini VIII 3.13 b) .

Proposition 1.13.

(i) Soient $X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{h} Z$ des morphismes de schémas, $\mathbb{L} \subset \mathbb{P}$ , et $n \in \mathbb{N}$ , et supposons que $g$ soit surjective, et localement 0-acyclique (resp. localement 1-asphérique pour $\mathbb{L}$ , resp. localement n-acyclique pour $\mathbb{L}$). Alors $h$ est localement 0-acyclique (resp. ...) si et seulement si $f = hg$ l'est.

(ii) Soit $\{g_\alpha : X_\alpha \longrightarrow Y_\alpha\}$ un système projectif de morphismes de préschémas tels que les morphismes $X_\alpha \longrightarrow X_\beta$ et $Y_\alpha \longrightarrow Y_\beta$ soient affines. Soit $g$ la limite projective des $\{g_\alpha\}$ VII 5.1 . Alors si tous les $g_\alpha$ sont localement 0-acycliques (resp. ...), il en est de même de $g$ .

C'est un sorite analogue à 1.9.

Remarques 1.14. Pour simplifier sa tâche, le rédacteur a omis dans 1.10 à 1.13 de traiter également le cas de $n = -1$ , et il laisse au lecteur le soin de se convaincre que les énoncés, définitions et démonstrations s'appliquent essentiellement sans changement à ce cas. Ainsi, avec les notations de 1.10 , la condition (i) s'énonce en disant que les morphismes induits locaux $\widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{Y}$ sont (-1)-acycliques i.e. 1.5 surjectifs, et les conditions (ii) à (iv) s'énoncent en disant que le morphisme de changement de base $g'^*(i'_*(F)) \longrightarrow j'_*(g''^*(F))$ est un monomorphisme. Sous ces conditions, on dira donc que $g$ est localement (-1)-acyclique. Cette condition est donc

stable par extension localement quasi-finie de la base. Comme exemple, signalons qu'un morphisme plat est localement (-1)-acyclique, car pour un tel morphisme la condition de surjectivité pour les $\widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{Y}$ est une conséquence bien connue de la platitude de ces morphismes. D'autre part, signalons aussi que lorsque f est localement de présentation finie, alors f est localement (-1)-acyclique si et seulement si il est universellement ouvert, du moins lorsque Y est localement noethérien : cela résulte en effet aisément de EGA IV 14.4.9 , 1.10.3 . Pour un tel morphisme, la (-1)-acyclicité locale implique par suite la (-1)-acyclicité locale universelle. (Il est d'ailleurs très probable (*) que dans ces derniers énoncés, l'hypothèse localement noethérienne sur Y soit inutile : c'est en tous cas ainsi si l'ensemble des composantes irréductibles de Y est localement fini EGA IV 14.4.10) .

Théorème 1.15. Soient $g : X \longrightarrow Y$ un morphisme quasi-compact et quasi-séparé, $\mathbb{L} \subset \mathbb{P}$ un ensemble de nombres premiers, n un entier naturel (resp. n = 1). On suppose que g est (n-1)-acyclique pour $\mathbb{L}$ et localement (n-1)-acyclique pour $\mathbb{L}$ 1.3 , 1.7 , 1.11 , 1.14. Soit F un faisceau sur Y , que pour $n \geqslant 1$ on suppose muni d'une structure de faisceau abélien de $\mathbb{L}$-torsion (resp. d'une structure de faisceau en groupes), et soit $\xi$ un élément de $H^n(X, g^*(F))$. Pour que $\xi$ provienne d'un élément de $H^n(Y,F)$ (qui est alors uniquement déterminé, grâce à l'hypothèse de (n-1)-acyclicité sur g), il faut et il suffit que pour tout point géométrique $\bar{y}$ de Y , algébrique sur un point y de Y , l'image $\xi_{\bar{y}}$ de $\xi$ dans $H^n(X_{\bar{y}}, F \mid X_{\bar{y}})$ soit dans l'image de $H^n(\bar{y}, F_{\bar{y}})$ (ce qui, pour $n \geqslant 1$ ,

(*) Cela a été effectivement vérifié par M. Raynaud. Cf réédition de EGA IV 14!

signifie qu'on a $\xi_{\bar{y}} = 0$).

Notons tout de suite qu'on conclut de 1.15 que, sous les conditions préliminaires envisagées pour $g$, $g$ est n-acyclique pour $\mathbb{L}$ (resp. 1-asphérique pour $\mathbb{L}$) si et seulement si pour tout $\bar{y}$ comme dessus, $X_{\bar{y}}$ est n-acyclique pour $\mathbb{L}$ (resp. est 1-asphérique pour $\mathbb{L}$) : le "si" résulte en effet directement de 1.15 et des définitions, le "seulement si" étant de toutes façons immédiat par 1.9.1 . Ceci dit, une récurrence immédiate sur n fournit le

Corollaire 1.16. Soit $g$ un morphisme quasi-compact et quasi-séparé qui est localement (n-1)-acyclique pour $\mathbb{L}$, où n est un entier naturel donné (resp. où n = 1). Alors $g$ est n-acyclique pour $\mathbb{L}$ (resp. est 1-asphérique pour $\mathbb{L}$) si et seulement si pour tout point géométrique $\bar{y}$ de Y, algébrique sur un point y de Y, la fibre $X_{\bar{y}}$ est n-acyclique pour $\mathbb{L}$ (resp. 1-asphérique pour $\mathbb{L}$).

Corollaire 1.17. Soient $g : X \longrightarrow Y$ un morphisme de préschémas, $\mathbb{L} \subset \mathbb{P}$ un ensemble de nombres premiers, n un entier naturel (resp. n = 1). Pour que $g$ soit localement n-acyclique pour $\mathbb{L}$ (resp. localement 1-asphérique pour $\mathbb{L}$) il faut et il suffit que pour tout point géométrique $\bar{x}$ de X, si $\widehat{g} : \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{Y}$ est le morphisme des localisés stricts de X et Y (en $\bar{x}$ et le point géométrique correspondant $\bar{y}$ de Y) induit par $g$, chaque fibre géométrique $X_{\bar{z}}$ de $g$, relativement à un point géométrique $\bar{z}$ de Y algébrique sur un point z de Y, soit n-acyclique pour $\mathbb{L}$ (resp. 1-asphérique pour $\mathbb{L}$).

La nécessité résulte en effet du critère 1.10. (i) et de 1.9.1. ,

pour la suffisance on procède par récurrence sur $n$ , ce qui nous permet, lorsque $n \geqslant 1$ , de supposer que $g$ est déjà localement $(n-1)$-acyclique pour $\mathbb{L}$ . Il en est alors de même des morphismes $\widetilde{g}'$ , et 1.16 implique alors que $\widetilde{g}$ est $n$-acyclique (resp. 1-asphérique pour $\mathbb{L}$ ), ce qui en vertu du critère 1.10 (i) implique que $g$ est localement $n$-acyclique (resp. localement 1-asphérique)pour $\mathbb{L}$ .

Corollaire 1.18. Avec les notations de 1.17 , si $g$ est localement de type fini, alors dans le critère énoncé, on peut se borner à prendre des points géométriques $\bar{x}$ dont la localité $x$ est fermée dans sa fibre.

Cela résulte en effet de la démonstration donnée et de 1.12.

Démonstration de 1.15 (*).Montrons d'abord qu'on peut supposer $Y$ strictement local. Dans le cas abélien, $n \geqslant 1$ , la suite spectrale de Leray pour $g$ et $g^{*}(F)$ , jointe à $R^{i}g_{*}(g^{*}(F)) = 0$ pour $0 < i \leqslant n-1$ , et $F \xrightarrow{\sim} g_{*}g^{*}(F)$ , exprimant l'hypothèse de $(n-1)$-acyclicité de $g$ , implique qu'on a une suite exacte canonique

$$0 \longrightarrow H^{n}(Y,F) \longrightarrow H^{n}(X,g^{*}(F)) \longrightarrow H^{0}(Y,R^{n}g_{*}(g^{*}(F)) \quad ,$$

qui montre qu'il suffit de prouver que l'image de $\xi$ dans le troisième terme est nul. Ceci se vérifie fibre par fibre, et compte tenu de VIII 5.2 on est ramené au cas où $Y$ est strictement local. Le cas $n = 0$ , $F$ étant un faisceau d'ensembles, se traite de la même manière, car l'hypothèse sur $g$ implique que $F \longrightarrow g_{*}g^{*}(F)$ est injectif, et $\xi$ s'identifie à une section du deuxième faisceau, dont il s'agit de montrer qu'elle provient d'une section du premier :

(*) Le lecteur qui ne s'intéresserait qu'au cas noethérien est invité à se reporter à 1.18.

cela se vérifie encore fibre par fibre, et on applique VIII 5.3. Le même argument essentiellement est valable dans le cas non commutatif, avec $n = 1$ , en utilisant la suite exacte XII 3.2

$$H^1(Y,F) \longrightarrow H^1(X,g^*(F)) \longrightarrow H^0(Y,R^1g_*(g^*(F)) \quad ,$$

et utilisant VIII 5.3.

Nous supposons donc $Y$ strictement local, donc $X$ quasi-compact et quasi-séparé. Le morphisme $g : X \longrightarrow Y$ satisfait aux conditions de XII 6.10 , ce qui nous ramène au cas où pour toute partie fermée $Y_1$ de $Y$ distincte de $Y$ , la restriction de $\xi$ à $X_1 = X \times_Y Y_1$ est dans l'image de $H^n(Y_1,F \mid Y_1) \longrightarrow H^n(X_1,g^*(F) \mid X_1)$ , et à vérifier dans ce cas qu'on peut trouver un morphisme fini $f : Y' \longrightarrow Y$ , dont l'image dans $Y$ contient un ouvert non vide de $Y$ , et tel que l'image inverse $\xi'$ de $\xi$ sur $X' = X \times_Y Y'$ soit contenue dans l'image de $H^n(Y',F') \longrightarrow H^n(X',g'^*(F'))$ . On notera en effet que, compte tenu de VIII 5.5 , 5.8 , la condition 2°) de loc. cit. est automatiquement satisfaite pour ce morphisme $f : Y' \longrightarrow Y$ .

Pour trouver un tel $f$ , nous pouvons supposer $Y$ réduit, et nous considérons un point maximal $y$ de $Y$ . Soit $\bar{y}$ le point géométrique correspondant à une clôture séparable de $k(y)$ , de sorte que $\bar{y}$ est limite projective filtrante d'ouverts $U_i$ de schémas finis intègres $Y_i$ sur $Y$ , dont chacun est tel que son image dans $Y$ contient un voisinage de $y$ . Utilisant l'hypothèse sur $\xi$ , on voit qu'il existe un indice $i$ tel que l'image inverse de $\xi$ sur $X \times_Y U_i$ est nulle si $n \geqslant 1$ , resp. est dans l'image de $H^0(U_i,F_{U_i})$ si $n = 0$ .

Nous prendrons $Y'$ égal à $Y_i$ , et notons qu'on peut supposer $U' = U_i$ égal à l'image inverse d'un voisinage ouvert affine $U$ de $y$ dans $Y$ , de sorte qu'on voit que l'image inverse de $\xi$ sur $X \times_Y Z'$ (où $Z' = Y' - U'$ est l'image inverse de $Z = X - U$ dans $Y'$) est dans l'image de $H^n(Z', F_{Z'})$ . Quitte à remplacer $Y$ par $Y'$ , nous voyons donc que nous sommes réduits au cas suivant : il existe un ouvert affine $U$ de $Y$ , de complémentaire $Z$ , tel que les restrictions de $\xi$ à $X_U$ et à $X_Z$ appartiennent respectivement à l'image de $H^n(U, F_U)$ et à l'image de $H^n(Z, F_Z)$ ; de plus , si $n \geq 1$, on peut supposer ces restrictions nulles.

Lorsque $n \geq 1$ , nous allons montrer que sous ces conditions, on a $\xi = 0$ . Pour simplifier les notations, nous écrirons $Y'$ au lieu de $X$ , et nous désignons par $U'$ , $Z'$ les images inverses de $U$ , $Z$ dans $Y'$ , par $F'$ l'image inverse $g^*(F)$ . Notons $i : U \longrightarrow Y$, $j : Z \longrightarrow Y$ , $i' : U' \longrightarrow Y'$ , $j' : Z' \longrightarrow Y'$ les inclusions,

$$\begin{array}{ccccc} U' & \xrightarrow{i'} & Y' = X & \xrightarrow{j'} & Z' \\ \downarrow{\scriptstyle g_U} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle g_Z} \\ U & \xrightarrow{i} & Y & \xrightarrow{j} & Z \end{array} ,$$

et considérons la suite exacte de faisceaux

$$0 \longrightarrow F'_{U',Y'} \longrightarrow F' \longrightarrow F'_{Z',Y'} \longrightarrow 0 .$$

Comme l'image de $\xi$ dans $H^n(Y', F'_{Z',Y'}) = H^n(Z', F'_{Z'})$ est nulle, $\xi$ provient d'un élément de $H^n(Y', F'_{U',Y'})$ , et la restriction de ce dernier sur $U'$ est égale à celle de $\xi$ , donc est nulle. Comme $F'_{U',Y'}$ est isomorphe à l'image inverse de $F_{U,Y}$ , nous sommes ainsi

ramenés au cas d'un faisceau de la forme $F_{U,Y}$ , donc nous pouvons supposer $F_Z = 0$ (ce qui tient compte de l'hypothèse $\xi \mid Z' = 0$). Notons que si $F \longrightarrow G$ est un monomorphisme de faisceaux abéliens de $\mathbb{L}$-torsion (resp. de faisceaux en groupes), il suffit de prouver que l'image $\eta$ de $\xi$ dans $H^n(Y',G')$ est dans l'image de $H^n(Y,G)$ i.e. est nulle XII 6.6 . Cela nous permet de remplacer $F$ par $i_*(F_U)$ , compte tenu que l'hypothèse $F_Z = 0$ implique que l'homomorphisme canonique $F \longrightarrow i_*(F_U)$ est injectif. Or comme $g$ est localement $(n-1)$-acyclique pour $\mathbb{L}$ , et a fortiori 0-acyclique pour $\mathbb{L}$ (car $n \geqslant 1$), il s'ensuit que l'image inverse de $i_*(F_U)$ sur $Y'$ s'identifie à $i'_*(F'_{U'})$ , de sorte qu'on est ramené à montrer que l'image $\eta$ de $\xi$ dans $H^n(Y',i'_*(F'_{U'}))$ est nulle. Or la restriction de $\eta$ à $U'$ est nulle, et il suffit donc de vérifier que l'homomorphisme

$$(*) \qquad H^n(Y',i'_*(F'_{U'})) \longrightarrow H^n(U',F'_{U'})$$

est un monomorphisme. Dans le cas abélien, on utilise la suite spectrale de Leray pour $i'$ et $F'_{U'}$ :

$$E_2^{p,q} = H^p(Y',R^qi'_*(F'_{U'})) \Longrightarrow H^*(U',F'_{U'}) \ ,$$

et les relations

$$(**) \qquad E_2^{p,q} = 0 \quad \text{pour} \quad 0 < p \leqslant n-1 \ , \quad q \leqslant n-1 \ .$$

Pour vérifier ces dernières, on note que l'hypothèse de $(n-1)$-acyclicité locale de $g$ pour $\mathbb{L}$ implique que l'on a des isomorphismes

$$R^qi'_*(F'_{U'}) \simeq g^*(R^qi_*(F_U)) \quad \text{pour} \quad q \leqslant n-1 \ ,$$

et compte tenu du fait que $g$ est $(n-1)$-acyclique pour $\mathbb{L}$, donc que $H^p(Y,G) \xrightarrow{\sim} H^p(Y',G')$ pour $p \leqslant n-1$ et tout faisceau abélien de $\mathbb{L}$-torsion $G$ sur $Y$, on trouve $(***)$ puisque $H^p(Y,G) = 0$ pour $p > 0$, et on trouve de même

$$(****) \qquad E_2^{o,q} \xrightarrow{\sim} H^o(Y,R^q i_*(F_U)) \quad \text{pour} \quad q \leqslant n-1 \ .$$

La suite spectrale de Leray considérée donne alors naissance à une suite exacte, qui forme la deuxième ligne du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} H^o(Y,R^{n-1}i_*(F_U)) & \longrightarrow & H^n(Y,i_*(F_U)) = 0 & & \\ \downarrow\wr & & \downarrow & & \\ H^o(Y',R^{n-1}i'_*(F'_{U'})) & \longrightarrow & H^n(Y',i'_*(F'_{U'})) & \longrightarrow & H^n(U',F'_{U'}) \ , \end{array}$$

où la première flèche verticale est bijective en vertu de $(****)$. On lit sur le diagramme que $(*)$ est injectif, ce qui achève la démonstration dans ce cas. Dans le cas non abélien, $n=1$, on utilise le même diagramme avec $n=1$ :

$$\begin{array}{ccccc} H^o(Y,i_*(F_U)) & \longrightarrow & H^1(Y,i_*(F_U)) = 0 & & \\ \downarrow\wr & & \downarrow & & \\ H^o(Y',i'_*(F'_{U'})) & \longrightarrow & H^1(Y',i'_*(F'_{U'})) & \longrightarrow & H^1(U',F'_{U'}) \ , \end{array}$$

XII 3.2, où la première flèche verticale est encore bijective grâce à l'hypothèse de 0-acyclicité locale et globale faite sur $g$, et on conclut encore l'injectivité de $(*)$ dans ce cas.

Traitons enfin le cas $n = 0$. Remarquons que la donnée d'une section $\xi$ de $F'$ revient, en vertu de , à la donnée d'une section $\xi_{U'}$ de $F'_{U'}$ et d'une section $\xi_{Z'}$ de $F'_{Z'}$, telles que l'image de $\xi_{Z'}$ par l'homomorphisme naturel

$$F'_{Z'} \longrightarrow j'^{*}(i'_{*}(F'_{U'}))$$

soit la section du deuxième membre induite par $\xi_{U'}$. Par hypothèse, il existe des sections $\eta_Z$ et $\eta_U$ de $F_Z$ et $F_U$ respectivement, qui induisent $\xi_{Z'}$ et $\xi_{U'}$. Tout revient à voir qu'elles satisfont à la condition de compatibilité analogue, exprimant que ce sont les restrictions d'une même section $\eta$ de $F$. Il faut vérifier l'égalité de deux sections de $j^{*}(i_{*}(F_U))$, et pour ceci, comme $Z' \longrightarrow Z$ est surjectif ($g$ étant surjectif puisque $(-1)$-acyclique par hypothèse), il suffit de vérifier que les deux sections correspondantes de $g_Z^{*}(j^{*}(i_{*}(F_U)) = j'^{*}(g^{*}(i_{*}(F_U))$ sont égales. Or le faisceau envisagé, grâce à l'homorphisme de changement de base

$$(*) \qquad g^{*}(i_{*}(F_U)) \longrightarrow i'_{*}(g_U^{*}(F_U)) = i'_{*}(F'_{U'}) \ ,$$

s'envoie dans $j'^{*}(i'_{*}(F'_{U'}))$, et ce dernier homomorphisme est injectif, car il en est ainsi de $(*)$ grâce à l'hypothèse que $g$ est localement $(-1)$-acyclique. Il suffit donc de vérifier que les deux sections de $j'^{*}(i'_{*}(F'_{U'}))$, images des deux sections précédentes, sont égales. Or on constate aussitôt que ces sections ne sont autres que celles déjà envisagées plus haut, qui sont égales par hypothèse. Cela achève la démonstration.

Remarque 1.18. On peut donner un raffinement de 1.15, qui fournit une démonstration nettement plus simple de 1.15 lorsque $Y$ est supposé localement noethérien. Pour ceci, en plus des hypothèses préliminaires sur $g$, $F$, supposons qu'il existe un nombre fini de points géométriques $f_i : \bar{y}_i \longrightarrow Y$ de $Y$ tels que le morphisme

$$F \longrightarrow \prod_i f_{i*}(f_i^*(F))$$

soit injectif (hypothèse automatiquement vérifiée si $Y$ est noethérien et si $F$ est constructible IX 2.14 ) . Je dis que sous ces conditions, le critère 1.15 est valable en se bornant aux seuls points géométriques $\bar{y}_i$ . En effet, en vertu de XII 6.6 on peut supposer que $F$ est lui-même de la forme $f_*(M_{\bar{y}})$ , où $M$ est un ensemble resp. un groupe resp. un groupe abélien de $\mathbb{L}$-torsion, et $f : \bar{y} \longrightarrow Y$ un point géométrique. Soit $f' : X' = X_{\bar{y}} \longrightarrow X$ le morphisme canonique. Supposant, pour fixer les idées, $n \geqslant 1$ , l'hypothèse locale faite sur $g$ implique qu'on a

$$g^*(f_*(M_{\bar{y}})) \simeq f'_*(M_{X'}) \quad , \quad R^i f'_*(M_{X'}) = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1 \ ,$$

la deuxième relation provenant du fait que le premier membre est isomorphe à $g^*(R^i f_*(M_{\bar{y}}))$ , qui est nul puisque manifestement $R^i f_*(M_{\bar{y}}) = 0$ pour $i \geqslant 1$ . De ces relations, on conclut que

$$H^n(X, g^*(F)) \simeq H^n(X, f'_*(M_{X'})) \longrightarrow H^n(X', M_{X'})$$

est injectif, en utilisant la suite spectrale de Leray pour $f'$ , ce qui prouve bien qu'un élément $\xi$ de $H^n(X,F)$ induisant un élément nul de $H^n(X_{\bar{y}}, F)$ est nul. Pour déduire de ceci une démonstration simplifiée de 1.15 dans le cas où $Y$ est localement noethérien, on note qu'on peut se borner au cas $Y$ noethérien, et un passage à la limite facile, utilisant IX 2.7.2 et VII 5 , permet de se ramener au cas où $F$ est de plus constructible, justiciable de l'énoncé qu'on vient de prouver.

2. Acyclicité locale d'un morphisme lisse.

Le théorème est le suivant :

Théorème 2.1. Soient $g : X \longrightarrow Y$ un morphisme lisse et soit $\mathbb{L}$ $\mathbb{P}$ l'ensemble complémentaire de l'ensemble des caractéristiques résiduelles de $X$ . Alors $g$ est localement acyclique et localement 1-asphérique pour $\mathbb{L}$ .

Notons d'abord le corollaire :

Corollaire 2.2. Soit $g : \mathbb{E}^m_Y \longrightarrow Y$ le morphisme structural de l'espace affine. Alors $g$ est acyclique et 1-asphérique pour l'ensemble $\mathbb{L}$ complémentaire de l'ensemble des caractéristiques résiduelles de $Y$ .

En effet, par récurrence sur m et 1.9 (i) on se ramène au cas $m = 1$ . D'après 2.1 on sait que $g$ est localement n-acyclique et localement 1-asphérique pour $\mathbb{L}$ , donc que la condition **locale** de 1.16 est satisfaite . Il suffit donc de démontrer que les fibres géométriques de $\mathbb{E}^1_Y$ sont acycliques et 1-asphériques pour $\mathbb{L}$ , c'est-à-dire que Spec $k[t]$ est acyclique et 1-asphérique pour $\mathbb{L}$ si $k$ est un corps séparablement clos de caractéristique $p \notin \mathbb{L}$ , ce qui résulte de IX 4.6 pour l'assertion d'acyclicité, et pour la 1-asphéricité est bien connu. Plus généralement, soit $X'$ un revêtement normal irréductible galoisien de $X = \mathbb{P}^1_k$ ,

qui soit non ramifié en dehors du point $\infty$ et dont la ramification en ce point soit modérée. Prouvons que le degré $n$ du revêtement est égal à 1. Or on a la formule de Hurwitz :

$$2(g' - 1) = 2n(g - 1) + \deg \mathfrak{D}_{X'/X}$$

où $g$ , $g'$ sont le genre de $X$ , $X'$, et $\mathfrak{D}_{X'/X}$ le diviseur différente. On a $g = 0$ , et l'hypothèse de ramification modérée implique $\deg \mathfrak{D}_{X'/X} \leqslant n-1$ , d'où $2(g'-1) \leqslant -(n+1)$ donc $n \leqslant 2(1-g')-1$, et comme $g' \geqslant 0$ , on conclut $n \leqslant 1$ donc $n = 1$ , c.q.f.d.

Démonstration de 2.1 . L'assertion est locale sur $X$ et $Y$ pour la topologie étale, et on peut donc supposer SGA1 II 1.1 que $g$ est le morphisme structural de l'espace affine $\mathbb{E}^m_Y$ , et que $Y$ est affine. En appliquant la transitivité de l'acyclicité locale 1.13. (i) et le fait que $\mathbb{E}^m_Y = \mathbb{E}^{m-1}_{\mathbb{E}^1_Y}$ on se réduit immédiatement au cas $m = 1$ , c'est-à-dire, au cas $X = \underline{\mathrm{Spec}}\ \mathcal{O}_Y[t]$ .

Appliquons 1.18 . On est ramené à démontrer que les fibres géométriques du morphisme de schémas strictement locaux $\widetilde{g} : \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{Y}$ , déduit d'un couple de points géométriques $\bar{x}$ , $\bar{y}$ , où $\bar{x}$ est fermé dans la fibre $X_{\bar{y}}$ , sont acycliques pour $\mathbb{L}$ et 1-asphériques pour $\mathbb{L}$ . On peut évidemment supposer $Y = \widetilde{Y}$ . Soit $Y' \longrightarrow Y$ un morphisme fini, local, et surjectif, de sorte que $Y'$ est strictement local, et soient $\bar{y}'$ le point de $Y'$ au-dessus de $\bar{y}$ , $\bar{x}'$ le point de $X'$ au-dessus de $\bar{x}$ et de $\bar{y}'$ . Puisque $X' \longrightarrow X$ est fini, le localisé strict de $X'$ au point $\bar{x}'$ n'est autre que $\widetilde{X}' = \widetilde{X} \times_Y Y'$ . Par suite, toute fibre géométrique de $\widetilde{X}'/Y'$ est déduite d'une fibre géométrique de $\widetilde{X}/Y$ par extension algébrique (né-

cessairement radicielle) du corps de base, de plus il y a au moins une fibre géométrique de $\hat{X}'/Y'$ au-dessus de chaque fibre géométrique de $\hat{X}/Y$ . On peut donc VIII 1.1 remplacer $Y$ par $Y'$ , et par choix convenable de $Y'$ , on se ramène ainsi au cas où $k(\bar{x})=k(\bar{y})$. Alors $\bar{x}$ est un point rationnel de la fibre $X_{\bar{y}} = \operatorname{Spec} k(\bar{y})\,[t]$ , disons le point $t = a^\circ$ . En relevant $a^\circ$ en une section $a$ de $\mathcal{O}_{\tilde{Y}}$ et en faisant la "translation" $t_1 = t-a$ on est ramené au cas où le point $\bar{x}$ est le point $\{t = 0\}$ de $\operatorname{Spec} k(\bar{y})\,[t]$ . Posons $A = \Gamma(\hat{Y},\mathcal{O}_{\hat{Y}})$ , de sorte que $A$ est un anneau strictement local.

Notation 2.3. Soit $A$ un anneau hensélien local. On dénote par $A\{t\}$ le hensélisé de l'anneau $A[t]$ en l'idéal premier engendré par $\operatorname{rad} A$ et $t$ .

Corollaire 2.4. Soient $A$ hensélien et $A'$ une $A$-algèbre finie. Alors $A'\{t\} \simeq A' \otimes_A A\{t\}$ .

Cela résulte immédiatement de VIII 4.1 . Notons que si $A$ est strictement local, il en est de même de $A\{t\}$ .

La démonstration du théorème est ramenée au lemme suivant :

Lemme 2.5. Soit $A$ un anneau hensélien de caractéristique résiduelle $p$ . Alors chaque fibre géométrique de $\operatorname{Spec} A\{t\}$ sur $\operatorname{Spec} A$ est acyclique et 1-asphérique pour $\mathbb{L} = \mathbb{P} - \{p\}$ .

Notons que puisque $A\{t\}$ est le hensélisé de $A[t]$ , une fibre $\operatorname{Spec} A\{t\} \otimes_A K$ , $K$ un corps résiduel de $A$ , est limite pro-

jective de schémas affines et de type fini $X_i$ sur la "droite" Spec $K[t]$, c'est-à-dire, limite de courbes algébriques affines. Donc chaque fibre géométrique de Spec $A\{t\}$ est limite de courbes affines $(X_i)_{\overline{K}}$ au-dessus du corps séparablement clos $\overline{K}$, et il s'ensuit de IX 5.7 et VII 5.7 que la dimension cohomologique des fibres géométriques est $\leqslant 1$. Il suffit donc de vérifier que les fibres géométriques sont 1-<u>asphériques</u> pour $\mathbb{L}$, c'est-à-dire, qu'une telle fibre géométrique $\overline{Z}$ est connexe, non vide, et que $H^1(\overline{Z},G) = 0$ pour chaque $\mathbb{L}$-groupe fini $G$.

Ecrivons $A = \varinjlim B_\alpha$ où les $B_\alpha$ sont des anneaux de type fini sur $\mathbb{Z}$. Le morphisme $B_\alpha \longrightarrow A$ se factorise par le henselisé $A_\alpha$ de $B_\alpha$ en l'idéal premier induit par rad A, d'où $A = \varinjlim A_\alpha$. On constate aisément qu'on a aussi $A\{t\} = \varinjlim A_\alpha\{t\}$. De plus, soient $\overline{y}$ un point géométrique de Spec A, $X_{\overline{y}}$ la fibre géométrique de $S = \text{Spec } A\{t\}$ sur Spec A en $\overline{y}$, $\overline{y}_\alpha$ le point de Spec $A_\alpha$ induit par $\overline{y}$, et $X_{\alpha\overline{y}_\alpha}$ la fibre géométrique de Spec $A_\alpha\{t\}$ sur Spec A en $\overline{y}_\alpha$. On a $X_{\overline{y}} = \varprojlim X_{\alpha\overline{y}_\alpha}$. On est donc réduit pour la démonstration de 2.5 par 1.7 (ii)(appliqué aux morphismes $X_{\alpha\overline{y}_\alpha} \longrightarrow \overline{y}_\alpha$) au cas $A = A_\alpha$, c'est-à-dire, où A est le hensélisé d'une algèbre de type fini sur $\mathbb{Z}$ en un idéal premier donné. Nous le supposons désormais. Rappelons qu'une telle algèbre est un anneau <u>excellent</u> EGA IV 7.8.3 (iii), 7.8.6 (i), donc que $A_\alpha$ est également excellent(comme on voit facilement sur la définition, cf. EGA IV 18.7.6 ).

Vérifions la 0-acyclicité. (Pour un résultat plus général, cf. Appendice.) Puisque $A\{t\}/A$ admet la section "t = 0", une fibre

géométrique $\overline{Z}$ est non-vide. Pour voir qu'elle est connexe, on est réduit, en remplaçant A par un quotient 2.4 , au cas où A est intègre, et où $\overline{Z}$ est la fibre géométrique au-dessus du point générique de Spec A . Il suffit de prouver que pour toute extension finie séparable K' de corps de fractions K de A , le schéma $Z_{K'}$ ($Z$ = Spec $A\{t\} \otimes_A K$) est connexe. Soient A' la normalisée de A dans K' (qui est une A-algèbre finie EGA IV 7.8.2 ) et Z' la fibre générique de Spec A' $\{t\}$ sur A' . D'après 2.4 , on a $A'\{t\} \simeq A' \otimes_A A\{t\}$, d'où $Z_{K'} \simeq Z'$ . Remplaçons A par A' . Il suffit alors de démontrer que Z est intègre, et il suffit de démontrer que A $\{t\}$ est intègre. Mais A étant normal, A $[t]$ l'est, donc A $\{t\}$ l'est aussi SGA1 I 9.5. (i) , d'où le résultat.

La démonstration de 2.5 , et par suite de 2.1 , est ainsi réduite au lemme suivant, qui sera démontré dans le prochain numéro :

Lemme 2.6. Soit A un anneau hensélien et excellent, et soit $\overline{Z}$ une fibre géométrique de Spec A $\{t\}$ /Spec A . Alors chaque revêtement principal galoisien $\overline{Z}'$ de $\overline{Z}$ , de groupe G d'ordre premier à la caractéristique résiduelle p de A , est trivial.

3. Démonstration du lemme principal.

En remplaçant $A$ par une algèbre finie $A'$ (cf. 2.4 ), on réduit l'assertion 2.6 au cas où $A$ est intègre et où $\overline{Z}$ est la fibre géométrique générique de Spec $A\{t\}$ sur Spec $A$ . Soient $K$ le corps des fractions de $A$ et $Z = \text{Spec } A\{t\} \otimes_A K$ . Si $\overline{Z}' / \overline{Z}$ est un revêtement principal galoisien, on peut le descendre à un $Z_{K'}$, où $K'$ est une extension finie séparable convenable de $K$ . En remplaçant 2.4 $A$ par son normalisé dans $K'$ , qui est une $A$-algèbre finie EGA IV 7.8.3 (vi) , on est ramené à démontrer le lemme sous la forme suivante :

Lemme 3.1. Avec les notations de 2.6 , supposons $A$ normal, et soit $Z' / Z$ un revêtement étale principal galoisien, de groupe $G$ d'ordre premier à la caractéristique résiduelle $p$ de $A$ . Alors $Z'$ est induit par une extension galoisienne $K'$ de $K$ , i.e. SGA 1 IX 6.2 le revêtement $\overline{Z}'$ de $\overline{Z}$ déduit de $Z'$ est trivial.

Démonstration. Soit $B'$ le normalisé de $A\{t\}$ dans l'anneau des fonctions rationnelles de $Z'$ , et considérons les idéaux premiers $P$ de hauteur 1 de $A\{t\}$ tels que l'algèbre $B'$ sur $A\{t\}$ soit ramifiée en $P$ . Puisque $Z' / Z$ est étale, $P$ n'est pas sur le point générique de Spec $A$ , i.e., $p = P \cap A \neq 0$ . Donc $A\{t\}/pA\{t\} = (A/p)\{t\}$ est intègre et de dimension au plus égale à dim $A$ . Puisque $A\{t\}$ est excellent EGA IV 7.8.6 (i) et 18.7.6 donc caténaire, on a dim Spec $A\{t\}/P = (\dim A - 1) - 1 = \dim A \geqslant \dim A\{t\}/pA\{t\}$ ,

d'où $P = \underline{p}A\{t\}$ puisque $P \supset \underline{p}A\{t\}$ .

Soient donc $\underline{p}_1, \ldots, \underline{p}_m$ les idéaux premiers de hauteur 1 de $A$ tels que $B'/A\{t\}$ soit ramifié en les idéaux $\underline{p}_i A\{t\}$ , soit $s$ le p.g.c.d. des ordres des groupes d'inertie SGA1V 2 $G_i \subset G$ pour $B'$ en les idéaux premiers au-dessus des $\underline{p}_i A\{t\}$ , qui est un entier divisant l'ordre de $G$ , donc premier à $p$ . Soit $f \in A$ une fonction qui s'annule avec ordre 1 en chaque $\underline{p}_i$ (un tel $f$ existe , comme il résulte par exemple de Bourbaki, Alg. Comm., Chap. II, § 3, cor. à prop. 17 ). En remplaçant 2.4 $A$ par son normalisé $A_1$ dans l'extension finie $K_1 = K[x]/(x^s - f)$ de $K$ et $B'$ par le normalisé de $A_1 \otimes_A B'$ , on se réduit par le lemme d'Abyankhar SGA1 X 3.6 au cas où $B'$ n'est ramifiée en aucun idéal premier de hauteur 1 de $A\{t\}$ .

Alors l'algèbre $B'/A\{t\}$ est aussi étale au-dessus de la fibre de Spec $A\{t\}$ en tout point de Spec $A$ de codimension 1 . En effet, soit $\underline{p}$ un idéal premier de hauteur 1 de $A$ . Puisque $A$ est normal, $A_{\underline{p}}$ est un anneau de valuation discrète, donc régulier, donc $A\{t\} \otimes_A A_{\underline{p}}$ est aussi régulier - en effet, c'est une limite de schémas étales au-dessus de $A_{\underline{p}}[t]$ . Par hypothèse, l'algèbre $B'/A\{t\}$ est étale en chaque point de codimension $\leqslant 1$ de Spec $A\{t\} \otimes_A A_{\underline{p}}$ , donc elle est étale partout par le théorème de pureté de Zariski-Nagata SGA 1 X3.1 ; pour une démonstration, voir p. ex. SGA2 , X 3.4 ).

En remplaçant 2.4 $A$ par une $A$-algèbre finie convenable, on se ramène au cas où de plus l'algèbre $B'/tB'$ sur $A\{t\}/tA\{t\} \simeq A$ est complètement décomposée au-dessus du point générique de Spec $A$ . Donc il suffit de démontrer que sous ces conditions, l'algèbre $B'$ sur

$A\{t\}$ est "triviale", et puisque $A\{t\}$ est hensélien, il suffit de démontrer que $B'$ sur $A\{t\}$ est étale ; en effet, il résulte du fait que l'algèbre $B'/tB'$ splitte au-dessus du point générique de Spec A qu'elle splitte sur Spec(A) (SGA 1 I 10.1 , donc que les extensions résiduelles de $B'$ sur l'idéal maximal de $A\{t\}$ sont triviales, et on applique (EGA IV 18.5.14 ). On est donc ramené au lemme suivant :

Lemme 3.2. Soit $B$ un anneau local excellent et normal, et soit $0 \neq t \in \operatorname{rad} B$ tel que $B/tB$ soit normal. Soit $B'$ une $B$-algèbre finie intègre normale, contenant $B$ , telle que :

(i) L'algèbre $B'/tB'$ sur $B/tB$ est complètement décomposée en les points maximaux de $\operatorname{Spec}(B/tB)$ .

(ii) L'algèbre $B'$ sur $B$ est étale en les points de codimension 1 de $\operatorname{Spec}(B/tB)$ .

Alors $B'$ est étale sur $B$ .

Démonstration. En vertu de (ii), l'assertion est triviale pour $\dim B \leqslant 2$, c'est-à-dire pour $\dim B/tB \leqslant 1$ . Supposons que $B'/B$ ne soit pas étale, soit $x$ un point maximal de l'ensemble des points de Spec $B/tB$ au-dessus duquel $B'/B$ n'est pas étale, et soit $C$ l'anneau local de Spec $B$ en $x$ . Alors $C$ est encore un anneau excellent et normal (EGA IV 7.8.2 ), on a $0 \neq t \in \operatorname{rad} C$ , et (i) et (ii) sont vrais pour la $C$-algèbre $C' = C \otimes_B B'$ . On peut donc supposer $B = C$ , c'est-à-dire, que $B'$ est étale sur $B$ au-dessus de chaque point de Spec $B/tB$ , sauf peut-être à l'origine. Puisque $B/tB$ est

normal (en fait unibranche suffirait), la condition (i) implique que l'algèbre $B'/tB'$ est complètement décomposée en dehors de l'origine. De plus, on peut supposer $\dim B \geqslant 3$ . On est donc ramené au lemme suivant :

Lemme 3.3. Soit $B$ un anneau local excellent et normal, $0 \neq t \in \operatorname{rad} B$, $\dim B \geqslant 3$ . Soit $B'$ une $B$-algèbre finie normale intègre, contenant $B$ , telle que l'algèbre $B'/tB'$ de $B/tB$ soit complètement décomposée en dehors de l'origine. Alors $B'$ est étale sur $B$.

Démonstration. Soient $X = \operatorname{Spec} B$ , $X_1 = X - \{x_o\}$ , où $x_o$ est le point fermé, et soit $i : U \longrightarrow X$ l'ouvert des $x \in X$ en lesquels l'algèbre $B'/B$ est étale. Alors $(X-U) \cap V(t) = \{x_o\}$ est de dimension 0 . Puisque $V(t)$ est défini par une équation, il s'ensuit que $\dim(X-U) \leqslant 1$ (EGA $0_{IV}$ 16.2.5 ), donc ($X$ étant caténaire) $x \in X-U \Longrightarrow \dim \mathcal{O}_{X,x} \geqslant \dim B - 1 \geqslant 2$ , i.e. $\operatorname{codim}(X-U,X) \geqslant 2$ .

Soit $X' = \operatorname{Spec}(B')$ , $U'$ l'image inverse de $U$ dans $X'$ , alors, $X$ étant universellement caténaire, la relation $\operatorname{codim}(X-U,X) \geqslant 2$ implique la relation $\operatorname{codim}(X'-U',X') \geqslant 2$ (EGA IV 5.6.10 ), donc, $X'$ étant normal, on a

$$B' = \Gamma(X', \mathcal{O}_{X'}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(U', \mathcal{O}_{U'}) .$$

Soit alors $\underline{B}' = \widetilde{B'}$ le faisceau de $\mathcal{O}_X$-algèbres qui définit $X'$ sur $X$ , $\underline{C}$ sa restriction à $U$ , alors la formule précédente équivaut à la formule

$$\underline{B}' \xrightarrow{\sim} i_*(\underline{C}) \ ,$$

et 3.3 se ramène par suite à l'énoncé suivant (où il n'est plus question de B') : Soient B , t comme dans 3.3 , X = Spec(B) , Y = Spec(B/tB) , U un voisinage ouvert de $Y_1 = Y - \{x_o\}$ dans $X_1 = X - \{x_o\}$ , U' un revêtement étale de U dont la restriction à $Y_1$ soit complètement décomposée, $\underline{C}$ le faisceau de $\underline{O}_{U'}$-algèbres définissant U' , alors ($i : U \longrightarrow X$ désignant l'immersion canonique) $i_*(\underline{C})$ est une Algèbre cohérente <u>étale</u> sur X (ou, ce qui revient au même, grâce à la relation prof $\underline{O}_{X,x} \geqslant 2$ pour $x \in X-U$ signalée plus haut et à EGA IV 5.10.5 , U' se prolonge en un revêtement <u>étale</u> X' de X) .

Soit $\hat{X} = \operatorname{Spec} \hat{B}$ , où $\hat{B}$ est le complété de B . Alors $\hat{B}$ est normal (EGA IV 7.8.3 (v)) et $\hat{B}$ / B est fidèlement plat. Soit

$$\begin{array}{ccc} \hat{U} & \xrightarrow{i} & \hat{X} \\ \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ U & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

le diagramme cartésien déduit de $\hat{X} \longrightarrow X$ . Puisque f est fidèlement plat, le foncteur $i_*$ commute au changement de base f EGA IV 2.3.1, et on est ramené EGA IV 17.7.1 à prouver que $f_*(\hat{C})$ est une algèbre étale sur $\hat{X}$ . On peut donc remplacer B par $\hat{B}$ , c'est-à-dire, on peut supposer B <u>complet</u>. Dans ce cas, nous allons prouver que U' est un revêtement complètement décomposé de U (ce qui impliquera évidemment qu'il se prolonge en un revêtement étale de X , et achèvera la démonstration). Or cette assertion est maintenant conséquence immédiate de la "théorie de Lefschetz locale"

SGA 2 X 2.1 (i) et 2.5 , comme on constate immédiatement, compte tenu encore une fois de la relation prof $\underline{O}_{X,x} \geqslant 2$ pour $\dim\{x\} = 1$ .

Remarque 3.4. On peut prouver 3.2 et 3.3 sous des conditions plus générales, en suivant essentiellement la même démonstration : au lieu de supposer B excellent et normal, il suffit de supposer que le complété $\hat{B}$ est normal (condition qui est stable par localisation, grâce aux résultats de EGA IV 7 ) , ou seulement que le complété de B pour la topologie (tB)-adique soit normal, et quotient d'un anneau régulier.

4. Appendice : Un critère de 0-acyclicité locale.

Les résultats du présent numéro ne seront plus utilisés dans la suite du séminaire.

Théorème 4.1. Soit $g : X \longrightarrow Y$ un morphisme de schémas. On suppose $g$ plat et à fibres séparables, et $X$ et $Y$ localement noethériens resp. $g$ localement de présentation finie. Alors $g$ est universellement localement 0-acyclique.

On peut évidemment supposer $X$ et $Y$ affines, ce qui permet, dans le cas respé, de se ramener au cas où $Y$ donc $X$ est noethérien, par la méthode standard de EGA IV 8, utilisant ici EGA IV 9.7.7. On peut donc se borner à prouver le premier énoncé. L'hypothèse étant stable par changement de base de type fini, on est réduit, compte tenu du passage à la limite 1.13 (ii), à prouver que $g$ est localement 0-acyclique, et pour ceci on est ramené par 1.17 à prouver que si on suppose de plus $g$ strictement local, alors les fibres géométriques de $g$ sont connexes. Or c'est ce que dit EGA IV 18.9.8.

Corollaire 4.2. Soit $g : X \longrightarrow Y$ un morphisme de schémas, avec $Y$ discret. Alors $g$ est universellement localement 0-acyclique.

On peut supposer que $Y$ est le spectre d'un corps parfait $k$ VIII 1.1 . D'autre part, on peut supposer $X$ affine, donc limite projective de schémas affines de type fini sur $k$, et compte tenu de 1.13 (ii) on est ramené au cas où $X$ est de type fini sur $k$. En-

fin, on peut évidemment supposer $X$ réduit, donc séparable sur $k$ puisque $k$ est parfait. La conclusion résulte alors de 4.1.

Corollaire 4.3. Supposons que $g$ soit surjectif, et satisfasse aux conditions de 4.1 ou de 4.2 ; dans le cas non respé de 4.1 on suppose de plus que $g$ est, soit quasi-compact et quasi-séparé, soit universellement ouvert. Alors $g$ est un morphisme de descente effective universelle pour la catégorie fibrée des faisceaux étales sur des préschémas variables.

Dans les cas envisagés, $g$ est universellement submersif et il résulte de VIII 9.7 que $g$ est un morphisme de descente universelle pour la catégorie fibrée envisagée. Cela nous permet, pour la question d'effectivité, de nous borner au cas $Y$ affine. On voit de plus, dans chacun des cas envisagés, que $X$ se recouvre par un nombre fini d'ouverts affines $X_i$ dont les images recouvrent $Y$ . Remplaçant $X$ par la somme disjointe des $X_i$ , on peut alors supposer $X$ affine, a fortiori quasi-compact et quasi-séparé sur $Y$ . On conclut alors grâce au raisonnement de VIII 9.4.1 , en utilisant le fait XVI 1.1 que pour un morphisme quasi-compact et quasi-séparé $g$ , la formation de $g_*(F)$ ($F$ un faisceau étale sur $X$) commute à tout changement de base $Y' \longrightarrow Y$ qui est localement $O$-acyclique.

Remarques 4.4.

a) On obtient ainsi la démonstration(qui avait été laissée en suspens) de VIII 9.4 d), comme cas particulier de 4.3. Une démonstration différente plus facile, n'utilisant pas le résultat assez dé-

licat de EGA IV 18.9.8, s'obtiendrait en notant que grâce à VIII 9.1 on peut se borner au cas du morphisme $Spec(K) \longrightarrow Spec(k)$ induit par une extension de corps $K/k$ , or $Spec(K)$ est universellement localement 0-acyclique sur $Spec(k)$ , car il est même universellement acyclique pour $\mathbb{L} = \mathbb{P} - \{p\}$ , $p = car\ k$ , comme on verra dans XVI 1.5.

b) On ignore si tout morphisme quasi-compact et quasi-séparé, surjectif et localement (-1)-acyclique (ou universellement localement (-1)-acyclique) est un morphisme de descente effective pour la catégorie fibrée des faisceaux étales sur des préschémas variables. Cet énoncé semble assez plausible, et améliorerait 4.3 et VIII 9.4 c),d). On le rapprochera de l'énoncé d'effectivité dans MURRE, Sém. Bourbaki n° 293, p. 17.

c) Il est plausible que sous les conditions de 4.2 , $g$ est même localement acyclique pour $L$ et localement 1-asphérique pour $L$ , où $L$ est l'ensemble des nombres premiers distincts des caractéristiques résiduelles de $Y$ . On peut dans cette question supposer évidemment $Y$ spectre d'un corps algébriquement clos $k$ , et on peut montrer (SGA 1964/65) que la réponse est affirmative lorsqu'on dispose de la résolution des singularités pour les schémas de type fini sur $k$ . Donc la réponse est affirmative lorsque $Y$ est de caractéristique nulle, comme on voit en utilisant les résultats de HIRONAKA (*).

(*) Cf. SGA 1 XIII.

E X P O S E XVI

# Théorème de changement de base par un morphisme lisse, et applications.

par M. ARTIN

Sommaire :

1. Le théorème de changement de base par un morphisme lisse.

2. Le théorème de spécialisation des groupes de cohomologie.

3. Le théorème de pureté cohomologique relatif.

4. Le théorème de comparaison de la cohomologie pour les préschémas algébriques sur $\mathbb{C}$ .

5. Le théorème de finitude pour les préschémas algébriques en caractéristique zéro.

## 1. Le théorème de changement de base par un morphisme lisse.

Théorème 1.1 . Soient $\mathbb{L} \subset \mathbb{P}$ , $n \in \mathbb{N}$ , et

$(*)$

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{g'} & X' \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ Y & \xleftarrow{g} & Y' \end{array}$$

un diagramme cartésien, avec $f$ quasi-compact et quasi-séparé, et $g$ universellement localement $0$-acyclique (resp. univ. loc. $1$-asphérique pour $\mathbb{L}$ , resp. univ. loc. $n$-acyclique pour $\mathbb{L}$ ) (XV 1.11). Alors pour chaque faisceau $F$ d'ensembles (resp. de ind-$\mathbb{L}$-groupes, resp. abélien de $\mathbb{L}$-torsion) sur $X$ , le morphisme de changement de base (XII 4.1.2 )

$$\varphi^q \ : \ g^*(R^q f_*)F \longrightarrow (R^q f'_*)g'^*F$$

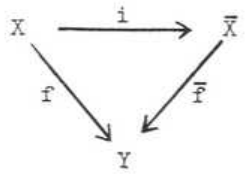
est bijectif pour $q = 0$ (resp. $q \leqslant 1$ , resp. $q \leqslant n$).

En particulier, en appliquant XV 2.1 , on trouve le

Corollaire 1.2 . (Théorème de changement de base par un morphisme lisse). Supposons que le morphisme $g$ de $(*)$ soit lisse, que $f$ soit quasi-compact et quasi-séparé, et que $\mathbb{L} \subset \mathbb{P}$ soit l'ensemble complémentaire à l'ensemble des caractéristiques résiduelles de $Y$ . Alors pour chaque faisceau $F$ d'ensembles (resp. de ind - $\mathbb{L}$-groupes, resp. abélien de $\mathbb{L}$-torsion) sur $X$ , le morphisme de change-

ment de base $\varphi^q$ ci-dessus est bijectif pour $q = 0$ (resp. pour $q = 0,1$, resp. pour chaque $q$).

Démonstration de 1.1 . Traitons d'abord le cas où $f : X \longrightarrow Y$ est quasi-projectif : ce n'est qu'une conjonction du théorème de changement de base pour un morphisme propre XII 5.1 et de la définition XV 1.9 . En effet, on a un diagramme commutatif




où $\bar{f}$ est projectif, donc propre, et où $i$ est une immersion ouverte. Or on sait XII 5.1 que le théorème de changement de base est vrai pour $\bar{f}$ quel que soit $g : Y' \longrightarrow Y$ . Puisque $gx_Y\bar{Y} : Y'x_Y\bar{Y} \longrightarrow \bar{Y}$ est encore universellement 0-acyclique (resp. ...), on se ramène immédiatement par (XII 4.4 (ii)) à démontrer le théorème pour le morphisme $i$ , c'est-à-dire, on est ramené au cas où $f$ est une immersion ouverte. Alors le théorème est conséquence de la définition XV 1.10 (ii) .

Traitons maintenant le cas général. L'assertion est locale sur $Y$ , et on peut donc supposer $Y$ affine.

Lemme 1.3 . On peut de plus supposer $X$ affine.

Démonstration. Procédant comme dans XII 6.1 , on est réduit, pour prouver 1.1 pour un $f$ donné, à le prouver dans la situation dé-

duite de la situation donnée par des changements de base $\widetilde{Y} \longrightarrow Y$ , $\widetilde{Y}' \longrightarrow Y'$ , pour un morphisme local $\widetilde{g} : \widetilde{Y}' \longrightarrow \widetilde{Y}$ de localisés stricts de $Y',Y$ induit par $g$ , et à prouver que les homomorphismes

$$(*) \qquad H^q(\widetilde{X},F) \longrightarrow H^q(\widetilde{X}',F') \qquad (\text{où } F' = g'^*(F))$$

sont bijectifs pour $q \leqslant n$ , où $\widetilde{X} = X x_Y Y$ , $\widetilde{X}' = X' x_{Y'} Y'$ . Cela nous ramène donc au cas où $Y,Y',g$ sont strictement locaux, et à prouver dans ce cas la bijectivité des applications précédentes, admettant que 1.1 est prouvé pour $f$ affine. Or soit $(X_i)$ un recouvrement fini de $X$ par des ouverts affines $X_i$ , et soit $Z$ le schéma somme des $X_i$ , qui est donc affine et muni d'un morphisme surjectif $h : Z \longrightarrow X$ , d'où un morphisme $h' : Z' \longrightarrow X'$ . Notons que $h$ est séparé, et qu'il est affine lorsque $f$ est séparé. Ceci dit, appliquant le lemme de descente XII 6.8 , on voit que pour prouver la bijectivité des applications $(*)$ pour $q \leqslant n$ et pour tout $F$ , il suffit de prouver la bijectivité des applications correspondantes $H^q(Z,h^*(F)) \longrightarrow H^q(Z',h'^*(F'))$, à condition que les homomorphismes de changement de base, pour $Z \longrightarrow X$ et le changement de base $X' \longrightarrow X$ , soient des isomorphismes en dimension $\leqslant n$. Or si $f$ est séparé, donc $h$ est affine, il en est ainsi par hypothèse, ce qui prouve 1.1 lorsque $f$ est supposé séparé. Dans le cas général, on peut alors appliquer le résultat précédent à $h$ qui est toujours séparé, et on conclut encore que 1.1 est vrai pour $f$ , ce qui prouve 1.3 .

Remarque. On pourrait aussi invoquer la suite spectrale de Leray pour le recouvrement ouvert $(X_i)$ de $X$ , et ses variantes non com-

mutatives, mais cette méthode, qui n'est pas essentiellement différente du recours à XII 6.8 , a le désavantage de nous obliger à distinguer à nouveau les trois cas habituels, travail qui a déjà été fait dans loc.cit.

Pour achever la démonstration du théorème dans le cas général, il suffit de ramener la démonstration au cas où $f : X \longrightarrow Y$ est affine et de type fini, donc quasi-projectif. D'après 1.3 , on peut supposer $X$ affine. Soit alors $X = \varprojlim X_\alpha$ , où $f_\alpha : X_\alpha \longrightarrow Y$ sont des schémas affines et de type fini sur $Y$ . On termine avec la technique de passage à la limite habituelle (VII 5).

Compléments 1.4.

a) Nous laissons au lecteur le soin de constater que la même démonstration donne encore une conclusion lorsqu'on suppose que $g$ est universellement localement $(-1)$-acyclique (XV 1.14) : dans ce cas, l'homomorphisme de changement de base

$$\phi^0 : g^*(f_*(F)) \longrightarrow f'_*(g'^*(F))$$

est injectif pour tout faisceau d'ensembles $F$ sur $X$ . D'autre part, supposons à nouveau $n \geqslant 0$ , on peut compléter 1.1 par l'énoncé d'injectivité suivant, contenu également dans la démonstration qui précède : si $g$ est universellement localement 0- acyclique, alors pour tout faisceau en groupes $F$ sur $X$ , l'homomorphisme de changement de base $\phi^1$ de 1.1 est un monomorphisme ; si $g$ est universellement localement $n$ -acyclique pour $\mathbb{L}$ , alors l'homomorphisme $\phi^{n+1}$ de 1.1 est un monomorphisme pour tout faisceau abélien de $\mathbb{L}$-torsion $F$ sur $X$ .

b) Il est sans doute possible de donner également une conclusion d'injectivité analogue à partir de l'hypothèse de 1 -asphéricité locale pour $\mathbb{L}$ de $g$ , en introduisant les invariants de 2-cohomologie non commutative de la thèse de GIRAUD, comparer XII 5.11 (*); la même question se pose également pour (1.6) et (2.3) ci-dessous.

Corollaire 1.5 . Soit $K/k$ une extension de corps, et soit $\mathbb{L} = \mathbb{P} - \{p\}$ , où $p$ = car $k$ . Alors $\mathrm{Spec}(K) \longrightarrow \mathrm{Spec}(k)$ est universellement localement acyclique pour $\mathbb{L}$ et universellement localement 1 -asphérique pour $\mathbb{L}$ ; si $k$ et $K$ sont séparablement clos, alors le morphisme précédent est également universellement acyclique pour $\mathbb{L}$ et universellement 1 -asphérique pour $\mathbb{L}$ .

Notons tout de suite la conséquence suivante de (1.5) :

Corollaire 1.6 . Soient $K/k$ une extension de corps séparablement clos, $X$ un schéma, $F$ un faisceau d'ensemble (resp. de ind-$\mathbb{L}$-groupes, resp. de groupes abéliens de $\mathbb{L}$-torsion) sur $X$ , où $\mathbb{L} = \mathbb{P} - \{p\}$ , $p$ = car $k$ . Alors l'application

$$H^q(X,F) \longrightarrow H^q(X_K,F_K)$$

est bijective pour $q = 0$ (resp. pour $q \leq 1$ , resp. pour tout $q$).

Cela résulte en effet aussitôt du fait que $\mathrm{Spec}(K) \longrightarrow \mathrm{Spec}(k)$ est universellement acyclique pour $\mathbb{L}$ et universellement 1 -asphérique pour $\mathbb{L}$ , et des définitions.- Notons qu'on peut interpréter aussi l'homomorphisme précédent sur les $H^q$ comme s'identifiant, par VIII 2.4 à l'homomorphisme de changement de base

(*) C'est ce qui est effectivement établi dans le livre de J. Giraud.

$$g^*(R^q f_*(F)) \longrightarrow R^q f'_*(g'^*(F)) \quad ,$$

où $f : X \longrightarrow \mathrm{Spec}(k)$ , $f' : X_K \longrightarrow \mathrm{Spec}(K)$ , $g = \mathrm{Spec}(K) \longrightarrow \mathrm{Spec}(k)$ et $g' : X_K \longrightarrow X$ sont les morphismes évidents. Donc lorsque $X$ est quasi-compacf et quasi-séparé, la bijectivité de ces homomorphismes peut aussi être considérée, grâce à 1.1 , comme conséquence du fait que $\mathrm{Spec}(K) \longrightarrow \mathrm{Spec}(k)$ est universellement localement acyclique pour $\mathbb{L}$ et universellement localement 1 -asphérique pour $\mathbb{L}$. Ce dernier fait implique donc déjà 1.6 pour $X$ quasi-compact et quasi-séparé, ce qui suffit manifestement à entraîner que $\mathrm{Spec}(K) \longrightarrow \mathrm{Spec}(k)$ est universellement acyclique pour $\mathbb{L}$ et universellement 1 -asphérique pour $\mathbb{L}$ (XV 1.7, 1.6 (i)).

Ceci montre donc que pour prouver 1.5 , il suffit de prouver la première assertion de 1.5 . Quitte à passer à la clôture parfaite de $k$ , ce qui est licite par VIII 1.1 , on peut alors supposer $k$ parfait. Toute extension $K$ de $k$ est limite inductive de ses sous-algèbres $A$ de type fini sur $k$ , et $k$ étant parfait, quitte à localiser un tel $A$ , on peut le supposer lisse, de sorte que $K$ apparaît comme limite inductive filtrante de sous-algèbres lisses. Ces dernières étant universellement localement acycliques pour $\mathbb{L}$ et universellement localement 1 -asphériques pour $\mathbb{L}$ en vertu de XV 2.1 , on conclut grâce à XV 1.13 (ii) , c.q.f.d.

Remarque 1.7 . On comparera le théorème d'invariance 1.5 à XII 5.4, où on n'a pas eu à supposer le faisceau de torsion envisagé premier aux caractéristiques résiduelles, mais où en revanche on doit supposer $X$ propre sur $k$ . Déjà dans le cas de $H^1(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ , où

$X$ est une courbe algébrique affine (par exemple la droite affine) sur un corps algébriquement clos $k$ de car. $p > 0$, l'analogue des énoncés précédents devient faux, à cause des phénomènes de "ramification immodérée" à l'infini, impliquant que dans un tel cas la classification des revêtements étales principaux de groupe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est essentiellement "continue".

## 2. Théorème de spécialisation des groupes de cohomologie.

Théorème 2.1. Soient $\mathbb{L} \subset \mathbb{P}$, $n \in \mathbb{N}$, et soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de présentation finie propre (*) et localement 0-acyclique (resp. loc. 1-asphérique pour $\mathbb{L}$, resp. loc. $n$-acyclique pour $\mathbb{L}$). Soit $F$ un faisceau d'ensembles (resp. de ind-$\mathbb{L}$-groupes, resp. abélien de $\mathbb{L}$-torsion) constructible et localement constant sur $X$. Alors les $R^q f_* F$ sont constructibles et localement constants pour $q = 0$ (resp. pour $q = 0,1$, resp. pour $q \leqslant n$) et pour tout point géométrique $\bar{y}$ de $Y$, on a

$$(R^q f_* F)_{\bar{y}} \simeq H^q(X_{\bar{y}}, F_{\bar{y}}) ,$$

pour ces mêmes valeurs de $q$.

Remarque. Notons que la dernière assertion n'est que le théorème de changement de base pour un morphisme propre XII 5.2.

Compte tenu de XV 2.1, on a immédiatement le corollaire sui-

(*) Pour une hypothèse moins restrictive que celle de propreté permettant d'obtenir les mêmes conclusions, cf. SGA 5 II 3 et SGA 1 XIII.

vant :

Corollaire 2.2 . (Théorème de spécialisation pour les groupes de cohomologie). Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme propre et lisse, et $\mathbb{L} \subset \mathbb{P}$ l'ensemble complémentaire à l'ensemble des caractéristiques résiduelles de $Y$ . Soit $F$ un faisceau d'ensembles (resp. de ind-$\mathbb{L}$-groupes, resp. abélien de $\mathbb{L}$-torsion) constructible sur $X$ . Alors les $R^q f_*(F)$ sont constructibles et localement constants pour $q = 0$ (resp. pour $q = 0,1$ , resp. pour tout $q$), et pour tout point géométrique $\bar{y}$ de $Y$ , on a

$$R^q f_*(F)_{\bar{y}} \simeq H^q(X_{\bar{y}}, F_{\bar{y}})$$

pour ces mêmes valeurs de $q$ .

Remarque. Prenant $n = 1$ , et traduisant en termes de groupes fondamentaux, on retrouve (SGA1 X 3.8) comparant les groupes fondamentaux des fibres d'un morphisme propre et lisse.

Démonstration de 2.1 . Puisqu'on sait déjà que les $R^q f_*(F)$ sont constructibles XIV 1.1 , il suffit grâce à IX 2.11 de prouver que pour tout morphisme de spécialisation $\bar{y}_1 \longrightarrow \bar{y}_0$ de points géométriques de $Y$ , le morphisme de spécialisation correspondant (VIII 7.7)

$$(*) \qquad R^q f_*(F)_{\bar{y}_0} \longrightarrow R^q f_*(F)_{\bar{y}_1}$$

est bijectif pour les valeurs de $q$ envisagées. Or on a à ce sujet le résultat un peu plus général suivant (où il est inutile de suppo-

ser $f$ de présentation finie et $F$ constructible) :

Corollaire 2.3 . Soient $\mathbb{L} \subset \mathbb{P}$ , $n \in \mathbb{N}$ , $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme propre et localement 0 -acyclique (resp. localement 1 -asphérique pour $\mathbb{L}$ , resp. localement 1 -acyclique pour $\mathbb{L}$ ), $F$ un faisceau d'ensembles (resp. de ind - $\mathbb{L}$ -groupes, resp. abélien de $\mathbb{L}$ -torsion) sur $X$ , qui est localement constant. Alors pour tout morphisme de spécialisation $\bar{y}_1 \longrightarrow \bar{y}_0$ de points géométriques de $Y$ , l'homomorphisme de spécialisation correspondant (*) ci-dessus est bijectif pour $q = 0$ (resp. pour $q = 0,1$ , resp. pour $q \leqslant n$). De plus, dans le cas $n = 0$ i.e. $g$ localement 0 -acyclique, pour tout faisceau de groupes localement constant $F$ sur $X$ , l'homomorphisme $R^1 f_*(F)_{\bar{y}_0} \longrightarrow R^1 f_*(F)_{\bar{y}_1}$ est injectif ; si $n$ est quelconque, pour tout faisceau abélien de $\mathbb{L}$ -torsion $F$ localement constant sur $X$ , l'homomorphisme de spécialisation (*) est injectif pour $q = n+1$ .

Il existe un schéma strictement local intègre $Y'$ , et un morphisme $g : Y' \longrightarrow Y$ appliquant le point fermé $y'_0$ en $y_0$ , le point générique en $y'_1$ : il suffit par exemple de prendre d'abord le localisé strict de $Y$ relativement à $\bar{y}_0$ , puis son sous-schéma fermé intègre défini par un point au-dessus de $y_1$ . De plus, quitte à remplacer $Y'$ par son normalisé dans une clôture algébrique de son corps des fonctions, on peut supposer $Y$ normal et $k(y'_1)$ algébriquement clos, de sorte que $y'_0$ et $y'_1$ sont des points géométriques de $Y'$ . Utilisant le théorème de changement de base (XII 5.1) pour $(f,F,g)$ , on est ramené, pour prouver 2.3, à le faire en

remplaçant $Y$, $\bar{y}_o$, $\bar{y}_1$ par $Y'$, $y'_o$, $y'_1$, ce qui nous ramène à prouver 2.3 dans le cas où $Y$ est normal et strictement local, et où $\bar{y}_o$ et $\bar{y}_1$ sont respectivement son point fermé $y_o$ et son point générique $y_1$. D'ailleurs, utilisant XII 4, on voit que l'homomorphisme de spécialisation (*) s'identifie alors à l'homomorphisme

$$H^q(X,F) \longrightarrow H^q(X_1, g_1^*(F)) ,$$

où $X_1 = X_{y_1}$ et où $g : y_1 \longrightarrow Y$ et $g_1 : X_1 \longrightarrow X$ sont les morphismes canoniques. Notre assertion provient alors du lemme suivant (où on ne suppose plus $f$ propre) :

Lemme 2.4 . Avec les notations préliminaires de 2.3, abandonnons l'hypothèse de propreté sur $f$, supposons en revanche $Y$ normal intègre, de point générique $y_1$ tel que $k(y_1)$ soit séparablement clos, et soient $X_1 = X_{y_1}$, $g_1 : X_1 \longrightarrow X$ le morphisme canonique. Alors l'homomorphisme

(**) $$H^q(X,F) \longrightarrow H^q(X_1, g_1^*(F))$$

est bijectif pour $q = 0$ (resp. bijectif pour $q = 0,1$, resp. bijectif pour $q = n$, injectif pour $q = n+1$). De plus, dans le cas $n = 0$ i.e. $g$ localement acyclique, pour tout faisceau en groupes $F$ sur $X$, l'homomorphisme (**) est injectif pour $q = 1$.

Un argument immédiat (XV 1.6 (i) $\Longrightarrow$ (ii)) montre qu'il suffit de prouver la relation

$$F \xrightarrow{\sim} g_1 {}_* g_1^*(F) ,$$

et pour $n \geqslant 1$ , les relations supplémentaires

$$R^q g_{1*} g_1^*(F) = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant q \leqslant n \ .$$

Ces relations étant locales sur $X$ pour la topologie étale, et $F$ étant localement constant pour la topologie étale, on peut supposer $F$ constant, donc de la forme $G_X$ , où $G$ est un ensemble (resp. un ind -$\mathbb{L}$-groupe, resp. un groupe abélien de $\mathbb{L}$-torsion). Notons d'autre part que l'hypothèse que $X$ est normal implique $g_*(G_{y_1}) \xleftarrow{\sim} G_Y$ (IX 2.14.1), et l'hypothèse que $k(y_1)$ est séparablement clos implique que les $R^q g_*(G_{y_1})$ sont nuls pour $q \geqslant 1$ . D'autre part, l'hypothèse que $g$ est localement $O$-acyclique (resp. ...) implique que la formation des $R^q g_*(G_y)$ commute au changement de base $f : X \longrightarrow Y$ pour $q \leqslant n$ , compte tenu du fait que l'on peut supposer $Y$ affine, et qu'alors $y_1$ apparaît comme limite projective de ses voisinages ouverts affines, qui sont quasi-compacts dans $Y$ , de sorte qu'on peut appliquer la définition XV 1.11 et la théorie du passage à la limite VII 5 . On en conclut qu'on a bien

$$G_X \xrightarrow{\sim} g_{1*}(G_{X_1}) \ , \quad R^q g_{1*}(G_{X_1}) = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant q \leqslant n \ ,$$

ce qui achève la démonstration de 2.4 et par suite de 2.1 .

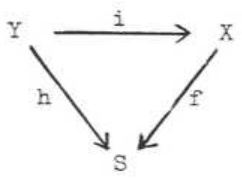
Remarque. La démonstration qui précède, via 2.4 , plus simple que notre démonstration initiale, est due à M. Lubkin.

Corollaire 2.5 . Sous les conditions de 2.1 , supposons $Y$ connexe, et soit $q \leqslant n$ . Alors les $H^q(X_{\bar{y}}, F)$ , pour les points géométri-

ques y de Y , sont tous isomorphes entre eux.

## 3. Le théorème de pureté cohomologique relatif.

Définition 3.1 . Soit S un schéma. On appelle S-couple lisse (Y,X) une S -immersion fermée i : Y ⟶ X de S -préschémas lisses, c'est-à-dire, un diagramme commutatif de préschémas




tel que f et h soient lisses et que i soit une immersion fermée. On notera U = X - Y , j : U ⟶ X l'immersion ouverte, et g : U ⟶ S le morphisme structural. On appelle codimension de (Y,X) en un point y ∈ Y la codimension en y de la fibre $Y_s$ dans $X_s$ , où s = h(y) .

La codimension est donc une fonction localement constante sur Y . Nous indiquerons par la phrase "(Y,X) est de codimension c " que cette fonction est même constante, à valeur c .

Soient (Y,X) un S -couple lisse et y ∈ Y. Rappelons (SGA II 4.10) qu'il existe des entiers m et n , un voisinage X' de y dans X , et un morphisme étale

$$\phi : X' \longrightarrow \mathbb{E}^n_S = \underline{\mathrm{Spec}}\ \mathcal{O}_S\left[t_1, \ldots, t_n\right]$$

tels que $Y' = Y \cap X'$ soit l'image inverse du sous-schéma fermé $\mathbb{E}_S^m$ défini par les équations

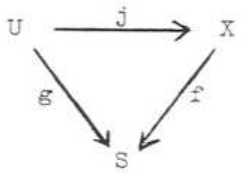
$$t_{m+1} = \ldots = t_n = 0 \quad .$$

On peut exprimer ce résultat en disant que localement pour la topologie étale, chaque $S$-couple lisse $(Y,X)$ est isomorphe au couple standard $(\mathbb{E}_S^m, \mathbb{E}_S^n)$ pour $m$ et $n$ convenables, où

$$\mathbb{E}_S^r = \underline{\mathrm{Spec}}\ O_S\left[t_1, \ldots, t_r\right] \quad .$$

Dans le présent numéro, on se propose de calculer les faisceaux de cohomologie locale $\underline{H}_Y^q(X,F) = (R^q i^!)F$ (V 4 et VIII 6.6) pour un $S$-couple lisse $(Y,X)$, à valeurs dans un faisceau abélien de torsion localement constant $F$ premier aux caractéristiques résiduelles. Nous commençons par des considérations préliminaires :

Proposition 3.2. Soit




un diagramme commutatif, où $f$ est lisse, et $j$ est une immersion ouverte telle que la fibre $U_s$ soit dense dans $X_s$ pour chaque $s \in S$. Soit $F$ un faisceau d'ensembles sur $S$. Alors le morphisme canonique

$$f^* F \longrightarrow j_* g^* F = j_* j^* f^* F$$

est bijectif.

Démonstration. On se réduit facilement au cas où $U$ est rétrocompact dans $X$. Soit $\bar{s}$ un point géométrique de $S$, $\bar{x}$ un point géométrique de $X$ au-dessus de $S$, $\tilde{f} : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{S}$ le morphisme des localisés stricts de $S$, $X$ en des points géométriques correspondants, et $\tilde{U} = U \times_X \tilde{X}$. On a, avec les notations évidentes,

$$(f^{*}F)_{\bar{x}} = H^{0}(\tilde{X},\tilde{f}^{*}\tilde{F}) \simeq H^{0}(\tilde{S},\tilde{F}) .$$

Par suite il suffit de démontrer que $\tilde{g} : \tilde{U} \longrightarrow \tilde{S}$ est $0$-acyclique, ce qui impliquera

$$(j_{*}g^{*}F)_{\bar{x}} \simeq H^{0}(\tilde{U},\tilde{g}^{*}\tilde{F}) \simeq H^{0}(\tilde{S},\tilde{F}) .$$

Puisque $\tilde{g}$ est limite de morphismes lisses, il est localement $0$-acyclique (XV 2.1, 1.11), et par XV 1.12 il suffit de démontrer que les fibres géométriques de $\tilde{U}/\tilde{S}$ sont $0$-acycliques, c'est-à-dire connexes et non-vides. Soit $\bar{s}'$ un point géométrique de $\tilde{S}$. Alors la fibre $\tilde{X}_{\bar{s}'}$ est régulière, connexe et non vide, et il résulte de l'hypothèse que $\tilde{U}_{\bar{s}'}$ est un ouvert dense de $\tilde{X}_{\bar{s}'}$, donc connexe et non-vide, d'où le résultat.

Corollaire 3.2.1. Sous les conditions de 3.2, le foncteur $X' \longmapsto X' \mid U$ de la catégorie des revêtements étales de $X$ dans la catégorie des revêtements étales de $U$ est pleinement fidèle. En particulier, pour tout groupe fini $G$, l'application de restriction

$$H^{1}(X,G) \longrightarrow H^{1}(U,G)$$

est injective.

Cela résulte de 3.2 , via un argument standard que nous allons, pour la commodité des références, expliciter en un

Lemme 3.2.2. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de schémas, et soit $f^* : Et(Y) \longrightarrow Et(X)$ le foncteur image inverse $Y' \longmapsto Y'x_Y X$ de la catégorie $Et(Y)$ des revêtements étales de $Y$ dans $Et(X)$ . Conditions équivalentes :

(i) $f^*$ est fidèle (resp. pleinement fidèle) .

(ii) Pour tout revêtement étale $Y'$ de $Y$ , désignant par $f' : X' \longrightarrow Y'$ le morphisme déduit de $f$ par changement de base $Y' \longrightarrow Y$ , l'application $U \longmapsto f'^{-1}(U)$ de l'ensemble des parties à la fois ouvertes et fermées des $Y'$ dans l'ensemble des parties à la fois ouvertes et fermées de $X'$ est injective(resp. bijective).

(ii bis) Avec les notations de (ii), pour tout faisceau d'ensembles constant $C$ sur $Y'$ , l'application canonique

$$H^0(Y',C) \longrightarrow H^0(X',f^*C)$$

est injective (resp. bijective).

(iii) Avec les notations de (ii), l'application canonique

$$\Gamma(Y'/Y) \longrightarrow \Gamma(X'/X)$$

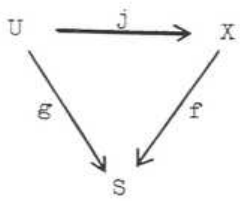
est injective (resp. bijective).

La démonstration est laissée au lecteur (cf. SGA 2, IX 3.1 et 3.2).

Remarques 3.2.3. On peut considérablement généraliser 3.2 , tant en termes de faisceaux d'ensembles, en affaiblissant les hypothèses sur $f$ , qu'en termes de faisceaux de groupes avec des conclusions sur les $R^q g_*(f^*F)$ (cf. SGA 2 XIV 1 et SGA 1 XIII ). Remarque analogue pour 3.4 à 3.6.

"Rappelons" aussi le théorème de pureté de Zariski - Nagata sous sa forme relative :

Théorème 3.3 . (Théorème de pureté relatif). Soit




un diagramme commutatif où $f$ est lisse, et où $j$ est une immersion ouverte telle que pour tout $s \in S$ , $X_s - U_s$ soit partout de codimension $\geqslant 2$ dans $X_s$ . Alors le foncteur $X' \longmapsto X' \mid U$ de la catégorie des revêtements étales de $X$ dans la catégorie des revêtements étales de $U$ est une équivalence de catégories.

Démonstration. Que le foncteur soit pleinement fidèle a été vu (3.2.1). Le fait qu'il soit ess. surjectif va se déduire du théorème classique. On se donne un revêtement étale $U'$ de $U$ , il faut montrer qu'il se prolonge en un revêtement étale $X'$ de $X$ . Réduction immédiate facile au cas où $U$ est rétrocompact dans $X$ , puis au cas où $S$ est affine et de type fini sur Spec $\mathbb{Z}$ , $X$ un schéma connexe, et $f$ de type fini.

On procède par récurrence sur $n = \dim S$, l'assertion étant conséquence du théorème classique (SGA 2 X 3.4) dans le cas $n = 0$. Ayant l'unicité, on peut appliquer la technique de descente de SGA IX 4.7 au normalisé $S \leftarrow \bar{S}$ pour se réduire au cas $S$ (et donc $X$) normal ($\bar{S} \longrightarrow S$ étant fini (EGA IV 7.8.3 (iii) (vi)). De plus, quitte à agrandir $U$, on peut supposer $U$ maximal parmi les ouverts au-dessus desquels $U'$ peut se prolonger, et il faut prouver alors $U = X$. Sinon, soient $x$ un point maximal de $X-U$, et $s = f(x)$. Tout revient à prouver qu'on peut prolonger $U'$ au-dessus d'un voisinage de $x$. Nous pouvons supposer que $\dim O_{S,s} = n \geqslant 1$ et que le théorème est déjà démontré pour la dimension $< n$. Posons $B = O_{X,x}$ et soit $B'$ le normalisé de $B$ dans l'anneau des fonctions rationnelles sur le revêtement $U'$ de $U$ ; donc $B'$ est une $B$-algèbre finie (loc.cit.). Il suffit évidemment de démontrer que $B'$ est une $B$-algèbre étale.

Soient $A = O_{S,s}$, $0 \neq t \in \max A$, $A_o = A/tA$, $B_o = B/tB$. Par hypothèse de récurrence, la restriction du revêtement à $U_o = U \otimes_A A_o$ s'étend à un revêtement étale de $\operatorname{Spec} B_o$, appelons-le $\operatorname{Spec} B_o^{\#}$. Quitte à remplacer $X$ par un revêtement étale convenable d'un voisinage de $x$ (ce qui est loisible) on peut supposer $\operatorname{Spec} B_o^{\#}$ complètement décomposé sur $\operatorname{Spec} B_o$. On est ainsi ramené au cas où la $B_o$-algèbre $B_o'$ est complètement décomposée en dehors du point fermé de $\operatorname{Spec} B_o$. Alors les hypothèses de XV 3.3 sont satisfaites, d'où le résultat.

Corollaire 3.4. Mêmes hypothèses que dans 3.3. Alors on a $(R^1 j_*) g^* F = 0$ pour chaque faisceau $F$ de groupes ind-finis sur $S$.

Réduction comme d'habitude au cas $S$ noethérien, $f$ de type fini, et $F$ constructible. Soit $0 \longrightarrow F \longrightarrow G$ une injection de faisceaux de groupes ind-finis sur $S$, et $C = G/F$. Il résulte de 3.2 que le foncteur $j_*g^*$ est exact, donc que $j_*g^*G \longrightarrow j_*g^*C$ est surjectif, donc (XII 3.1) que $(R^1j_*)g^*F \longrightarrow (R^1j_*)g^*G$ est injectif. On peut donc remplacer $F$ par $G$, et on se ramène ainsi par IX 2.14 et VIII 5.5 au cas où $F = G$ est constant, à valeur un groupe fini ordinaire $G$. Soit $\bar{x}$ un point géométrique de $X$, $\widetilde{X}$ le localisé strict de $X$ en $\bar{x}$, et $\widetilde{U} = \widetilde{X} \times_X U$. Alors il résulte de 3.3 que l'on a

$$(R^q j_* g^* F)_{\bar{x}} = H^q(\widetilde{U}, G_{\widetilde{U}}) \simeq H^q(\widetilde{X}, G_{\widetilde{X}}) ,$$

et ce dernier est nul, d'où le résultat.

Lemme 3.5. (Lemme d'Abhyankar relatif). Soit $(Y,X)$ un $S$-couple lisse de codimension 1, tel que $Y$ soit défini par une équation $t = 0$ dans $X$. Soient $U = X-Y$ et $V/U$ un revêtement principal galoisien d'ordre $n$ premier aux caractéristiques résiduelles de $Y$. Posons $X' = \mathrm{Spec}\ O_X[z]/(z^n-t)$, $U' = U \times_X X'$, $V' = V \times_X X'$. Alors le revêtement $V'$ s'étend uniquement à un revêtement étale de $X'$.

Démonstration. Réduction immédiate au cas $S,X,Y$ affines et de type fini sur $\mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}$. L'unicité est un cas particulier de 3.2.1. Nous allons déduire l'existence de XV 1.12 : soient $\bar{s}$ un point géométrique de $S$ et $\bar{x}$ un point géométrique de $Y$ au-dessus de $\bar{s}$. Soient $\widetilde{f} : \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{S}$ le morphisme des localisés stricts correspon-

dants induit par $f$ , $\widetilde{U} = U \times_X \widetilde{X}$ , etc ... Par descente, compte tenu de l'unicité, il suffit évidemment de démontrer que $\widetilde{V}'$ s'étend en un revêtement étale de $\widetilde{X}'$ , c'est-à-dire (puisque $\widetilde{X}'$ n'admet pas de revêtement non-trivial) que $\widetilde{V}'$ est un revêtement trivial de $\widetilde{U}'$ .

Soit $\bar{U} = \varprojlim_m \widetilde{U}_m = \underline{\mathrm{Spec}}\ O_{\widetilde{U}}[t^{1/m}]$ , où $m$ parcourt l'ensemble des entiers $m$ premiers à la caractéristique résiduelle de $\widetilde{X}$ . Alors $\bar{U}/\widetilde{U}$ est un "revêtement galoisien infini" de groupe abélien $G = \varprojlim_m \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ , et on voit immédiatement qu'il suffit de démontrer que $\bar{U}$ est 1-asphérique pour l'ensemble $\mathbb{L} \subset \mathbb{P}$ complémentaire à la caractéristique résiduelle de $\widetilde{X}$ .

Considérons le morphisme $\bar{f} : \bar{U} \longrightarrow \widetilde{S}$ . Il est limite de morphismes lisses, donc localement 1-asphérique pour $\mathbb{L}$ (XV 2.1, 1.11 (ii)). D'après XV 1.12 , il suffit de démontrer que les fibres géométriques de $\bar{U}/\widetilde{S}$ sont 1-asphérique pour $\mathbb{L}$ . Soit $\bar{s}$ un point géométrique de $\widetilde{S}$ . La fibre géométrique $\bar{U}_{\bar{s}}$ est limite des fibres $(\widetilde{U}_m)_{\bar{s}}$ . Par suite il suffit de démontrer que chaque revêtement principal galoisien d'un $(\widetilde{U}_m)_{\bar{s}}$ , d'ordre premier aux car. rés., induit un revêtement trivial de $\bar{U}_{\bar{s}}$ . En remplaçant $\widetilde{X}$ par $\widetilde{X}_m = \underline{\mathrm{Spec}}\ O_{\widetilde{X}}[t^{1/m}]$ (qui est encore lisse au-dessus de $\widetilde{S}$), on se réduit au cas $m = 1$ , c'est-à-dire, $\bar{U}_m = \widetilde{U}$ . Soit $V$ un tel revêtement de $\widetilde{U}_{\bar{s}}$ . Or $\widetilde{X}_{\bar{s}} = Z$ est un schéma strictement local régulier, et $W = \widetilde{U}_{\bar{s}}$ est l'ouvert complémentaire à un sous-ensemble régulier de codimension 1. On peut donc appliquer le lemme d'Abhyankar sous sa forme usuelle (SGA1 X 3.6) pour conclure que $V$ induit un re-

vêtement $V_m$ sur $W_m$ qui s'étend en un revêtement étale de $Z_m$, pour $m$ convenable. Mais $Z$ donc $Z_m$ étant strictement local, il s'ensuit que ce revêtement est trivial, donc $V_m$ est un revêtement trivial de $W_m$, c.q.f.d.

Remarque 3.5.1. Lorsqu'on ne suppose pas l'ordre $n$ de $G$ premier aux caractéristiques résiduelles de $X$, on peut encore prouver ceci : soit $m$ le plus grand entier premier aux caractéristiques résiduelles de $Y$ qui divise l'ordre de $G$, et supposons que pour chaque point $s \in S$, le revêtement $V_s$ de $U_s = X_s - Y_s$ ait, en les points maximaux de $Y_s$, des groupes d'inertie d'ordres premiers aux caractéristiques résiduelles de $Y$. Alors la conclusion de 3.5 reste valable en prenant $X' = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_X[z]/(z^m - t)$. On peut aussi prendre pour $m$, plus généralement, un multiple commun quelconque des ordres des groupes d'inertie qu'on vient d'envisager, supposés premiers aux caractéristiques résiduelles correspondantes.

Corollaire 3.6. (Pureté cohomologique en dimension 1). Soit $(Y,X)$ un $S$-couple lisse de codimension 1, et soit $F$ un faisceau de groupes constructible et localement constant sur $X$, d'ordres premiers aux caractéristiques résiduelles de $X$. Alors avec les notations de 3.1, $(R^1 j_*) j^* F$ est localement isomorphe comme faisceau d'ensembles pointés à $i_*(F_Y/\mathrm{int}(F_Y))$, où $F_Y = F \mid Y$ et où $F_Y/\mathrm{int}(F_Y)$ désigne le quotient de $F_Y$ par les opérations de $F_Y$ sur lui-même par automorphismes intérieurs.

Remarque. L'isomorphisme du corollaire 3.6 n'est pas canonique.

Démonstration. On se ramène immédiatement au cas X noethérien et connexe. Puisque l'assertion est locale sur X pour la topologie étale, nous pouvons supposer que F est un faisceau constant, à valeur un groupe fini ordinaire G d'ordre m premier aux caractéristiques résiduelles de X , et de plus que $\mu_{mX} \simeq (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})_X$ . Soit U = X - Y et U' = Spec $O_U[t^{1/m}]$ , qui est un revêtement principal galoisien "essentiel" de U de groupe $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ puisque $\mu_{mX} \simeq (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})_X$ . Les revêtements principaux de groupe G de U qui sont trivialisés sur U' sont classifiés localement sur Y par H = Hom $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, G)$ mod int(G) , qui est un ensemble pointé isomorphe à l'ensemble sous-jacent de G/int(G) . On obtient ainsi un morphisme du faisceau constant $H_Y$ sur Y dans $(R^1 j_*)G_U$ , et il suffit de démontrer qu'il est bijectif, ce qui résulte immédiatement de 3.5 .

Théorème 3.7 . (Pureté cohomologique). Soit (Y,X) un S -couple lisse de codimension c > 0 . Soit F un faisceau abélien sur X localement isomorphe (pour la topologie étale) à un faisceau de la forme $f^*(G)$ , où G est un faisceau de torsion sur S , premier aux caractéristiques résiduelles (par exemple F un faisceau localement constant de groupes finis d'ordres premiers aux caractéristiques résiduelles de X). Alors, avec les notations de 3.1 , on a

$$\underline{H}^q_Y(X,F) = (R^q i^!)F = 0 \quad \text{si} \quad q \neq 2c \ ,$$

i.e.
$$\begin{cases} F \xrightarrow{\sim} j_* j^* F & \text{et} \\ (R^q j_*) j^* F = 0 & \text{si} \quad q \neq 0 \ , \ 2c-1 \ , \end{cases}$$

et

$$\underline{H}^{2c}_{Y}(X,F) = i^{*}\left[(R^{2c-1}j_{*})j^{*}F\right]$$

est un faisceau localement isomorphe à $i^{*}(F)$ .

Démonstration. L'assertion est locale sur $X$ pour la topologie étale ; on peut donc (*) supposer $F$ constant, donc si on veut $F \simeq f^{*}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_S$ pour le faisceau constant $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_S$ sur $S$ .

Traitons d'abord le cas $c = 1$ . (L'assertion pour $(R^{1}j_{*})j^{*}F$ , dans le cas $F$ localement constant tout au moins, résulterait immédiatement de 3.6 , mais nous allons le déduire de nouveau.) Rappelons que $(Y,X)$ est localement isomorphe au couple $(\mathbb{E}^{n-1}_{S}, \mathbb{E}^{n}_{S})$ , et si l'on remplace $S$ par $\mathbb{E}^{n-1}_{S}$ , on se ramène au cas où $X = \mathbb{E}^{1}_{S} = \underline{\mathrm{Spec}}\ O_S[t]$ et où $Y$ est la section $t = 0$ de $X/S$ . La situation est localement isomorphe à l'inclusion de la section à l'infini dans l'espace projectif $\mathbb{P}^{1}_{S}$ . On peut donc prendre $X = \mathbb{P}^{1}_{S}$ , $Y$ la section à l'infini, et $U = \mathbb{E}^{1}_{S} = X-Y$ .

Examinons la suite spectrale de Leray

$$(R^{p}f_{*})(R^{q}j_{*})(\mathbb{Z}/n) \Longrightarrow (R^{p+q}g_{*})(\mathbb{Z}/n) \quad .$$

Or l'aboutissement est nul pour $p+q > 0$ , d'après XV 2.2 . De plus, les $R^{q}j_{*}$ sont concentrés sur $Y$ si $q > 0$ , qui s'envoie isomorphiquement sur $S$ par $f$ , et d'autre part $j_{*}(F \mid U) \xleftarrow{\sim} F$ en vertu de 3.2 . Il s'ensuit que $(R^{p}f_{*})(R^{q}j_{*}) = 0$ si $p$ et $q > 0$ , et que $f_{*}(R^{q}j_{*})$ détermine le faisceau $(R^{q}j_{*})$ si $q > 0$ , enfin $R^{p}f_{*}j_{*}(F \mid U) = R^{p}f_{*}(F)$ . La suite spectrale se réduit donc à des

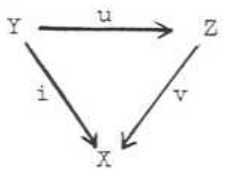
(*) Du moins si F était supposé localement constant. Le lecteur se convaincra que la démonstration qui suit s'applique aussi, essentiellement au cas général.

isomorphismes

$$f_*(R^q j_*)(F \mid U) \xrightarrow{\sim} (R^{q+1} f_*)(F) \quad \text{si} \quad q > 0 \ .$$

Mais $(R^q f_*)(F)$ se calcule fibre par fibre (XII 5.2), donc est nul si $q \neq 0,2$ , et est un faisceau localement isomorphe à $G$ si $q = 2$ , comme il résulte aisément de XII 5.2 et IX 4.7 . Donc $(R^q j_*)(F \mid U) = 0$ si $q \neq 1$ , et est un faisceau localement isomorphe à $i^*(F)$ si $q = 1$ .

Le cas $c > 1$ se traite maintenant facilement par récurrence : soit $(Y,X)$ un $S$ -couple lisse de codimension $c > 1$ . Il est clair que, localement sur $X$ , on peut trouver un sous-schéma $Z$ de $X$ de codimension 1 qui contient $Y$ et qui est lisse au-dessus de $S$ , de sorte qu'on ait un diagramme commutatif




,

où chaque couple est un $S$ -couple lisse (on devrait appeler $(Y,Z,X)$ un $S$-triple lisse), où la codimension de $(Z,X)$ est 1, et celle de $(Y,Z)$ est $c-1$ .

Or on a la suite spectrale de foncteurs composés

$$(R^p u^!)(R^q v^!)F \Longrightarrow (R^{p+q} i^!)F \ .$$

Par hypothèse de récurrence, $(R^q v^!)F = 0$ si $q \neq 2$ et est localement isomorphe à $v^*(F)$ si $q = 2$ , d'où encore par hypothèse de récurrence, appliquée à $(R^q v^!)F$ , que $(R^p u^!)(R^q v^!)F$ est nul si

$(p,q) \neq (2c-2,2)$ et est localement isomorphe à $u^*w^*(F)$ si $(p,q) = (2c-2,2)$, d'où immédiatement le résultat pour $(R^{p+q}i^!)F$, c.q.f.d.

Corollaire 3.8. Soient $(Y,X)$ un $S$-couple lisse de codimension $c$, $n$ un entier naturel premier aux caractéristiques résiduelles de $X$, et posons

$$T_{Y/X} = \underline{H}^{2c}_Y(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}),$$

qui est un faisceau sur $Y$ localement isomorphe (pour la topologie étale) au faisceau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_Y$ en vertu de (3.7). Soit $F$ un faisceau abélien sur $X$, annulé par $n$, satisfaisant à la condition énoncée dans 3.7. Alors on a (pour mémoire) $\underline{H}^i_Y(F) = 0$ pour $i \neq 2c$, et de plus on a un isomorphisme canonique :

$$\underline{H}^{2c}_Y(F) \simeq i^*(F) \otimes T_{Y/X}.$$

Démonstration. On définit aisément un homomorphisme canonique

$$\varphi : i^*(F) \otimes T_{Y/X} \longrightarrow \underline{H}^{2c}_Y(F)$$

i.e. un homomorphisme

$$i^*(F) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}\,(\underline{H}^{2c}_Y(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}), H^{2c}_Y(F)),$$

en utilisant l'homomorphisme canonique $F \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, F)$. Il reste à prouver que $\varphi$ est un isomorphisme, ce qu'on vérifie aisément en suivant la démonstration donnée de 3.7.

**Corollaire 3.8.1. Sous les conditions de 3.8, la formation des**

$\underline{H^i_Y(F)}$ commute à tout changement de base $S' \longrightarrow S$ .

C'est clair.

Corollaire 3.9 . (Théorème de pureté cohomologique absolue). Soient $X$ un schéma régulier, $Y$ un sous-préschéma fermé régulier de codimension $c$ en chaque point. Supposons de plus que $X$ soit localement de type fini sur un corps parfait $k$ . Alors, si $n$ est premier aux caractéristiques résiduelles de $X$ , on a

$$H^i_Y(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0 \quad \text{si} \quad i \neq 2c ,$$

et $H^{2c}_Y(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est un faisceau sur $Y$ localement isomorphe (pour la topologie étale) au faisceau constant $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ) .

C'est un cas particulier de 3.7 , compte tenu que l'hypothèse implique que $X$ et $Y$ sont lisses sur $k$ .

Remarques 3.10.

a) On peut dans 3.8 expliciter la structure du faisceau $T_{Y/X}$ , on trouve qu'il est canoniquement isomorphe au faisceau $(\mu_n)_Y^{\otimes -c}$ , où $\mu_n$ désigne le faisceau des racines n.èmes de l'unité (localement isomorphe au faisceau constant $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ). L'isomorphisme en question est étudié sous le nom de classe fondamentale locale de Y dans X, dans la situation un peu plus générale des intersections complètes relatives, dans Exp. XVIII consacré à la dualité.

b) Il est très plausible que les conclusions de 3.9 et de 3.10 a) restent valables sans postuler l'existence d'un corps de base $k$, tout au moins lorsque $X$ est un préschéma "excellent". C'est ce qui sera établi en tous cas dans Exp. XIX lorsque X est de caractéristique nulle, en utilisant la résolution des singularités de Hironaka. Comme nous verrons dans SGA 5 on a besoin du "théorème de pureté absolu" (ainsi que de la résolution des singularités) notamment pour pouvoir établir la "formule de dualité locale", (qui elle-même est un des ingrédients majeurs de la formule de LEFSCHETZ-VERDIER).

## 4. Théorème de comparaison de la cohomologie pour les préschémas algébriques sur $\mathbb{C}$ .

Soit $X$ un schéma algébrique sur Spec $\mathbb{C}$ . Nous allons comparer les sites étale et classique sur $X$ , et nous reprenons les notations de XI 4 . Le théorème de comparaison, qui est la forme générale de XI 4.4 , est le suivant :

Théorème 4.1 . Soit $f : X \longrightarrow S$ un morphisme de type fini de schémas localement de type fini sur Spec $\mathbb{C}$ , de sorte qu'on a un diagramme commutatif de morphismes de sites

$$\begin{array}{ccc} X_{et} & \xleftarrow{\varepsilon} & X_{cl} \\ \downarrow{\scriptstyle f_{et}} & & \downarrow{\scriptstyle f_{cl}} \\ S_{et} & \xleftarrow{\varepsilon} & S_{cl} \end{array}$$

Soit $F$ un faisceau d'ensembles (resp. de groupes ind-finis, resp. abélien de torsion) et supposons qu'on soit dans l'un des cas suivants :

(i) $f$ propre,

(ii) $F$ constructible.

Alors les morphismes de changement de base XII 4.1.2 (*)

$$\varphi : \varepsilon^{*}(R^{q}f_{et*})F \longrightarrow (R^{q}f_{cl*})\varepsilon^{*}F$$

sont bijectifs pour $q = 0$ (resp. pour $q = 0,1$, resp. pour $q \geqslant 0$).

Remarquons que le théorème de Grauert-Remmert (XI 4.3 (iii)) que nous avions utilisé dans la démonstration de XI 4.4, est un cas particulier de 4.1.

---

(*) En fait, nous utilisons l'homomorphisme de changement de base sous des conditions plus générales que celles envisagées dans Exp. XII, où nous nous étions limités à un carré cartésien de morphismes de préschémas. Le lecteur se convaincra aisément que la définition s'étend verbatim à un carré essentiellement commutatif de morphismes de sites. Pour plus de développements à ce sujet, voir exposé suivant.

Pour la démonstration, nous traitons d'abord le cas $f$ propre. Dans ce cas, le résultat sera conséquence de GAGA et du théorème de changement de base pour un morphisme propre, par un raisonnement élémentaire qui aurait pu figurer dans Exp. XIV. Pour traiter le cas général, nous utiliserons de plus la résolution des singularités [1] et 3.7.

On peut évidemment supposer $Y$ , donc aussi $X$ ,de type fini sur $\mathbb{C}$ .

Cas $f$ propre. Nous rappelons les faits élémentaires suivants :

(a) L'espace topologique $X_{cl}$ est localement compact.

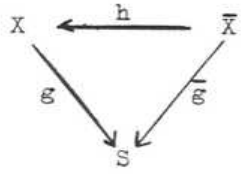
(b) Si $f : X \longrightarrow S$ est propre, alors $f_{cl} : X_{cl} \longrightarrow S_{cl}$ est une application propre d'espaces topologiques.

En effet, (a) est trivial puisque localement $X_{cl}$ est un fermé dans un $\mathbb{C}^n$ . Pour (b) on se ramène par le lemme de Chow au cas où $f$ est projectif, ce cas étant trivial.

Soit $F$ un faisceau d'ensembles (resp. ...) sur $X_{et}$ . Pour les deux morphismes $f_{et}$ et $f_{cl}$ , la formation des $R^q$ commute à la formation des fibres (XII 5.2 et [2] 4.11.1). Il suffit donc de vérifier le théorème fibre par fibre, en les points fermés de $S_{et}$ .

Dans le lemme suivant, nous ne supposons pas que $g$ soit propre:

Lemme 4.2 . Soit




un diagramme commutatif avec h propre, et soit U un ouvert de X tel que h induise un isomorphisme de l'ouvert $\bar{U} = U \times_X \bar{X}$ de $\bar{X}$ sur U . Soient $j : U \longrightarrow X$ et $\bar{j} : \bar{U} \longrightarrow \bar{X}$ les inclusions, F un faisceau d'ensembles (resp. ...) sur U , et $\bar{F}$ le faisceau induit sur $\bar{U}$ . Si le théorème 4.1 est vrai pour $(\bar{g}, \bar{j}_! \bar{F})$ il l'est également pour $(g, j_! F)$ .

Démonstration. Le théorème est vrai pour $(\bar{h}, \bar{j}_! \bar{F})$ parce qu'on est ramené à le vérifier fibre par fibre, et on a alors les deux cas suivants : ou bien la restriction du faisceau à la fibre est nulle, ou bien le morphisme h est un isomorphisme. Dans ces deux cas, le résultat est trivial. On trouve que

$$\varepsilon^{*} j_! F \simeq \varepsilon^{*} h_{et*}(\bar{j}_! \bar{F}) \simeq h_{cl*} \varepsilon^{*}(\bar{j}_! \bar{F})$$

et

$$(R^q h_{et*}) \bar{j}_! \bar{F} = (R^q f_{cl*}) \varepsilon^{*}(\bar{j}_! \bar{F}) = 0 \quad \text{si} \quad q > 0$$

pour les valeurs de q envisagées, donc que

$$(R^q g_{et*}) j_! F \simeq (R^q \bar{g}_{et*}) \bar{j}_! \bar{F}$$

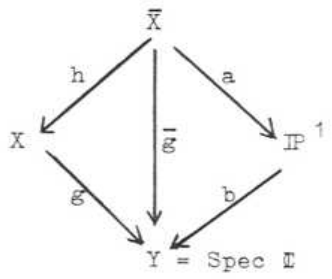
et

$$(R^q g_{cl*}) j_! F \simeq (R^q \bar{g}_{cl*}) \bar{j}_! \bar{F} \quad ,$$

d'où 4.2 .

Lemme 4.3 . Pour vérifier 4.1 pour toutes les données (f,F) avec f propre, il suffit de le faire dans le cas où on suppose que de plus f est de dimension relative $\leq 1$ et $S = \operatorname{Spec} \mathbb{C}$ est un point.

Démonstration. Récurrence sur la dimension relative. Supposons le résultat connu en dimension relative $< n$ , et que $n > 1$ . Comme nous l'avons remarqué, nous pouvons faire la vérification fibre par fibre, c'est-à-dire, nous pouvons supposer que $S = \operatorname{Spec} \mathbb{C}$ est un point, et donc X de dimension $\leq n$ . De plus, nous pouvons supposer X réduit. Soient $\varphi$ une fonction rationnelle sur X qui n'est constante sur aucun composant irréductible de X , U un ouvert dense de X sur lequel $\varphi$ est défini, et $\bar{X} \subset X \times \mathbb{P}^1$ l'adhérence du graphe du morphisme $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{P}^1$ . On a un diagramme commutatif




où les dimensions relatives de a et b sont $< n$ . Par l'hypothèse de récurrence, le théorème est vrai pour (a,.) et (b,.) , d'où on conclut qu'il l'est également pour $(\bar{g},.)$ . En effet, c'est trivial pour $q = 0$ ; si $\mathcal{F}$ est abélien de torsion sur $\bar{X}$ , cela

résulte du morphisme de suites spectrales de Leray

$$\begin{array}{ccc} \varepsilon^*(R^p h_{et*})(R^q a_{et*})F & \Longrightarrow & \varepsilon^*(R^{p+q}\bar{g}_{et*})F \\ \downarrow & & \downarrow \\ (R^p b_{cl*})(R^q a_{cl*})\ \varepsilon^* F & \Longrightarrow & (R^{p+q}\bar{g}_{cl*})\ \varepsilon^* F \end{array} \quad ;$$

si enfin $F$ est un faisceau de groupes ind-finis sur $\bar{X}$, notons que puisque $\varepsilon^*(R^1\bar{g}_{et*})$. est un foncteur effaçable, il suffit de démontrer (compte tenu du résultat pour $q = 0$), que $(R^1\bar{g}_{cl*})\ \varepsilon^*$ est également effaçable (cf. XII 8.2), ce qui résulte de la suite exacte

$$0 \longrightarrow (R^1 b_{cl*})a_{cl*}\ \varepsilon^* F \longrightarrow (R^1\bar{g}_{cl*})\ \varepsilon^* F \longrightarrow b_{cl*}(R^1 a_{cl*})\ \varepsilon^* F \ ,$$

et du fait que $(R^1 b_{cl*})\ \varepsilon^*$. et $(R^1 a_{cl*})\ \varepsilon^*$ sont effaçables grâce à l'hypothèse de récurrence.

Soit maintenant $F$ un faisceau d'ensembles sur $X$. On a $F \hookrightarrow h_{et*}h_{et}^* F = G$. Par la suite exacte

$$(4.3.1) \qquad F \longrightarrow G \rightrightarrows G \amalg_F G \ ,$$

on se ramène (pour $q = 0$) à démontrer 4.1 pour $G$, donc pour un faisceau de la forme $h_{et*}\bar{F}$. Mais pour un tel faisceau, le résultat sera conséquence du théorème pour $(\bar{g},.)$ et pour $(h,.)$, et $h$ est de dimension relative $< n$, comme on voit immédiatement.

Soit $F$ un faisceau abélien de torsion sur $X$. On a la suite exacte

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow j_! j^* F \longrightarrow F \longrightarrow i_* i^* F \longrightarrow 0 \ .$$

Puisque $U$ est dense dans $X$, on a $\dim Y \leqslant n$, donc 4.1 est

vrai pour $(g \mid Y, i^*F)$ , donc pour $(g, i_*i^*F)$ . Il suffit donc, grâce au lemme des cinq, de vérifier 4.1 pour $(f, j_!j^*F)$ , ce qui résulte du théorème pour $\bar{g}$ (4.2).

Soit $F$ un faisceau de groupes ind-finis sur $X$ . Il suffit de démontrer que le foncteur $(R^1g_{cl*})\mathcal{E}^*$ est effaçable pour le faisceau $F$ , ce qui résulte de $(*)$ et de l'effaçabilité pour $j_!j^*F$ et pour $i_*i^*F$ , i.e. du théorème pour $(g, j_!j^*F)$ (4.2) et pour $(g, i_*i^*F)$ (hypothèse de récurrence), c.q.f.d.

Lemme 4.4 . Pour démontrer (4.1) dans le cas où $f$ est propre, il suffit de démontrer ceci : soit $X$ une courbe complète régulière sur Spec $\mathbb{C}$ , et $F$ un faisceau constant et constructible d'ensembles (resp. ...) sur $X$ . Alors les morphismes

$$H^q(X_{et}, F) \longrightarrow H^q(X_{cl}, F)$$

sont bijectifs pour les valeurs de $q$ envisagées.

Démonstration. Puisqu'il suffit de vérifier le théorème fibre par fibre, on est ramené par 4.3 au cas $X$ propre et de dimension $\leq 1$. Le cas de dimension 0 est d'ailleurs trivial, et il résulte de cela que le théorème est vrai pour un morphisme fini. Puisque $f$ est propre, la cohomologie de $X_{et}$ et de $X_{cl}$ commute aux limites inductives (VII 3.3 et [2] , 4.12.1) et on est donc ramené au cas $F$ constructible (IX 2.9 (iii)).

On applique IX 2.14 . Pour un faisceau d'ensembles, la suite exacte 4.3.1 et IX 2.14 montrent qu'on peut prendre $F = \pi_*C$ ,

où $\pi : X' \longrightarrow X$ est fini, $X'$ est normal, donc régulier, et $C$ est un faisceau constant sur $X'$. Pour un faisceau abélien de torsion, on prend une résolution de $F$ par des produits finis de faisceaux de la forme $\pi_* C$ et on applique la suite spectrale d'une résolution, et on se réduit encore au cas $F = \pi_* C$. Pour un faisceau de groupes ind-finis, on rappelle qu'il suffit de démontrer l'effaçabilité de $(R^1 g_{cl*})\, \varepsilon^*$ pour le faisceau $F$, donc pour un faisceau $G$ dans lequel on peut plonger $F$, donc on est encore réduit au cas $F = \pi_* C$. Or il est évident par (VIII 5.5 et 5.8) qu'on peut maintenant remplacer $X$ par $X'$, d'où le lemme.

Pour traiter ce dernier cas, il suffit évidemment (tenant compte de la dimension cohomologique (IX 7.7 et [2] 4.14.1)) de démontrer que pour une courbe complète et régulière on a

($q = 0$) : $X$ connexe et non-vide $\Longleftrightarrow$ $X_{cl}$ connexe et non-vide.

($q = 1$) : Le morphisme de changement de base induit une équivalence de la catégorie des revêtements étales de $X$ et de la catégorie des revêtements étales analytiques finis de $X_{cl}$.

($q = 2$) : On a un isomorphisme $\varepsilon : H^2(X_{et}, \mu_n) \xrightarrow{\sim} H^2(X_{cl}, \mu_n)$.

Or les deux premières assertions résultent immédiatement de GAGA. Pour la dernière, notons qu'on a $H^2(X_{et}, \mathcal{C}_m) = 0$ (IX 4.5) et de même, notant $\mathcal{O}^*$ le faisceau des fonctions holomorphes inversibles de $X_{cl}$, $H^2(X_{cl}, \mathcal{O}^*) = 0$ (cela résulte de la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \longrightarrow 0$$

et du fait que $H^2(X_{cl},\mathcal{O}) = H^2(X_{et},\mathcal{O}_X) = 0$ par GAGA). Par suite la suite exacte de Kummer IX 3.2 (resp. la suite exacte sur $X_{cl}$

$$0 \longrightarrow \mu_n \longrightarrow \mathcal{O}^* \xrightarrow{n} \mathcal{O}^* \longrightarrow 0 \ )$$

donne

$$H^1(X_{et},\mathbb{G}_m)/n \xrightarrow{\sim} H^2(X_{et},\mu_n)$$

$$(\text{resp. } H^1(X_{cl},\mathcal{O}^*)/n \xrightarrow{\sim} H^2(X_{cl},\mu_n) \quad ).$$

D'après GAGA, le morphisme canonique

$$H^1(X_{et},\mathbb{G}_m) = \operatorname{Pic} X \longrightarrow \operatorname{Pic} X_{cl} = H^1(X_{cl},\mathcal{O}^*)$$

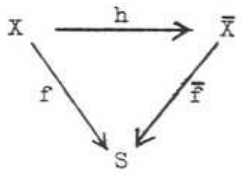
est bijectif, d'où le résultat, ce qui prouve 4.1 dans le cas où $f$ est propre.

Cas $F$ constructible. La démonstration se fait par récurrence sur $\dim X$. Supposons le résultat connu si la dimension est $< n$, et prouvons-le quand la dimension de $X$ est $\leqslant n$.

Lemme 4.5. On peut supposer $f : X \longrightarrow S$ une immersion ouverte dense et $F$ constant.

Démonstration. Comme dans la démonstration de 1.3, on peut en effet supposer $X$ et $S$ affines, donc $f$ quasi-projectif. Alors on applique le raisonnement de 4.4 pour se ramener au cas $F = \pi_* C$, $\pi : X' \longrightarrow X$ fini, et $C$ constant, d'où en remplaçant $X$ par $X'$,

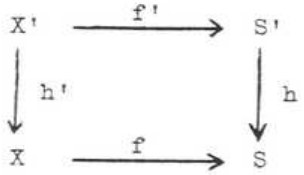
au cas $F$ constant. On peut remplacer $X$ par $X_{red}$ . Soit




un diagramme commutatif tel que $\bar{X}$ soit réduit, que $\bar{f}$ soit projectif, et que $h$ soit une immersion ouverte dense. Il suffit de vérifier le théorème pour les deux morphismes $h$ , $\bar{f}$ (cf. dém. de 4.3), donc pour $h$ puisque $\bar{f}$ est propre, donc pour une immersion ouverte dense.

Lemme 4.6 . On peut de plus supposer $S$ régulier.

Démonstration. Soit $S' \xrightarrow{h} S$ une "résolution des singularités de $S$" , i.e., un morphisme surjectif, propre et birationnel, tel que $S'$ soit régulier, et soit




le diagramme cartésien déduit de $h$ .

Soit $F$ un faisceau d'ensembles constant sur $X$ . On a $F \hookrightarrow G = h'_* h'^* F$ et on en déduit qu'il suffit (pour $q = 0$) de vérifier 4.1 pour $G$ (cf. 4.3.1) , c'est-à-dire, pour un faisceau de la forme $h'_* F'$ , où $F'$ est constant sur $X'$ . Or on a un

diagramme commutatif (où on supprime le symbole "et")

$$\begin{array}{ccc} \varepsilon^{*}f_{*}(h'_{*}F') = \varepsilon^{*}h_{*}f'_{*}F' & \xrightarrow{a} & h_{cl*}\varepsilon^{*}f_{*}F' \\ \downarrow d & & \downarrow b \\ f_{cl*}\varepsilon^{*}(h'_{*}F') & \xrightarrow{c} & f_{cl*}h'_{cl*}\varepsilon^{*}F' = h_{cl*}f'_{cl*}\varepsilon^{*}F' \end{array} ,$$

et a , c sont bijectifs d'après le résultat pour un morphisme propre. Pour démontrer que d est bijectif, il suffit de démontrer que b l'est, donc que

$$\varepsilon^{*}f'_{*}F' \xrightarrow{\sim} f'_{cl*}\varepsilon^{*}F'$$

donc on est ramené au cas $S = S'$ , donc S régulier.

(Remarque : Nous avons utilisé sans le mentionner explicitement le théorème de finitude pour un morphisme propre XIV 1.1) .

Soit F un faisceau abélien constant de torsion sur X . Il suffit de traiter le cas $F = (\mathbb{Z}/n)_X$ . Or le morphisme h' induit un isomorphisme au-dessus d'un ouvert dense $j : U \longrightarrow X$ de X ; soient $j' : U' \longrightarrow X'$ l'ouvert $h'^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U$ , et $Y = X-U$ . On a $\dim Y < n$ parce que U est dense, donc le théorème est vrai pour $(f,(\mathbb{Z}/n)_Y)$ . Par la suite exacte

$$0 \longrightarrow j_!(\mathbb{Z}/n)_U \longrightarrow (\mathbb{Z}/n)_X \longrightarrow (\mathbb{Z}/n)_Y \longrightarrow 0$$

et le lemme des cinq, on se ramène à démontrer le théorème pour le faisceau $j_!(\mathbb{Z}/n)_U$ et le morphisme f , donc par 4.2 à démontrer le théorème pour $(hf', j'_!(\mathbb{Z}/n)_{U'})$ . Or on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow j'_!(\mathbb{Z}/n)_{U'} \longrightarrow (\mathbb{Z}/n)_{X'} \longrightarrow (\mathbb{Z}/n)_{Y'} \longrightarrow 0 \ ,$$

et le théorème est vrai pour $(hf', (\mathbb{Z}/n)_{Y'})$ par l'hypothèse de récurrence. Il suffit donc de démontrer le théorème pour $(hf', \mathbb{Z}/n)_{X'})$. Mais par le cas propre, le théorème est vrai pour $(h,.)$, et il s'ensuit, par la suite spectrale de Leray pour le couple de morphismes $h$, $f'$, qu'il suffit de le démontrer pour $(f', \mathbb{Z}/n)$, d'où le lemme dans ce cas.

Supposons enfin que $F$ soit un faisceau de groupes finis constant. Rappelons qu'il suffit de démontrer que le foncteur $(R^1 f_{cl*})\varepsilon^*(.)$ est effaçable pour $F$, donc pour un $G$ dans lequel on peut plonger $F$, donc pour $G = h'_* h'^* F$, c'est-à-dire pour un faisceau de la forme $h'_* F'$ où $F'$ est constant sur $X'$. On a

$$\varepsilon^*(h'_* F') \xrightarrow{\sim} h'_{cl*}(\varepsilon^* F')$$

et

$$0 \longrightarrow (R^1 f_{cl*}) h'_{cl*} \varepsilon^*(.) \longrightarrow (R^1 f_{cl} h'_{cl*}) \varepsilon^*(.) = (R^1 h_{cl} f'_{cl*}) \varepsilon^*(.),$$

donc il suffit de démontrer l'effaçabilité de ce dernier foncteur pour un faisceau constant. Mais on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow (R^1 h_{cl*}) f'_{cl*} \varepsilon^*(.) \longrightarrow (R^1 h_{cl} f'_{cl*}) \varepsilon^*(.) \longrightarrow h_{cl*}(R^1 f'_{cl*}) \varepsilon^*(.),$$

et le premier membre est effaçable, disons effacé par la résolution de Godement (XII 3.3), parce que $h$ est propre. Il suffit donc de démontrer que le membre de droite est effacé par la résolution de Godement, donc que $(R^1 f'_{cl*})\varepsilon^*(.)$ l'est, donc que le théorème est vrai pour $(f', F')$ où $F'$ est constant, d'où le lemme.

Fin de la démonstration. Nous supposons maintenant que $F$ est un faisceau constant et que $f : X \longrightarrow S$ est une immersion ouverte dense, avec $S$ régulier. Le cas ensembliste résulte maintenant immédiatement de 3.2 et du lemme trivial analogue pour la topologie classique - en effet, on en déduit que $\varepsilon^* f_* F$ et $f_{cl*} \varepsilon^* F$ sont constants de même valeur, donc isomorphes par $\varphi$ .

Pour $q > 0$ , on va d'abord se réduire au cas où de plus $X = S-Y$ avec $Y$ régulier, i.e. au cas où $(Y,S)$ est un Spec $\mathbb{C}$ - couple lisse. En effet, écrivons $X = S-C_1$ , où $C_1$ est muni de la structure induite réduite, et définissons récursivement

$Y_\nu$ = l'ouvert dense des points réguliers de $C_\nu$ ,

$C_{\nu+1} = C_\nu - Y_\nu$ , avec structure induite réduite.

On a $\dim C_{\nu+1} < \dim C_\nu$ parce que $Y_\nu$ est dense dans $C_\nu$ , d'où une suite

$$X = X_1 \subset X_2 = S-C_2 \subset X_3 = S-C_3 \subset \ldots \subset X_r = S ,$$

où les inclusions $i_\nu : X_\nu \longrightarrow X_{\nu+1}$ sont des immersions ouvertes et où l'on a

$X_\nu = X_{\nu+1} - Y_\nu$ , $Y_\nu$ fermé dans $X_{\nu+1}$ , et régulier.

Or l'image directe $i_{\nu *} F$ d'un faisceau constant sur $X$ est constante (3.2), et les $R^q i_{\nu *} F$ sont constructibles et concentrés sur les variétés de $Y$ de dimension $\leq n-1$ (3.4, 3.6, 3.7) pour les valeurs de $q$ envisagées. Donc par l'hypothèse de récurrence et la suite spectrale de Leray (resp. la suite exacte XII 3.2), on se ré-

duit au cas de $i_\nu$ , d'où la réduction annoncée.

Mais pour un couple lisse $(Y,S)$ on a calculé explicitement la valeur des $(R^q f_*)F$ pour la topologie étale (3.4, 3.6, 3.7), et un calcul analogue et facile, que nous laissons au lecteur, donne les résultats analogues pour la topologie classique. On en déduit le théorème pour $f$ par une comparaison directe.

## 5. Le théorème de finitude pour les préschémas algébriques en caractéristique zéro.

Théorème 5.1 . Soient $k$ un corps de caractéristique zéro, et $f : X \longrightarrow S$ un morphisme de type fini de schémas localement de type fini sur $k$ . Soit $F$ un faisceau constructible d'ensembles (resp. de groupes finis, resp. abélien de torsion) sur $X$ . Alors les $R^q f_* F$ sont également constructibles pour $q = 0$ (resp. pour $q = 0,1$ , resp. pour tout $q$).

On met l'hypothèse que $k$ soit de caractéristique 0 parce qu'on va se servir du théorème de résolution des singularités [1] . La démonstration vaut également pour la caractéristique $p > 0$ si l'on admet la résolution des singularités, pourvu que $F$ soit d'ordres premiers à $p$ . On peut donc déduire un résultat en caractéristique $\neq 0$ pour $\dim X \leq 2$ , en appliquant les résultats d'Abhyankar [3] . Un autre ingrédient de la démonstration, en plus du

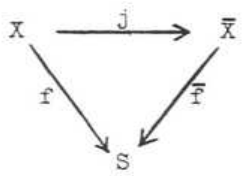
sempiternel th. de changement de base pour un morphisme propre, est le "théorème de pureté cohomologique absolu" 3.9 .

Rappelons que le théorème est déjà démontré pour un morphisme propre et pour S arbitraire (XIV 1.1). D'ailleurs on obtiendra dans Exposé XIX (encore en car. 0) le théorème de finitude sous les hypothèses beaucoup plus faibles que S soit un schéma excellent et que f soit de type fini, en prouvant pour de tels schémas le théorème de pureté absolu sous la forme signalée dans 3.10.

Dans le cas de caractéristique $\neq 0$ et d'un schéma de dimension $\geq 3$ , on n'a pour l'instant que la conséquence facile suivante de XI 3.3 :

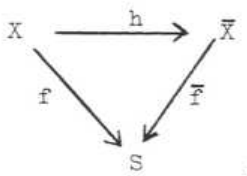
Théorème 5.2 . Soit X un schéma algébrique lisse sur Spec k , k un corps séparablement clos, et soit F un faisceau de groupes abéliens finis (resp. de groupes finis) qui est localement constant, et d'ordres premiers à la caractéristique de k . Alors $H^q(X,F)$ est un groupe fini (resp. un ensemble pointé fini) pour tout q (resp. pour $q = 0,1$ ).

Démonstration de 5.2 . On peut supposer k algébriquement clos (VIII 1.1). Récurrence sur $n = \dim X$ : D'après XI 3.3 et il existe un hyper-recouvrement de X par des ouverts qui sont des "bons voisinages". On se réduit immédiatement, par la suite spectrale d'un hyper-recouvrement , au cas où X est un bon voisinage, donc admet une fibration élémentaire (XI 3.1)




D'après (3.2, 3.6, 3.7), le faisceau $j_*F$ est localement constant sur $X$ , $(R^1j_*)F$ est localement constant sur $Y = \bar{X}-X$ , et $(R^qj_*)F = 0$ si $q > 0$ . Par suite il résulte de 2.1 que $(R^p\bar{f}_*)(R^qj_*)F$ est un faisceau localement constant sur $S$ pour les valeurs de $q$ envisagées, et le résultat résulte de l'hypothèse de récurrence et de la suite spectrale de Leray (resp. de la suite exacte XII 3.2) .

La démonstration de 5.1 est très voisine de celle de 4.1 pour le cas $F$ constructible. Nous nous bornerons à indiquer les grandes lignes : Récurrence sur $\dim X = n$ . On se réduit d'abord au cas $X$ et $S$ affines, donc $f$ quasi-projectif, en appliquant la méthode de la démonstration de 1.3 . Ensuite on applique IX 2.15 et (VIII 5.5 et 5.8) pour se ramener au cas $F$ constant. On a un diagramme commutatif




,

où $h$ est une immersion ouverte dense et où $\bar{f}$ est propre, donc le théorème est vrai pour $\bar{f}$ (XIV 1.1). Il suffit ainsi de démontrer le théorème pour $(h,F)$ , c'est-à-dire pour une immersion ouverte

dense et un faisceau constant. Soit $h : S' \longrightarrow S$ une résolution des singularités de $S$ et

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{h'} & X' \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ S & \xleftarrow{h} & S' \end{array}$$

le diagramme cartésien déduit de $h$ . On se ramène à démontrer le théorème pour $f'$ , donc au cas où de plus $S = S'$ est régulier. Par la méthode de récurrence employée dans la fin de la démonstration de 4.1 , on se réduit au cas où $Y = S-X$ est non-singulier, i.e. où $(Y,S)$ est un couple lisse, et on termine en appliquant (3.2, 3.4, 3.6, 3.7).

Remarque 5.3 . La démonstration de 5.1 qu'on vient d'esquisser est également valable lorsqu'on se donne un anneau noethérien $A$ à gauche, annulé par un entier $n > 0$ (qu'il faut supposer premier à la caractéristique si celle-ci n'est pas supposée nulle, cf. remarques suivant 5.1) , et qu'on considère des faisceaux de $A$ -modules à gauche constructibles.

REFERENCES

[1] Hironaka, H. Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, Annals of Math., vol. 79 (1964), p. 109.

[2] Godement, P. Théorie des Faisceaux , Paris, 1958

[3] Abhyankar, S. Local uniformization on algebraic surfaces over ground fields of characteristic $p \neq 0$ , Ann. of Math., vol. 63 (1956), p. 491 .

[4] J.P. Serre, Géométrie Algébrique et Géométrie Analytique, Annales Inst. Fourier 1956, p. 1-42 (Cité GAGA).

E X P O S E XVII

# COHOMOLOGIE A SUPPORTS PROPRES

par P. Deligne

Appendice de B. Saint-Donat

SOMMAIRE

Introduction. 1

0. Préliminaires terminologiques. 2

1. Les catégories dérivées.

1.1. Foncteurs exacts (les règles de signe). 6

1.2. Foncteurs dérivés. 22

2. Catégories fibrées en catégories dérivées.

2.1. Introduction 31

2.2. Catégories fibrées en catégories triangulées. 35

2.3. Formule triviale de dualité. 42

2.4. Catégories fibrées en catégories dérivées. 47

3. Recollement de catégories fibrées ou cofibrées.

3.1. Introduction 52

3.2. Morphismes compactifiables. 53

3.3. Recollement. 59

4. Résolutions. Application à la flèche de changement de base.

4.1. Résolutions plates. 68

4.2. Résolutions flasques de Godement. 75

4.3. Le théorème de changement de base. 87

5. Les foncteurs image directe à support propre.

5.1. La construction fondamentale. 89

5.2. Le théorème de changement de base. 100

5.3. Théorème de comparaison et théorème de finitude. 110

5.4. Formule de Künneth. 114

5.5. Cohomologie des puissances symétriques. 120

6. Le foncteur $f_!$.

6.1. Nouvelle construction du foncteur $f_!$. 164

6.2. Le morphisme trace en dimension relative 0. 168

6.3. Variante de la trace pour des coefficients continus. 180

7. Appendice (par B. Saint-Donat)

7.0. Préliminaires 211

7.1. Définition de $R^+f_!$ 215

7.2. Quelques proprietés de $R^+f_!$ 224

7.3. Définition de $Rf_!$ 226

S G A 4

E X P O S E XVII

# COHOMOLOGIE A SUPPORTS PROPRES

par P. Deligne (*)

## Introduction

Dans cet exposé est développé le formalisme de la cohomologie à support propre. Les questions de variance ont été traitées avec assez de soin, alors qu'elles n'étaient que rendues plausibles dans le séminaire oral. Ceci explique la longueur de l'exposé, dont les paragraphes 1 à 4 sont consacrés aux catégories et à la topologie générale. Il est très vivement recommandé au lecteur de ne lire que les paragraphes 5 et 6, où se trouve concentrée la substance géométrique de l'exposé (§ 5 : construction et variance de la cohomologie à support propre, théorèmes de changement de base, de finitude, de Tor-dimension finie et de comparaison ; § 6 : théorie du morphisme tracé pour un morphisme quasi-fini et plat).

Dans les paragraphes 1 et 2, on "rappelle" quelques résultats sur les catégories dérivées. Le § 1 n°1 est consacré au formalisme des signes. Dans le § 3, on traite du problème de recoller deux formalismes de variance. Dans le § 4, on introduit les résolutions plates et on étudie les propriétés spéciales des résolutions flasques de GODEMENT.

(*) Le présent exposé et le suivant, rédigés en 1968 et 1969, reprennent et complètent les exposés oraux de A. GROTHENDIECK (de printemps 1964). Le rédacteur, qui n'assistait pas au séminaire oral, s'est partiellement inspiré des notes de A. GROTHENDIECK.

Dans cet exposé, les foncteurs $R^q f_!$ images directes supérieures à supports propres, et le foncteur $Rf_!$ qui leur donne naissance, ne sont définis que pour f un morphisme compactifiable (3.2.1). Dans l'appendice, rédigé par B. SAINT-DONAT, on montre comment étendre la définition aux morphismes séparés de type fini de but quasi-compact quasi-séparé.

Le § 5 n°5 (cohomologie d'un produit symétrique) ne servira plus dans ce séminaire. Il sera utilisé dans SGA 5 pour raffiner le théorème de rationalité des fonctions L .

Le § 6 n°3 (théorie de la trace pour coefficients continus) ne sera utilisé dans l'exposé XVIII que dans le cas relativement facile des groupes lisses ; le lecteur intéressé par le théorème de dualité de Poincaré (dualité globale), et prêt à admettre un argument transcendant, pourra même se dispenser complètement de lire ce § 6 n°3, ainsi que la plus grande partie du § 1 de XVIII.

## 0. Préliminaires terminologiques.

0.1. Le signe = placé entre deux groupes de symboles désignant des objets d'une catégorie signifiera parfois (par abus de notations) que ces objets sont canoniquement isomorphes. La catégorie et l'isomorphisme canonique devront en principe avoir été définis au préalable. Dans un diagramme, le signe = désignera alors l'isomorphisme lui-même.

0.2.0. Soit $f : S \longrightarrow S'$ un morphisme de sites (IV 4.9.3). Si U et U' sont des objets de S et S', un f-morphisme de U dans U' sera par définition un morphisme de U dans $f^*U'$. Pour les sites étales de schémas, on retrouve la notion usuelle.

0.2.1. Si $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}'$ sont des faisceaux sur S et S', un f-morphisme de $\mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{F}'$ sera indifféremment

(i) un morphisme de $f^*\mathfrak{F}'$ dans $\mathfrak{F}$

(ii) un morphisme de $\mathfrak{F}'$ dans $f_*\mathfrak{F}$

(iii) une fonction qui, à chaque f-morphisme $\varphi$ d'un objet U de S dans un objet U' de S' associe une fonction de $\mathfrak{F}'(U')$ dans $\mathfrak{F}(U)$, et ce de façon compatible avec la composition de $\varphi$ avec une flèche de S ou S' (*).

On voit sur (i), (ii) et (iii) que les faisceaux d'ensemble forment une catégorie fibrée et cofibrée sur la catégorie des sites.

Itou pour les faisceaux de modules à gauche sur des sites annelés. Itou pour les faisceaux étales sur des schémas ; ce n'est pas immédiatement un cas particulier de ce qui précède, car les sites forment en fait une 2-catégorie et "site étale de X" n'est qu'un pseudo-foncteur en X (VII 1.4).

La définition précédente fait des faisceaux d'ensembles (resp. ...) sur des sites variables une catégorie fibrée sur celle des sites, ayant pour catégories fibres les catégories opposées aux catégories usuelles de faisceaux d'ensembles (resp. ...).

0.3. Soient I un ensemble fini, $\varepsilon$ une fonction de I à valeurs dans $\{+1, -1\}$, $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ une famille de catégories additives graduées par des foncteurs de translation $T_i$ (CD I 1.10) et F un multifoncteur **multiadditif** des catégories $\mathcal{A}_i$ dans une catégorie additive $\mathcal{A}$ graduée par le foncteur de translation T . On suppose F covariant (resp. contravariant) en les i tels que $\varepsilon_i = 1$ (resp. $\varepsilon_i = -1$). Modifiant et

(*) Ces terminologies ne sont pas compatibles à l'identification des objets de S aux faisceaux associés.

complétant ([C-D] I 1.1), on dira que F est un foncteur gradué si on s'est donné une famille $(\varphi_i)_{i \in I}$ d'isomorphismes de foncteurs entre $T \circ F$ et $F \circ T_i^{\varepsilon_i}$, telle que les diagrammes suivants soient anticommutatifs, pour $i \neq j$ dans I,

$$\begin{array}{ccc} F \circ (T_i^{\varepsilon_i}, T_j^{\varepsilon_j}) & \xrightarrow{\varphi_j * T_i^{\varepsilon_i}} & T \circ F \circ T_i^{\varepsilon_i} \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_i * T_j^{\varepsilon_j}} & - & \downarrow{\scriptstyle T * \varphi_i} \\ T \circ F \circ T_j^{\varepsilon_j} & \xrightarrow{T * \varphi_j} & T \circ T \circ F \end{array} \quad .$$

On laisse au lecteur le soin de définir le composé de deux foncteurs gradués et de vérifier que c'est encore un foncteur gradué.

0.4. Soient $\mathcal{A}$ une catégorie additive et I un ensemble fini. Pour $i \in I$, on désigne par $l_i$ le $i^{\text{ème}}$ vecteur de base de $\mathbb{Z}^I$. Un complexe $I^{\text{uple}}$ (resp. un complexe $I^{\text{uple}}$ naïf) de $\mathcal{A}$ consiste en

(a) une famille $(K^k)_{k \in \mathbb{Z}^I}$ d'objets de $\mathcal{A}$ ;

(b) pour chaque $i \in I$ et chaque $k \in \mathbb{Z}^I$, une flèche $d_i^k : K^k \longrightarrow K^{k+l_i}$, ces flèches vérifiant $d_i^{k+l_i} d_i^k = 0$ et, pour $i \neq j$ $d_i^{k+l_j} d_j^k + d_j^{k+l_i} d_i^k = 0$ (resp. $d_i^{k+l_j} d_j^k = d_j^{k+l_i} d_i^k$).

0.5. On appellera pro-objet d'une catégorie C un foncteur de C dans (Ens) qui soit limite inductive filtrante (selon une petite catégorie filtrante) de foncteurs représentables (cf. I 8.10). Tout pro-objet est limite inductive selon un petit ensemble ordonné filtrant de foncteurs représentables. Si $X_i$ est un système projectif d'objets de C, indexé par une petite catégorie filtrante, on désigne par "$\varprojlim$" $X_i$ le pro-objet $\varinjlim h^{X_i}$.

0.6. Le lecteur dualisera 0.5 au cas des ind-objets (Cf. I 8.2).

0.7. Conformément à la nouvelle terminologie, on appelle schéma ce qui s'appelait autrefois préschéma, et on appelle schéma séparé ce qui s'appelait autrefois schéma.

0.8. La catégorie des schémas annelés est la catégorie dont les objets sont les schémas dont le site étale est muni d'un faisceau d'anneaux, une flèche de $(S, \mathcal{A})$ dans $(T, \mathcal{B})$ étant un couple formé d'un morphisme de schémas f de S dans T, et d'un homomorphisme $\varphi$ de faisceaux d'anneaux de $f^*\mathcal{B}$ dans $\mathcal{A}$. Le morphisme de schémas f est dit induit par $(f, \varphi)$.

0.9. Si X est un schéma sur Y, on désigne par $(X/Y)^n$ le produit fibré n-uple de X sur Y.

0.10. Soit S un schéma. On appellera grand site étale (resp. grand site fppf, resp. grand site fpqc) de S le site $Sch/_S$, muni de la topologie étale (resp. fppf, resp. fpqc) (SGA 3 IV 6.3). On fera attention que ce n'est pas un U-site (U étant l'univers fini, $Sch/_S$ consistant en les schémas $\in U$).

On appelle petit site fpqc (resp. petit site fppf) de S le site des schémas plats sur S (resp. plats de présentation finie) muni de la topologie fpqc (resp. fppf). Lorsqu'il faudra éviter une confusion, on appellera petit site étale de S le site $S_{et}$ (VII 1.2).

0.11. Dans bien des cas, le rédacteur s'est permis de parler de diagrammes commutatifs de morphismes de sites là où il eût fallu parler de diagrammesessentiellement commutatifs, i.e. commutatifs à isomorphisme près (cf. IV 3.2.2). Le lecteur pourra vérifier que les arguments que nous donnons s'appliquent aussi à la situation générale.

0.12. La terminologie "schéma cohérent" pour "schéma quasi-compact quasi-séparé" a été subrepticement introduite par endroits par A. Grothendieck.

0.13. Un faisceau de torsion F sur un schéma S sera dit premier aux caractéristiques résiduelles de S s'il est limite inductive de ses sous-faisceaux annulés par des entiers n inversibles sur S .

## 1. Les catégories dérivées.

### 1.1. Foncteurs exacts (les règles de signe).

1.1.1. Pour les théorèmes fondamentaux relatifs aux catégories dérivées, je renvoie à VERDIER [CD] et [2]. Dans ce n°, une attention toute spéciale a été accordée aux problèmes de signes.

Rappelons que si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme de complexes (dans une catégorie additive, sous-entendue par la suite), son cône

C(f) est défini par

(1.1.1.1) $\quad C(f)^n = X^{n+1} \oplus Y^n \qquad d^n = -d_X^{n+1} + f^{n+1} + d_Y^n \quad .$

Lorsque X = 0 (resp. Y = 0), on a C(f) = Y (resp. C(f) = X[1]), de sorte que le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & = & 0 & = & X & = & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y & = & Y & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

définit un "triangle"

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow C(f) \xrightarrow{j} X[1] \quad .$$

Dans la catégorie des complexes à homotopie près, on appelle <u>distingué</u> un triangle isomorphe à un triangle de ce type, et <u>antidistingué</u> un triangle qui devient distingué quand on change le signe de ses flèches. On vérifie que le triangle défini par une suite exacte de complexes scindée en chaque degré ([CD] p. 10, cf. la démonstration de 1.1.5.4) est antidistingué et que, à isomorphisme près, tout triangle antidistingué est obtenu ainsi.

*1.1.2. Les calculs de signes s'effectuent le plus aisément à l'aide des "règles formelles" suivantes. On écrit un élément de $C(f)^n$ sous la forme $1 \otimes x + y$ ($x \in X^{n+1}$, $y \in Y^n$), 1 étant une "cellule" de dimension 1, et on pose $d(1) \otimes x = f(x)$. On a donc

$$d(1 \otimes x + y) = d\,1 \otimes x - 1 \otimes dx + dy = -1 \otimes dx + f(x) + dy. \ *$$

Définition 1.1.3. (i) Un foncteur gradué (0.3) d'une catégorie triangulée $\mathcal{A}$ dans une catégorie triangulée $\mathcal{B}$ est dit exact s'il transforme triangles distingués en triangles distingués.

(ii) Un foncteur gradué contravariant d'une catégorie triangulée $\mathcal{A}$ dans une catégorie triangulée $\mathcal{B}$ est dit exact si pour tout triangle distingué (X,Y,Z,u,v,w) de $\mathcal{A}$, le triangle (F(Z), F(Y), F(X), F(v), F(u), TF(w)) est distingué (dans cette définition, on identifie F X à T F T X grâce à la graduation de F).

(iii) Soient $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ une famille finie de catégories triangulées, $\varepsilon$ une fonction de I dans {+1, -1} et $\mathcal{A}$ une catégorie triangulée. Un foncteur gradué F du produit des $\mathcal{A}_i$ dans $\mathcal{A}$, covariant en les i tels que $\varepsilon(i) = 1$ et contravariant en les i tels que $\varepsilon(i) = -1$ est dit exact si quel que soit $i \in I$, les foncteurs de $\mathcal{A}_i$ dans $\mathcal{A}$ déduits de F en fixant toutes les variables, sauf la $i^{\text{ème}}$, sont des foncteurs exacts.

Un composé de foncteurs exacts est encore un foncteur exact.

1.1.4. Si $(K^{n_1 \dots n_p}, d_1, \dots, d_p)$ est un complexe multiple (0.4), le complexe simple associé est défini par

$$K^n = \prod_{\Sigma n_i = n} K^{(n_i)} \quad , \quad d = \Sigma d_i \quad . \tag{1.1.4.0}$$

Quand, exceptionnellement, on le définira par une somme plutôt que par un produit, ce fait sera signalé explicitement.

Soit I un ensemble fini. On se propose, d'après CARTAN-EILENBERG et J.P. SERRE, d'expliquer comment à tout complexe naïf $I^{\text{uple}}$ K est

canoniquement associé un complexe $I^{uple}$ (0.4).

Pour tout ordre total $<$ sur I, soit $K(<)$ le complexe $I^{uple}$ suivant :

$$(1.1.4.1) \qquad \begin{cases} K(<)^{\underline{k}} = K^{\underline{k}} \\ d(<)_i^{\underline{k}} = (-1)^{\sum_{j<i} k_j} d_i \end{cases} .$$

Si $<_1$ et $<_2$ sont deux ordres totals sur I l'isomorphisme canonique $\tau$ entre $K(<_1)$ et $K(<_2)$ est par définition celui donné par

$$(1.1.4.2) \qquad \tau^{\underline{k}} = (-1)^{\varepsilon(<_1,<_2)}, \text{ où } \varepsilon(<_1,<_2) = \sum_{\substack{i<_1 j \\ i<_2 i}} k_i k_j .$$

**1.1.4.2.1.** On vérifie que ces isomorphismes canoniques établissent un système transitif d'isomorphismes entre les $K(<)$ pour $<$ ordre total sur I ; ces $K(<)$ forment donc un complexe $I^{uple}$ unique à isomorphisme unique près, qu'on désignera dans ce n° par la notation $K(*)$ et qu'on appelle le complexe $I^{uple}$ associé ou complexe naïf $I^{uple}$ K. On prendra garde que $K(*)^{\underline{k}}$ n'est pas canoniquement isomorphe à $K^{\underline{k}}$ : seul le choix d'un ordre total sur I permet d'identifier ces deux objets.

Si K est un complexe naïf $I^{uple}$, et si $i \in I$, on désigne par $K[1_i]$ le complexe naïf suivant, de différentielles notées $d_j[1_i]$ :

$$(1.1.4.3) \qquad \begin{cases} K[1_i]^{\underline{k}} = K^{\underline{k}+1_i} \\ d_j[1_i]^{\underline{k}} = d_j^{\underline{k}+1_i} \quad \text{si } i \neq j \\ d_i[1_i]^{\underline{k}} = -d_i^{\underline{k}+1_i} \end{cases} .$$

Si K est un complexe $I^{uple}$, on pose

$$(1.1.4.4)\qquad \begin{cases} K[1_i]^{\underline{k}} = K^{\underline{k}+1_i} \\ d_j[1_i]^{\underline{k}} = -d_j[1_i]^{\underline{k}+1_i} \end{cases}$$

Si K est un complexe naïf $I^{uple}$ et $<$ un ordre total sur I, de sorte que K(*) est donné par (1.1.4.1), on définit un isomorphisme $\sigma$ entre $K[1_i]$ (*) et $K(*)[1_i]$ par la formule

$$(1.1.4.5)\qquad \sigma^{\underline{k}} = (-1)^{\sum_{j<i} k_j}\, id_{K^{\underline{k}+1_i}} \quad .$$

1.1.4.6. On vérifie que cet isomorphisme ne dépend pas du choix de l'ordre total $<$ ; il définit donc un <u>isomorphisme</u>, dit <u>canonique</u>, <u>entre</u> $K[1_i](*)$ et $K(*)[1_i]$.

1.1.4.7. Quels que soient i,j dans I, si K est un complexe ou un complexe naïf $I^{uple}$, on identifie de façon évidente $K[1_i][1_j]$ et $K[1_j][1_i]$.

Pour $i \neq j$ dans I , le diagramme suivant d'isomorphismes canoniques du type 1.1.4.6 ou 1.1.4.7 est alors <u>anticommutatif</u> :

$$(1.1.4.7.1)\qquad \begin{array}{ccccc} K[1_i][1_j](*) & = & K[1_j][1_i](*) & \longleftrightarrow & K[1_j](*)[1_i] \\ \updownarrow & & & & \updownarrow \\ K[1_i](*)[1_j] & \longleftrightarrow & K(*)[1_i][1_j] & = & K(*)[1_j][1_i] \end{array} \quad .$$

1.1.5. Soit $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un foncteur contravariant additif de catégories additives. On définit comme suit l'extension de F aux complexes : $F : C(\mathcal{A}) \longrightarrow C(\mathcal{B})$ . Si K est un complexe de $\mathcal{A}$, on pose

$$(1.1.5.1) \qquad \begin{cases} F(K)^k = F(K^{-k}) \\ d^k_{F(K)} = (-1)^{k+1} F(d^{-k-1}) \end{cases}$$

L'isomorphisme canonique $\sigma$ entre $F(K)[1]$ et $F(K[-1])$ est défini par

$$(1.1.5.2) \qquad \sigma^k = (-1)^{k+1} \mathrm{id}_{F(K^{-k-1})} \quad .$$

Si $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ et $G : \mathcal{B} \longrightarrow C$ sont deux foncteurs contravariants additifs, on définit l'isomorphisme canonique $\rho$ entre $G \circ F(K)$ et $G(F(K))$ par

$$(1.1.5.3) \qquad \rho^k = (-1)^k \quad .$$

Lemme 1.1.5.4. (i) Pour tout foncteur contravariant additif $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, les formules 1.1.5.1 , 1.1.5.2 définissent un foncteur contravariant exact de $K(\mathcal{A})$ dans $K(\mathcal{B})$.

(ii) Pour tout couple (G,F) de foncteurs contravariants additifs composables, la formule (1.1.5.3) définit un isomorphisme de foncteurs gradués entre l'extension aux complexes de GF et le composé des extensions aux complexes de G et F.

Preuve. Un morphisme de degré i : f : K $\longrightarrow$ L est au choix

(a) un morphisme de K dans L[i]

(b) un morphisme de K[-i] dans L

(c) une famille $f^n : K^n \longrightarrow L^{n+i}$ qui commute ou anticommute aux différentielles selon la parité de i.

Si f : K $\longrightarrow$ L[i] est un morphisme de degré i, alors F(f) :F(L)[-i] $\longrightarrow$ K est encore un morphisme de degré i ; pour i=1, on a

(1.1.5.5) $$F(f)^n = (-1)^{n+1} F(f^{-n-1}) \quad .$$

Si $0 \longrightarrow K \xrightarrow{u} L \xrightarrow{v} M \longrightarrow 0$ est une suite exacte de complexes scindée degré par degré, le choix d'un scindage permet d'écrire la différentielle de L sous la forme

$$d_L = d_K + d_M + f \quad ,$$

où f est un morphisme de degré un de M dans K . De même, la suite exacte duale

$$0 \longrightarrow F(M) \longrightarrow F(L) \longrightarrow F(K) \longrightarrow 0$$

définit un morphisme de degré un f* de F(K) dans F(L). On a f* = F(f). Il en résulte que l'image par F d'un triangle (K,L,M,u,v,f) défini par une suite exacte courte de complexes est encore un triangle du même type et, d'après 1.1.1, ceci prouve (i).

Sous les hypothèses (ii), pour f de degré un, on a $G(F(f))^n = (-1)^{n+1}(-1)^{-n}\, G\circ F(f)^n = -G\circ F(f)^n$ ; en particulier, l'isomorphisme de graduation $G(F(K[1])) \xrightarrow{\sim} G(F(K))[1]$ est l'isomorphisme ayant pour composantes -1 .

Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G\circ F(K)[1] & \xleftarrow{\rho[1]} & G(F(K))[1] \\ \| & & \uparrow \\ G\circ F(K[1]) & \xleftarrow{\rho} & G(F(K[1])) \end{array}$$

est donc commutatif , ce qui prouve (ii).

1.1.6. Soit s = +, ou s = - ; soient I un ensemble fini, $\varepsilon : I \longrightarrow \{+,-\}$ une fonction, $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ et $\mathcal{B}$ des catégories additives, et F un multifoncteur multiadditif des catégories $\mathcal{A}_i$ dans $\mathcal{B}$, covariant en les arguments d'indice i tel que $\varepsilon(i) = +$ et contravariant en les autres. On se propose de définir l'extension $K^s(F)$ (ou simplement F) de F aux complexes comme multifoncteur exact des catégories $K^{s\varepsilon(i)}(\mathcal{A}_i)$ ($s\varepsilon(i) = \pm$ , selon la règle des signes) dans $K^s(\mathcal{B})$,(*) présentant la même variance que F. On expliquera ensuite en quel sens cette construction est compatible à la composition des foncteurs. D'autres conventions de degrés sont possibles, et seront utilisées ; ce point est indépendant des questions de signe considérées ici.

1.1.6.1. Si F est contravariant à une variable, on définit $K^s(F)$ par les formules (1.1.5).

1.1.6.2. Si F est covariant, on définit le foncteur $K^s(F)$ par passage au quotient à partir du composé du foncteur évident du produit des catégories $C^s(\mathcal{A}_i)$ dans la catégorie des complexes $I^{uples}$ naïfs, du foncteur (1.1.4) de la catégorie des complexes $I^{uples}$ naïfs dans celle

(*) La construction fournit également une extension de F en un multifoncteur des catégories $C^{s\varepsilon(i)}(\mathcal{A}_i)$ dans $C^s(\mathcal{B})$.

des complexes $I^{uples}$ (1.1.4.2.1), et du foncteur complexe simple associé (1.1.4.0) :

$$K^S(F) = C^S(F)(*)_{s.a.} \quad .$$

Soient des complexes $K_j \in K^S(\mathfrak{A}_j)$, et $i \in I$ ; on pose $K_j[1_i] = K_j$ pour $j \neq i$, et $K_i[1_i] = K_i[1]$. On a alors des isomorphismes évidents :

$$C^S(F)(K_j[1_i]) \simeq C^S(F)(K_j)[1_i] \quad ,$$

et

$$C^S(F)(K_j)(*)[1_i]_{s.a} \simeq C^S(F)(K_j)(*)_{s.a}[1] \quad ,$$

d'où, via (1.1.4.5), un <u>isomorphisme canonique</u> $\sigma$ entre $K^S(F)(K_j[1_i])$ et $K^S(F)(K_j)[1]$. Il résulte de 1.1.4.7 que ces isomorphismes définissent une graduation de $K^S(F)$.

1.1.6.3. Dans le cas général, F est le produit de foncteur contravariants canoniques $\mathfrak{A}_i \longrightarrow \mathfrak{A}_i^o$ (pour $\varepsilon(i) = -$) et d'un foncteur covariant $F^+$ ; on définit le foncteur $K^S(F)$ par composition à partir de 1.1.6.1 et 1.1.6.2.

<u>Proposition</u> 1.1.7. <u>Sous les hypothèses précédentes, le foncteur</u> $K^S(F)$ <u>est un foncteur multiadditif exact</u>.

Il suffit de vérifier 1.1.7 sous les hypothèses de 1.1.6.1 (où la proposition est 1.1.5.4 (i)) ou de 1.1.6.2. Pour vérifier que les foncteurs déduits de $K^S(F)$ en fixant toutes les variables, sauf la $i^{ème}$, sont exacts, on peut expliciter $K^S(F)$ en terme d'un ordre sur I pour lequel i soit le plus petit élément ; un triangle distingué

type (1.1.1.1) est alors transformé en triangle distingué type.

1.1.8. Soient I et J deux ensembles finis, $\psi : I \longrightarrow J$ une application surjective, $\varepsilon_I : I \longrightarrow \{+,-\}$ et $\varepsilon_J : J \longrightarrow \{+,-\}$ des fonctions, et des multifoncteurs multiadditifs, covariants en les arguments pour lesquels $\varepsilon = +$ et contravariant en les autres :

$$G_j : \prod_{\psi(i)=j} \mathcal{A}_i \longrightarrow \mathcal{B}_j \qquad (j \in J)$$

$$F : \prod_{j \in J} \mathcal{B}_j \longrightarrow C$$

Choisissons des ordres totaux sur I et J, de telle sorte que $\psi$ soit une application croissante. On définit alors l'<u>isomorphisme canonique</u> $\rho$ <u>entre l'extension aux complexes de</u> $F \circ (G_j)$ <u>et le composé des extensions aux complexes de</u> F <u>et des</u> $G_j$ par la formule

(1.1.8.1) $$\rho^{\underline{k}} = \prod_i \eta_i^{k_i} : \text{automorphisme de } F \circ (G_j)\ (K_i^{k_i \varepsilon(i)\varepsilon(\psi(i))}).$$

avec $\eta_i = -1$ si $\varepsilon_I(i) = \varepsilon_J(\psi(i)) = -$, $\eta_i = 1$ sinon.

Cette formule généralise (1.1.5.3), on vérifie que $\rho$ ne dépend pas des ordres choisis sur I et J, et est un isomorphisme de foncteurs gradués (cf. 1.1.5.4 (ii)).

Ces isomorphismes $\rho$ vérifient la condition évidente de cocycle pour un composé triple.

1.1.9. Soient I un ensemble fini, i et j deux éléments distincts de I, $I' = I \setminus \{i,j\}$, $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ et $\mathcal{B}$ des catégories additives et $F : (\mathcal{A}_i)_{i \in I} \longrightarrow \mathcal{B}$ et $G : (\mathcal{A}_i)_{i \in I'} \longrightarrow \mathcal{B}$ des multifoncteurs multi-additifs. On suppose que $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_j$ et que F est contravariant en la $i^{ème}$ variable et covariant en la $j^{ième}$. Pour $X, Y \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{A}_i$, on désignera par $F_{X,Y}$ le multifoncteur des $(\mathcal{A}_i)_{i \in I'}$ dans $\mathcal{B}$ obtenu en fixant les $i^{e}$ et $j^{e}$ arguments :

$$F_{X,Y}(\ldots) = F(\ldots X, \ldots, Y, \ldots) \quad .$$

On appelle <u>morphisme de contraction</u> $c : F \longrightarrow G$ la donnée pour tout $X \in \mathcal{A}$ d'un morphisme de foncteurs

$$c_X : F_{X,X} \longrightarrow G \quad ,$$

tel que pour toute flèche $f: X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{A}_i$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F_{Y,X} & \longrightarrow & F_{X,X} \\ \downarrow & & \downarrow c_X \\ F_{Y,Y} & \xrightarrow[c_Y]{} & G \end{array}$$

soit commutatif.

Les conventions 1.1.6 sont motivées par le

<u>Lemme</u> 1.1.9.1. <u>Soient</u> $c : F \longrightarrow G$ <u>un morphisme de contraction et</u> $(K_\ell)_{\ell \in I}$ <u>des complexes dans les</u> $\mathcal{A}_\ell$ , <u>avec</u> $K_i = K_j$. <u>Soit</u> $<$ <u>un ordre total sur</u> I <u>pour lequel</u> i <u>soit le prédécesseur de</u> j. <u>Soit, avec les notations de</u> 1.1.6, <u>pour</u> $k \in \mathbb{Z}$ ,

$$c^k : K^s(F)\ (K_\iota)^k \longrightarrow K^s(G)\ (K_\iota)^k$$

le morphisme dont la restriction à $F(\ldots K_i^{k_i} K_j^{k_j} \ldots)$ vaut 0 si $K_i \neq k_j$, et vaut $c_{K_i^{k_i}}$ si $k_i = k_j$. Alors, $(c^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un morphisme de complexes.

On laisse au lecteur le soin de vérifier ce lemme, et le fait que le morphisme de contraction $(c^k)$ ne dépend pas de l'ordre choisi sur I.

L'exemple standart de morphisme de contraction est celui de la loi de composition

$$\mathrm{Hom}(Y,Z) \otimes \mathrm{Hom}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,Z)$$

Exemples 1.1.10. (i) Si on applique les définitions de 1.1.6 au foncteur produit tensoriel, on retrouve la notion usuelle de produit tensoriel de deux complexes, la différentielle étant donnée par

$$d(x\otimes y) = dx \otimes y + (-1)^{\deg x}\, x \otimes dy \quad .$$

(ii) Si on applique les définitions de 1.1.6 au foncteur Hom(X,Y), en considérant Y comme première variable et X comme seconde variable, convention qu'on suivra toujours, cette convention permet d'identifier, pour deux complexes X,Y, le k-ème composant du complexe Hom(X,Y) défini dans 1.1.6 à $\prod_n \mathrm{Hom}(X^n, Y^{n+k})$, et on retrouve la différentielle habituelle ; pour $f \in \mathrm{Hom}(X^n, Y^{n+k})$, on a

$$df = d \circ f - (-1)^k f \circ d \quad .$$

(iii) Les conventions précédentes ont pour vertu que les systèmes de flèches suivante sont des morphismes de complexes, sans qu'on doive

les perturber par aucun signe (1.1.9) :

$$\mathrm{Hom}^{\cdot}(L,M) \otimes \mathrm{Hom}^{\cdot}(K,L) \longrightarrow \mathrm{Hom}^{\cdot}(K,M) : f \otimes g \longmapsto f \circ g$$

$$\mathrm{Hom}^{\cdot}(L,M) \otimes L \longrightarrow M : f \otimes x \longmapsto f(x) .$$

*1.1.10.1. La convention (1.1.4.5)-(1.1.6.2) se justifie comme suit, pour $F = \otimes$ : un élément de $((K \otimes L)[1])^n$ s'écrit sous la forme (1.1.2) (en se rappelant que $(K \otimes L)[1] = C\ (K \otimes L \longrightarrow 0)$ (1.1.1.1)) $\Sigma\ 1 \otimes (x^p \otimes y^q)$, un élément de $(K[1] \otimes L)^n$ sous la forme $\Sigma\ (1 \otimes x^p) \otimes y^q$ et un élément de $(K \otimes L[1])^n$ sous la forme $\Sigma\ x^p \otimes (1 \otimes y^q)$ ; le signe apparaît quand on interchange $x^p$ et 1. Pour $F$ = dual, la convention (1.1.5.2) se justifie ainsi : un élément de $K^*[1]$ s'écrit $1 \otimes \omega$ ; sa valeur sur un élément $1' \otimes x$ de $K[-1]$ ($1'$ cellule de dimension -1) est $< 1 \otimes \omega,\ 1' \otimes x > = (-1)^{\deg \omega} < 1,1' > < \omega,x > = (-1)^{\deg \omega} < \omega,x >$ ; c'est la convention adoptée.*

Remarque 1.1.11. "Rappelons" qu'une catégorie sous-additive est une catégorie dont les ensembles de flèches Hom(X,Y) sont munies de lois de groupes abéliens, la composition des morphismes étant biadditive. Un foncteur additif F entre catégories sous-additives et un foncteur qui vérifie la formule

$$F(f + g) = F(f) + F(g)$$

pour $f,g \in \mathrm{Hom}(X,Y)$. Les foncteurs additifs d'une catégorie sous-addtive $\mathcal{A}$ dans un autre $\mathcal{B}$ forment une catégorie, notée $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{add}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$.

Soit (D) l'unique catégorie sous-additive, d'ensemble d'objets indexés par $\mathbb{Z}$, $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, avec

$$(1.1.11.1)\quad \begin{cases} \mathrm{Hom}(X^n,X^n) = \mathbb{Z}, \text{ engendré par l'identité} \\ \mathrm{Hom}(X^n,X^{n+1}) = \mathbb{Z}, \text{ engendré par une flèche notée } d_n \\ \mathrm{Hom}(X^i,X^j) = 0 \text{ si } j-i \neq 0 \text{ ou } 1 . \end{cases}$$

Soit D le complexe de (D) défini par $D^n = X^n$ et $d^n = d^n$.

Pour toute catégorie sous-additive $\mathcal{A}$, le foncteur $G \longmapsto G(D)$ de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{add}}((D),\mathcal{A})$ dans $C(\mathcal{A})$ est un isomorphisme.

La construction 1.1.6 s'étend au cas d'un foncteur multiadditif de catégories sous-additives $\mathcal{A}_i$ dans une catégorie additive $\mathcal{A}$.

Soit

$$F^\cdot = (F^n,d^n)_{n\in\mathbb{Z}}$$

un complexe de foncteurs multiadditifs de catégories additives $\mathcal{A}_i$ dans une catégorie additive $\mathcal{A}$. On peut considérer $F^\cdot$ comme un foncteur de (D) dans une catégorie de multifoncteurs, ou encore comme un foncteur multiadditif

$$F_1 : \prod \mathcal{A}_i \times (D) \longrightarrow \mathcal{A} .$$

On définit l'<u>extension de</u> F <u>aux complexes</u> par la formule

$$(1.1.11.2)\qquad F^\cdot(K_1\ldots K_n) = F_1(K_1\ldots K_n, D) \quad .$$

1.1.12. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux catégories additives et

$$F^\cdot = (F^n,d^n)_{n\in\mathbb{Z}}$$

un complexe de foncteurs additifs de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$. Supposons que les

foncteurs $F^i$ admettent des adjoints à droite $F_i$ ; si ${}^t d^i : F_{i+1} \longrightarrow F_i$ est le transposé de $d^i$, soit $F_.$ le complexe de foncteurs additifs de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{A}$, de composantes les $F_i$, et d'opérateur différentiel

$$(d_.)^i = (-1)^{i+1}\, {}^t d_{-i-1} : F_{-i} \longrightarrow F_{-i-1} \quad .$$

Soit ${}^t$ le foncteur <u>contravariant</u> de (D) dans (D) donné par

$${}^t X^n = X^{-n} \quad \text{et} \quad {}^t d^n = d^{-n-1} \quad .$$

Le diagramme suivant est commutatif à isomorphisme canonique près

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A} \times (D) \times \mathcal{B} & \xrightarrow{(F^n(A),\ Id)} & \mathcal{B} \times \mathcal{B} & \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}} & (Ab) \\ \downarrow{\scriptstyle (1.1.12.1)} & & & & \| \\ \mathcal{A} \times (D) \times \mathcal{B} & \xrightarrow{(Id,\ (F_.)^n(B))} & \mathcal{A} \times \mathcal{A} & \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}} & (Ab) \end{array} \quad .$$

Ceci exprime la formule d'adjonction

$$\mathrm{Hom}(F^n(A), B) \xleftrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(A, F_n(B)) \quad . \tag{1.1.12.2}$$

Les conventions générales 1.1.3 fournissent donc un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}^{\cdot}(F^{\cdot}(K), L) \xleftrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(K, F_.(L)) \quad . \tag{1.1.12.3}$$

<u>Définition</u> 1.1.13. <u>Si</u> K <u>est un complexe d'une catégorie abélienne</u> $\mathcal{A}$ , <u>on appelle</u> tronqué à droite (resp. à gauche) <u>de</u> K <u>en dimension</u> n, <u>et on désigne par</u> $\tau_{\leq n}(K)$ (resp. $\tau_{\geq n}(K)$) <u>les complexes suivants</u>

$$\tau_{\leq n}(K) \ : \ \ldots K^{n-2} \longrightarrow K^{n-1} \longrightarrow \mathrm{Ker}(d^n) \longrightarrow 0$$

$$\tau_{\geq n}(K) \ : \ 0 \longrightarrow \mathrm{coker}(d^{n-1}) \longrightarrow K^{n+1} \longrightarrow K^{n+2} \ldots .$$

Proposition 1.1.14. (i) $H^i(\tau_{\leq n}(K)) = 0$ pour $i > n$ et $H^i(\tau_{\geq n}(K)) = 0$ pour $i < n$ .

(ii) Le morphisme canonique $\tau_{\leq n}(K) \longrightarrow K$ (resp. $K \longrightarrow \tau_{\geq n} K$) induit des isomorphismes sur les $H^i$ pour $i \leq n$ (resp. $i \geq n$).

Le foncteur $\tau_{\leq n}$ (resp. $\tau_{\geq n}$) transforme morphismes homotopes en morphismes homotopes. Dès lors, il résulte de 1.1.4 que le foncteur 1.1.13 garde un sens dans la catégorie dérivée.

1.1.15. Si K est un complexe double, de première (resp. deuxième) différentielle d' (resp. d"), on désigne par $\tau''_{\leq n}(K)$ le sous-complexe double de K tel que

$$\tau''_{\leq n}(K)^{pq} = \begin{cases} K^{pq} & \text{si} \quad q < n \\ \operatorname{Ker}(d'') & \text{si} \quad q = n \\ 0 & \text{si} \quad q > n \end{cases}$$

on définit de même $\tau''_{\geq n}(K)$, $\tau'_{\leq n}(K)$ et $\tau'_{\geq n}(K)$ .

1.1.16. On aura aussi à considérer les "tronqués bêtes" d'un complexe K, définis par

$$\sigma_{\leq n}(K)^i = \begin{cases} K^i & \text{si } i \leq n \\ 0 & \text{si } i > n \end{cases} \qquad \sigma_{\geq n}(K)^i = \begin{cases} K^i & \text{si } i \geq n \\ 0 & \text{si } i < n \end{cases} .$$

1.2. Foncteurs dérivés.

Soient $\mathcal{A}$ une catégorie triangulée et S un système multiplicatif saturé (CD 2.1.2). Si $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$, on désignera par $A^+$ et $A^-$ les ind et pro-objets ((0.5) et (0.6))

$$A^+ = \text{"}\varinjlim_{A \xrightarrow{s} A'}\text{"}\ A' \qquad\qquad A^- = \text{"}\varprojlim_{A' \xrightarrow{s} A}\text{"}\ A' \ ,$$

où s parcourt la catégorie filtrante des flèches de S de source ou but A.

Les foncteurs $A \longmapsto A^+$ et $A \longrightarrow A^-$ rendent inversibles les éléments de S et définissent des foncteurs pleinement fidèle de $\mathcal{A}(S^{-1})$ dans les catégories des Ind et pro-objets de $\mathcal{A}$ respectivement.

Définition 1.2.1. Soit F un multifoncteur covariant exact des catégories triangulées $(\mathcal{A}_i)_{0<i\leq n}$ dans la catégorie triangulée $\mathcal{A}$ et soient $S_i$ et S des systèmes multiplicatifs saturés des catégories $\mathcal{A}_i$ et $\mathcal{A}$.

(i) Le foncteur dérivé droit RF de F (relativement aux $S_i$ et à S) est le foncteur des catégories $\mathcal{A}_i(S_i^{-1})$ dans la catégorie des Ind-objets de $\mathcal{A}(S^{-1})$ qui rend commutatif le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{A}_i) & \xrightarrow{(A_i) \longmapsto F(A_i^+)} & \mathrm{Ind}\,\mathcal{A} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{A}_i(S_i^{-1}) & \xrightarrow{\mathrm{RF}} & \mathrm{Ind}\,\mathcal{A}(S^{-1}) \ . \end{array}$$

(ii) On dit que RF est défini en $(A_i)$ si le Ind-objet $RF(A_i)$ de $\mathcal{A}(S^{-1})$ est "essentiellement constant", i.e. provient d'un objet de $\mathcal{A}(S^{-1})$ ; cet objet est appelé la valeur de RF en $(A_i)$.

(iii) On dit que F est dérivable à droite si RF est partout défini ; on désignera alors encore par RF le foncteur des $\mathcal{A}_i(S_i^{-1})$ dans $\mathcal{A}(S^{-1})$ qu'il définit.

(iv) Une famille $(A_i)$ d'objets des $\mathcal{A}_i$ est dite déployée pour RF si le morphisme canonique de $F(A_i)$ dans $RF(A_i)$ est un isomorphisme.

On laisse au lecteur le soin de définir par dualité le dérivé gauche LF de F (à valeur dans Pro $\mathcal{A}(S^{-1})$) et d'étendre les définitions précédentes aux cas où F est covariant en certains arguments et contravariant en d'autres.

Lorsque RF est partout défini, la définition qu'on en a donné ici coïncide avec celle de Verdier (CD p.39), comme on le vérifie facilement.

Proposition 1.2.2. Soient $(A_1', A_1, A_1'')$ un triangle distingué dans $\mathcal{A}_1$, et $A_i \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}_i$ $(i \neq 1)$.

(i) Si $(A_1', (A_i))$ et $(A_1'', (A_i))$ sont déployées pour RF, alors la famille $(A_1, (A_i))$ l'est aussi.

(ii) Si RF est défini en $(A_1', (A_i))$ et en $(A_1'', (A_i))$, il l'est aussi en $(A_1, (A_i))$ et le triangle $(RF(A_1', (A_i)), RF(A_1, (A_i)), RF(A_1'', (A_i)))$ est distingué dans $\mathcal{A}(S^{-1})$.

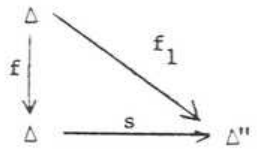
Prouvons que (ii) $\Longrightarrow$ (i). Puisque F est exact, la flèche $(F(A'_l,(A_i)),\ F(A_l,(A_i)),\ F(A''_l,(A_i))) \to (RF(A'_l,(A_i)),RF(A_l,(A_i)),RF(A''_l,(A_i)))$ est un morphisme de triangles distingués. Par hypothèse, cette flèche est un isomorphisme en deux sommets ; c'en est donc un au troisième, comme on voulait .

Lemme 1.2.2.1. Si $A = (X,Y,Z)$ est un triangle distingué d'une catégorie triangulée $\mathfrak{A}$ et S un système multiplicatif saturé de $\mathfrak{A}$, alors le triangle $\Delta^+ = (X^+, Y^+, Z^+)$ de Ind $\mathfrak{A}$ est limite de triangles distingués de $\mathfrak{A}$ .

Désignons par $\mathfrak{L}$ la catégorie des morphismes de triangle distingués de source $\Delta$ dont les flèches appartiennent à S.

(a) Si $\Delta = (X,Y,Z)$ et $\Delta' = (X',Y',Z')$ sont deux triangles distingués de $\mathfrak{A}$ et si $f : \Delta \longrightarrow \Delta'$ est un $\mathfrak{A}(S^{-1})$-morphisme de triangles, il existe dans $\mathfrak{A}$ des morphismes de triangles $s : \Delta' \longrightarrow \Delta''$ et $f_1 : \Delta \longrightarrow \Delta''$ tels que les composantes de s soient dans S et que le diagramme

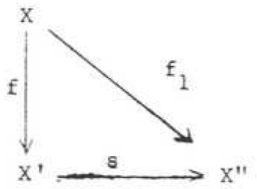
(1)




soit commutatif dans $\mathfrak{A}(S^{-1})$.

Il existe un diagramme commutatif

(2)




$(s \in S,\ f_1 \in \mathfrak{L})$

et un morphisme $\Delta' \xrightarrow{s_1} \Delta''_1$ dans S, admettant s pour composante. Raisonnons de même en les autres sommets : on obtient un diagramme du type (1), dans lequel toutefois $f_1$ n'est pas encore un morphisme de triangle dans $\mathcal{K}$, les diagrammes

(3)
$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{f} & Z''_o \\ {\scriptstyle w}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle w'} \\ X & \xrightarrow{f} & X''_o \end{array}$$

par exemple pouvant ne pas être commutatifs dans $\mathcal{K}$, seulement dans $\mathcal{K}(S^{-1})$. Il existe $t_o : X''_o \longrightarrow X''_1$ dans S tel que $tw''f = tfw$ et $t : \Delta''_o \longrightarrow \Delta''_1$ admettant $t_o$ pour composante. Remplaçons $\Delta''_o$ par $\Delta''_1$, s par ts et $f_1$ par $tf_1$ ; dans le diagramme de type (1) obtenu, (3) est cette fois commutatif ; procédant de même aux autres sommets, on obtient (1). On laisse au lecteur le soin de vérifier de même :

(b) Si $f,g : \Delta \rightrightarrows \Delta'$ sont deux morphismes de triangles distingués dans $\mathcal{K}$, égaux dans $\mathcal{K}(S^{-1})$, alors il existe un morphisme de triangles distingués à flèches dans S, $s : \Delta' \longrightarrow \Delta''$, tel que $Sf = Sg$.

(c) La catégorie $\mathcal{L}$ est filtrante à droite.

(d) On achève la démonstration du lemme en notant que

$$\Delta^+ = \text{"}\varinjlim_{s \in \mathcal{L}}\text{"} \text{ (but de s)} .$$

Prouvons 1.2.2 (ii). Soient X' et X" des objets de $\mathcal{A}(S^{-1})$ représentant $RF(A'_1,(A_i))$ et $RF(A''_1,(A_i))$, et complétons le morphisme de degré 1 de X" dans X' en un triangle distingué (X',X,X"). Remplaçant les $A_i$, $A'_1$, $A_1$ et $A''_1$ par le but d'une flèche de S de source $A_i$, $A'_1$, $A_1$ ou $A''_1$, on se ramène au cas où il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} F(A''_1,(A_i)) & \xleftarrow{a''} & X'' \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(A'_1,(A_i)) & \xleftarrow{a'} & X' \end{array} ,$$

où a" et a' sont des sections de flèches de $F(A''_1,(A_i))$ dans X" et de $F(A'_1,(A_i))$ dans X'. En vertu de l'aniome TR 3 de [C.D] on peut compléter ce diagramme en un morphisme de triangles

$$(X'XX'') \to (F(A'_1,(A_i)),F(A_1,(A_i)),F(A''_1,(A_i))) \to (RF(A'_1,(A_i)),RF(A_1,(A_i)),RF(A''_1,(A_i))).$$

La flèche composée est un morphisme de triangles, de source un triangle distingué et de but une limite (dans $\mathrm{Ind}\,\mathcal{A}(S^{-1})$) de triangles distingués (1.2.2.1). Quel que soit Y dans $\mathcal{A}(S^{-1})$, le diagramme suivant sera commutatif et ses lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} X''[1]) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(Y,X') & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(Y,X) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(Y,X'') & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(Y,X'[1]) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ RF(A'',A_i)[1]) & \to & \mathrm{Hom}(Y,RF(A'_1,A_i)) & \to & \mathrm{Hom}(Y,RF(A_1,A_i)) & \to & \mathrm{Hom}(Y,RF(A''_1,A_i)) & \to & \mathrm{Hom}(Y,RF(A'_1,A_i)[1]) \end{array}$$

Par hypothèse, les flèches autres que la flèche centrale sont des isomorphismes. Le lemme des 5 montre que la flèche centrale aussi est un isomorphisme, quel que soit Y, donc que le triangle distingué (X',X,X") est isomorphe au triangle $(RF(A'_1,(A_i)), RF(A_1,(A_i)), RF(A''_1,(A_i)))$. Ceci achève la démonstration.

Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux catégories abéliennes et F un foncteur covariant additif de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$, F définit des foncteurs exacts de $K(\mathcal{A})$ dans $K(\mathcal{B})$, de $K^+(\mathcal{A})$ dans $K^+(\mathcal{B})$ et de $K^-(\mathcal{A})$ dans $K^-(\mathcal{B})$ (1.1.7).

Définition 1.2.3. (i) On appelle foncteurs dérivés droits de F les foncteurs de $D^+(\mathcal{A})$ dans Ind $D^+\mathcal{B}$ et de $D(\mathcal{A})$ dans Ind $D(\mathcal{B})$ dérivés droits des extensions de F aux complexes $K^+(\mathcal{A}) \longrightarrow K^+(\mathcal{B})$ et $K(\mathcal{A}) \longrightarrow K(\mathcal{B})$.

(ii) Un objet A de $\mathcal{A}$ est dit acyclique à droite pour F, ou, par abus de langage, acyclique pour RF, si le complexe réduit à A en degré 0 est déployé pour RF.

On s'intéressera surtout au cas où RF est partout défini ; on peut alors le considérer comme un foncteur de $D^+(\mathcal{A})$ dans $D^+(\mathcal{B})$, ou de $D(\mathcal{A})$ dans $D(\mathcal{B})$, selon le cas.

Proposition 1.2.4. Le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccc} D^+(\mathcal{A}) & \longrightarrow & D(\mathcal{A}) \\ \downarrow{\scriptstyle RF} & & \downarrow{\scriptstyle RF} \\ \text{Ind } D^+(\mathcal{B}) & \longrightarrow & \text{Ind } D(\mathcal{B}) \end{array} .$$

Si K est un complexe nul en degré $< n$ et si $s : K \longrightarrow L$ est un quasi-isomorphisme, le morphisme composé $K \xrightarrow{s} L \longrightarrow \sigma_{\geq n}(L)$ (1.1.6) est encore un quasi-isomorphisme. Les quasi-isomorphismes de K dans un complexe borné inférieurement forment donc une sous-catégorie (pleine) cofinale de la catégorie de tous les quasi-isomorphismes de source K. La proposition en résulte formellement.

En particulier, si le foncteur RF, est partout défini sur $D(\mathcal{A})$, il est partout défini sur $D^+(\mathcal{A})$, et le foncteur dérivé $RF : D^+(\mathcal{A}) \longrightarrow D^+(\mathcal{B})$ est restriction du foncteur dérivé $RF : D(\mathcal{A}) \longrightarrow D(\mathcal{B})$.

(1.2.5) On laisse au lecteur le soin de :

(i) Généraliser la définition 1.2.3 au cas d'un complexe de multifoncteurs, covariant en certaines variables et contravariant en d'autres ;

(ii) Dualiser la définition 1.2.5 (i) pour définir les dérivés gauches ;

(iii) Etendre la proposition 1.2.4 au cas d'un complexe borné de multifoncteurs;

(iv) Dualiser la proposition 1.2.5 (iii) en considérant des foncteurs dérivés gauches et l'inclusion de $D^-(\mathcal{B})$ dans $D(\mathcal{B})$.

Proposition 1.2.6. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux catégories abéliennes, P une partie de $Ob(\mathcal{A})$ et F un foncteur additif de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$. On suppose que

(a) tout objet de $\mathcal{A}$ est quotient d'un élément de P

(b) pour toute suite exacte courte

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow Q \longrightarrow R \longrightarrow 0 \quad ,$$

où Q et R sont dans P, P appartient aussi à P et la 0-suite

$0 \longrightarrow FP \longrightarrow FQ \longrightarrow FR \longrightarrow 0$ est exacte. Alors, tout objet de P est acyclique pour LF .

Si $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$, les résolutions gauches de A par des objets de P formeront un système cofinal dans la catégorie filtrante des résolutions gauches de $A_o$ . Il suffit donc de prouver que si un complexe

$$\ldots \longrightarrow A_2 \longrightarrow A_1 \longrightarrow A_o \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

est acyclique et à objets dans P, son image est acyclique. Le coupant en suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}(d_{i-1}) \longrightarrow A_i \longrightarrow \mathrm{Im}(d_i) \longrightarrow 0 \qquad (1.2.6.\ i)\ (i \geq 0)$$

on voit par récurrence sur i que $\mathrm{Im}(d_i) \in P$ et que l'image de (1.2.6 i) par F est une suite exacte courte. L'image du complexe est donc acyclique.

Proposition 1.2.7. Soit F un foncteur additif d'une catégorie abélienne dans une catégorie abélienne $\mathcal{B}$ . Si tout objet de $\mathcal{A}$ est quotient (resp. sous-objet) d'un objet acyclique pour LF (resp. RF) (1.2.3), le foncteur dérivé LF : $D^-(\mathcal{A}) \longrightarrow D^-(\mathcal{B})$ (resp. RF : $D^+(\mathcal{A}) \longrightarrow D^+(\mathcal{B})$) est partout défini et tout complexe borné supérieurement (resp. inférieurement) d'objets acycliques pour LF (resp. RF) est déployé.

Il suffit de considérer le dérivé gauche LF . Si K est un complexe borné supérieurement, les quasi-isomorphismes $s : L \longrightarrow K$ avec L borné supérieurement et à objets acycliques forment un système cofinal dans la catégorie des quasi-isomorphismes de but K . Il suffit de montrer que pour K à objets acycliques, $F(s) : F(L) \longrightarrow F(K)$ est un

quasi-isomorphisme ; on aura alors dans le cas général F(L) = LF(K). Soit M le cône de s . Le complexe est à objets acyclique et H*(M) = 0 ; il faut prouver que H*(F(M)) = 0.

Soit i un entier. Les complexes déployés forment une sous-catégorie triangulée, de sorte que tout complexe borné d'objets acycliques, notamment $\tau_{\geq i}(M)$, est déployé. Puisque $H^j(\tau_{\geq i}(L)) = 0$ pour $j > i$, on a, pour $j > i$, $H^j(F(M)) = H^j(F(\tau_{\geq i}(M))) = H^j\, LF(\tau_{\geq i}(M)) = 0$ .

Proposition 1.2.8. Soit $F^\cdot$ un complexe borné inférieurement de foncteurs de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$ . Si pour tout $K \in K^+(\mathcal{A})$ existe un quasi-isomorphisme $L \xrightarrow{s} K$, où $L \in K^+(\mathcal{A})$ est déployé pour tous les $RF^i$, alors le foncteur dérivé $RF^\cdot : D^+(\mathcal{A}) \longrightarrow D^+(\mathcal{B})$ existe et tout complexe borné inférieurement déployé pour tous les $RF^i$ est déployé pour $RF^\cdot$ .

La preuve en est laissée au lecteur, ainsi que celle de l'énoncé dual, ou des variantes obtenues en prenant F contravariant, ou en prenant un complexe borné de foncteurs et en travaillant dans $D(\mathcal{A})$ et $D(\mathcal{B})$.

Définition 1.2.9. Soit F un foncteur de $D^b(\mathcal{A})$ dans $D(\mathcal{B})$ et d un intervalle de $\mathbb{Z}$ . On dit que F est d'amplitude cohomologique $\subset$ d si pour tout $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$, $H^iF(A) = 0$ pour $i \notin d$.

Très souvent, d sera un intervalle de la forme [0,x] ou [-x,0] et on dira alors que F est de dimension cohomologique resp. homologique $\leq x$ . On dira que F est de dimension finie s'il existe un intervalle fini d de $\mathbb{Z}$ tel que F soit d'amplitude $\subset$ d .

Proposition 1.2.10. Supposons remplies les hypothèses de 1.2.7, et que le foncteur RF : $D^+(\mathcal{A}) \longrightarrow D^+(\mathcal{B})$ (resp. LF : $D^-(\mathcal{A}) \longrightarrow D^-(\mathcal{B})$) est de dimension finie. Alors tout complexe d'objets acycliques pour RF (resp. LF) est déployé, et le foncteur RF : $D(\mathcal{A}) \longrightarrow D(\mathcal{B})$ (resp. LF : $D(\mathcal{A}) \longrightarrow D(\mathcal{B})$) est partout défini.

Pour la démonstration, on renvoie à Verdier [CD]. Il existe un énoncé analogue pour les complexes bornés de foncteurs. On peut encore remplacer l'exposant + (resp -) par b .

## 2. Catégories fibrées en catégories dérivées.

### 2.1. Introduction.

Le rédacteur insiste pour que le lecteur s'abstienne de lire ce § . On y donne le formalisme du théorème trivial de dualité et on y résoud la perplexité soulevée par Artin dans XII 4 .

Pour les notions de catégories sur une autre, de catégorie fibrée, de catégorie cofibrée et de clivage, on renvoie à SGA 1 VI . On établit entre autres dans cet exposé une équivalence entre les notions de catégories fibrées clivées normalisées sur une catégorie C , et de pseudo-foncteur de $C^o$ dans (Cat).

Définition 2.1.1. Si X est un site annelé, on désigne par D(X) la catégorie dérivée de la catégorie abélienne des faisceaux de modules à gauche sur X .

Quand il y a lieu d'éviter une confusion, on écrit plutôt $D(X,\mathcal{A})$, $\mathcal{A}$ désignant le faisceau d'anneaux.

Si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme de sites annelés, f définit des foncteurs dérivés

(1) $Rf_* : D^+(X) \longrightarrow D^+(Y)$

et

(2) $Lf^* : D^-(Y) \longrightarrow D^-(X)$ ,

et, par passage aux catégorie opposées, des foncteurs

(1°) $Rf_* : D^+(X)^\circ \longrightarrow D^+(Y)^\circ$

(2°) $Lf^* : D^-(Y)^\circ \longrightarrow D^-(X)^\circ$ ,

"fonctoriels" en f. Plus précisément, (1°) et (2°) définissent deux pseudo-foncteurs de la catégorie des sites dans celle des catégories triangulées, l'un covariant et l'autre contravariant. On trouve ainsi deux catégories sur celle des sites, l'une cofibrée, de fibres les $D^+(X)^\circ$, et de foncteurs image directe les $Rf_*$ , l'autre fibrée, de fibres les $D^-(X)^\circ$, et de foncteurs image réciproque les $Lf^*$ . Si le foncteur f* est de dimension homologique finie (i.e. de "Tor-dimension finie") on peut dans (2) remplacer l'exposant par un exposant + . On obtient donc deux catégories sur la catégorie $\mathcal{A}_{tdf}$ das sites annelés et des morphismes de site annelés de Tor-dimension finie, catégories dont les fibres sont les catégories $D^+(X)^\circ$. Le "théorème trivial de dualité" de VERDIER ([CD] p. 48) exprime que ces deux catégories sont canoniquement isomorphes ; elles sont donc fibrées et cofibrées ; les foncteurs "image directe" sont les foncteurs $Rf_*$(sic), et les foncteurs "image réciproque" sont les foncteurs Lf*(sic).

2.1.2. Le langage des catégories fibrées permet de résoudre aisément la perplexité soulevée par ARTIN en XII 4 : il suffit d'appliquer la proposition suivante à la catégorie fibrée et cofibrée sur celle des

sites de fibres **les opposées** des catégories de faisceaux sur les sites correspondants (cf. 0.2 ).

Soit $\mathcal{E}$ une catégorie sur $\mathcal{B}$, $f: y \longrightarrow x$ une flèche de $\mathcal{B}$, et $F \in Ob(\mathcal{E}_x)$. Rappelons qu'un couple $(G,\varphi)$ ($G \in Ob\ \mathcal{E}_y$, $\varphi \in Hom_f(G,F)$) est une <u>image réciproque au sens strict</u> de F par f si, quels que soient $g: Z \longrightarrow y$ et $H \in Ob\ \mathcal{E}_Z$, on a

$$Hom_g(H,G) \xrightarrow[\sim]{\varphi} Hom_{fg}(H,F) \quad .$$

De même pour les images directes. Si $\mathcal{E}$ est fibrée ou cofibrée sur $\mathcal{B}$, cette notion se réduit à celle d'image réciproque.

<u>Proposition</u> 2.1.3. <u>Soient</u> $\varepsilon$ <u>une catégorie sur</u> $\mathcal{B}$, $y \in Ob\ \mathcal{B}$, $F \in Ob\ \mathcal{E}_y$ <u>et un diagramme commutatif dans</u> $\mathcal{B}$ :

(2.1.3.1)
$$\begin{array}{ccc} y' & \xrightarrow{g'} & y \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ x' & \longrightarrow & x \end{array} \quad .$$

<u>On suppose que les images directes et réciproques</u> $f_*F$, $g^*f_*F$, $g'^*F$ <u>et</u> $f'_*\,g'^*F$ <u>existent au sens strict</u>. <u>Il existe alors une et une seule flèche</u> $\varphi \in F\ell\ \mathcal{E}_{x'}$ , <u>dite</u> **flèche de changement** de base, <u>rendant commutatif le diagramme</u>

(2.1.3.2)
$$\begin{array}{ccc} g'^*F & \longrightarrow & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ f'_*g'^*F & & f_*F \\ & {\scriptstyle\varphi}\searrow \quad \nearrow & \\ & g^*f_*F & \end{array} \quad .$$

Si de plus les images directes $g_!g'^*F$ et $g_*f_!g'^*F$ existent au sens strict, alors la flèche $\varphi$ coïncide avec celle définie en XII 4 . Si $f'^*f_!g'^*F$ et $f'^*f_!F$ existent au sens strict, elle coïncide encore avec la 2e flèche définie en XII 4 .

En particulier les deux flèches de changement de base XII 4 coïncident.

Par hypothèse, les flèches du diagramme (2.1.3.2) induisent des bijections

$\mathrm{Hom}_Y(F,F) = \mathrm{Hom}_{g'}(g'^*F,F) = \mathrm{Hom}_{fg'}(g'^*F,f_*F)$ et

$\mathrm{Hom}_{X'}(f_!g'^*F,g^*f_*F) = \mathrm{Hom}_{f'}(g'^*F,g^*f_*F) = \mathrm{Hom}_{gf'}(g'^*F,f_*F)$ .

Puisque $fg' = gf'$, $\mathrm{Hom}_{fg'}(g'^*F,f_*F)$ est identique à $\mathrm{Hom}_{gf'}(g'^*F,f_*F)$ et les flèches du diagramme (2.1.2.2) induisent des bijections

$\mathrm{Hom}_Y(F,F) = \mathrm{Hom}_{fg'}(g'^*F,f_*F) = \mathrm{Hom}_{X'}(f_!g'^*F,g^*f_*F)$,

et l'image de $1_F$ est la seule flèche de $\mathcal{C}_{X'}$ rendant (2.1.3.2) commutatif.

Par définition, dans XII 4, la flèche de changement de base $\Psi$ était celle rendant commutatif le diagramme suivant

(2.1.3.3)
$$\begin{array}{ccccccc} f_!g'^*F & \longleftarrow & g'^*F & = & g'^*F & \longrightarrow & F & = & F \\ \downarrow \Psi & & \downarrow u_4 & & \downarrow u_3 & & \downarrow u_2 & & \downarrow u_1 \\ g^*f_*F & \longleftarrow & f'^*g^*f_*F & = & g'f^*f_*F & \longrightarrow & f^*f_*F & \longrightarrow & f_*F \end{array} \quad .$$

Les flèches horizontales et $u_1$ sont les flèches canoniques ; $u_2$ est donc la flèche d'adjonction, $u_3 = g^1{}^*(u_2)$, $u_4$ se déduit de l'isomorphisme entre $f'^*g^*$ et $g'^*f^*$, et la flèche $\Psi$ se déduit de $u_4$ par adjonction.

L'application composée de source $g'^*F$ et de but $f_*F$ est celle qui apparaît dans (2.1.3.2) et il en est donc de même dans le diagramme commutatif suivant, dont le carré de gauche est extrait de (2.1.2.3)

$$\begin{array}{ccccc} g'^*F & \xrightarrow{u_4} & f'^*g^*f_*F & \longrightarrow & f_*F \\ \downarrow & & \downarrow & & \| \\ f'_*g'^*F & \xrightarrow{\Psi} & g^*f_*F & \longrightarrow & f_*F \end{array} .$$

Cela signifie que $\Psi$ vérifie la propriété caractéristique de $\varphi$ .

La définition de $\varphi$ est autoduale, ce qui dispense de démontrer la seconde partie de 2.1.3.

## 2.2. Catégories fibrées en catégories triangulées.

Définition 2.2.1. On appelle "catégorie additive sur une catégorie $\mathcal{B}$" une catégorie $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{B}$ dont les ensembles de flèches $\mathrm{Hom}_f(X,Y)$ (pour $f \in Fl(\mathcal{B})$, X (resp.Y) au-dessus de la source (resp. du but) de f) ont été munis de lois de groupes abéliens, de sorte que :

(i) Quels que soient $x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$ dans $\mathcal{B}$ et X, Y, Z dans $\mathcal{A}$ au-dessus de s, y et z respectivement, la loi de composition :

$\mathrm{Hom}_g(Y,Z) \times \mathrm{Hom}_f(X,Y) \xrightarrow{\circ} \mathrm{Hom}_{gf}(X,Z)$ est biadditive.

(ii) Les catégories fibres sont additives.

On n'aura pas à utiliser ici que ces lois de groupe abélien, quand elles veulent bien exister, sont uniquement déterminées par $\mathcal{A}$ , $\mathcal{B}$ et $\rho$ . Un $\mathcal{B}$ -foncteur $F : \mathcal{A}_1 \longrightarrow \mathcal{A}_2$ entre catégories additives sur $\mathcal{B}$ est dit additif s'il induit des homomorphismes

$F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_1,f}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_2,f}(X,Y)$ .

Définition 2.2.2. On appelle "catégorie abélienne sur une catégorie $\mathcal{B}$" une catégorie $\mathcal{A}$ additive sur $\mathcal{B}$, dont les fibres sont abéliennes, et telle que pour toute flèche $f: x \longrightarrow y$ de $\mathcal{B}$ le bifoncteur

$$\mathrm{Hom}_f(X,Y) : \mathcal{A}_x^{\circ} \times \mathcal{A}_y \longrightarrow (\mathrm{Ab})$$

soit exact à gauche en X et Y .

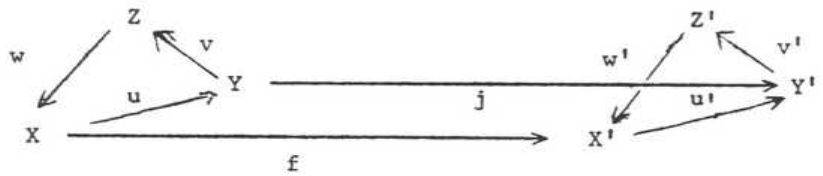
On n'aura pas à utiliser ici que si $\mathcal{A}$ est une catégorie fibrée et cofibrée sur $\mathcal{B}$ (SGA 1 VI 6) elle est abélienne sur $\mathcal{B}$ dès que ses fibres sont des catégories abéliennes.

Définition 2.2.3. On appelle "catégorie triangulée sur une catégorie $\mathcal{B}$" une catégorie $\mathcal{A}$ additive sur $\mathcal{B}$, munie d'un foncteur $T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ et dont les fibres $\mathcal{A}_x$ pour $x \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{B}$ sont munies d'ensembles $\Delta_x$ de triangles, ce de sorte que ;

(i) T est un $\mathcal{B}$-automorphisme additif de $\mathcal{A}$

(ii) chaque catégorie fibre $\mathcal{A}_x$, munie du foncteur $T_x$ induit par T et de l'ensemble $\Delta_x$, est une catégorie triangulée (CD 1.1),

(iii) si les triangles (X,Y,Z,u,v,w) et (X',Y',Z',u',v',w') appartiennent à $\Delta_x$ et $\Delta_{x'}$, respectivement, tout diagramme




où u'f = gu peut se prolonger en un morphisme de triangles (f,g,h) : (X,Y,Z) $\longrightarrow$ (X',Y',Z').

T sera appelé le foncteur de translation, on écrira souvent A[1] plutôt que T(A), A[n] désignant alors $T^n(A)$ ($n \in \mathbb{Z}$).

Les triangles appartenant aux ensembles $\Delta_X$ seront dits distingués ou exacts.

Proposition 2.2.4. Soient $\mathcal{A}$ une catégorie triangulée sur $\mathcal{B}$, x un objet de $\mathcal{B}$, (X,Y,Z,u,v,w) un triangle distingué de $\mathcal{A}_x$. Quels que soient f: y $\longrightarrow$ x et l'objet A $\in$ Ob $\mathcal{A}_y$, la suite infinie suivante est exacte

$$\ldots \to \mathrm{Hom}_f(A,X) \to \mathrm{Hom}_f(A,Y) \to \mathrm{Hom}_f(A,Z) \to \mathrm{Hom}_f(A,X[1]) \to \mathrm{Hom}_f(A,Y[1]) \to \ldots$$

Enoncé analogue pour f : x $\longrightarrow$ y et A $\in$ Ob $\mathcal{A}_y$.

On laisse au lecteur le soin de démontrer cette proposition en paraphrasant VERDIER [CD] p. 4. On lui laisse aussi le soin de donner un sens à la proposition suivante et de la vérifier :

Proposition 2.2.5. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie additive (resp. abélienne, resp. triangulée) sur $\mathcal{B}$. Pour tout foncteur $\mathcal{B}' \longrightarrow \mathcal{B}$ de but $\mathcal{B}$, la catégorie $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \times_{\mathcal{B}} \mathcal{B}'$ est additive (resp. abélienne, resp. triangulée) sur $\mathcal{B}$.

Exemple 2.2.6. La catégorie des faisceaux de modules sur des sites annelés variables est abélienne sur la catégorie des sites annelés.

Exemple 2.2.7. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie additive sur $\mathcal{B}$. La catégorie $C(\mathcal{A}/\mathcal{B})$ des complexes de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{B}$ a pour objets les complexes des catégories fibres. Une flèche f de $(X^n,d)$ dans $(Y^n,d)$ est un système

de flèches $f^n : X^n \longrightarrow Y^n$ tel que $fd^n = f^{n+1} d$. On pose $p(f) = p(f^n)$ (cette flèche ne dépend pas de n car les p(d) sont des identités). $C(\mathcal{A}/\mathcal{B})$ est une catégorie additive sur $\mathcal{B}$. On définit un foncteur "de translation" en posant

$$(K[1])^n = K^{n+1} \quad , \quad (d[1])_n = -d_{n+1} \quad .$$

Exemple 2.2.8. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie additive sur $\mathcal{B}$. La catégorie $K(\mathcal{A}/\mathcal{B})$ des complexes de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{B}$ à homotopie près a les mêmes objets que $C(\mathcal{A}/\mathcal{B})$. On l'obtient en décrétant nulles, dans $C(\mathcal{A}/\mathcal{B})$, les flèches homotopes à zéro ; en d'autres termes, pour $f : x \longrightarrow y$ dans $\mathcal{B}$, $X^\cdot \in \mathrm{Ob}\, C(\mathcal{A}/\mathcal{B})_x$ et $Y^\cdot \in \mathrm{Ob}\, C(\mathcal{A}/\mathcal{B})_y$, on pose

$$\mathrm{Hom}_f(X^\cdot, Y^\cdot) = H^0 \mathrm{Hom}^\cdot_f(X^\cdot, Y^\cdot)$$

Le foncteur de translation passe au quotient.

Si $F : \mathcal{B}' \longrightarrow \mathcal{B}$ est un foncteur de but $\mathcal{B}$, et si $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \times_{\mathcal{B}} \mathcal{B}'$, on laisse au lecteur le soin d'identifier $C(\mathcal{A}'/\mathcal{B}')$ à $C(\mathcal{A}/\mathcal{B}) \times_{\mathcal{B}} \mathcal{B}'$ et $K(\mathcal{A}'/\mathcal{B}')$ à $K(\mathcal{A}/\mathcal{B}) \times_{\mathcal{B}} \mathcal{B}'$. En particulier, les fibres de la catégorie $K(\mathcal{A}/\mathcal{B})$ sont les catégories $K(\mathcal{A}_x)$ et, en tant que telles, sont triangulées.

Proposition 2.2.9. (i) Pour les structures additionnelles définies en 2.2.8, la catégorie $K(\mathcal{A}/\mathcal{B})$ est triangulée sur $\mathcal{B}$.

(ii) La formation de la catégorie additive (resp. triangulée) $C(\mathcal{A}/\mathcal{B})$ (resp. $K(\mathcal{A}/\mathcal{B})$) est compatible à tout changement de catégorie base $\mathcal{B}' \longrightarrow \mathcal{B}$.

Les conditions (i) et (ii) de la définition 2.2.3 se vérifient fibre par fibre. (iii) se vérifie en paraphrasant VERDIER [CD] p.4 .

Remarque 2.2.10. Ce qui précède s'applique aussi aux catégorie $K^+(\mathcal{A}/\mathcal{B})$, $K^-(\mathcal{A}/\mathcal{B})$ et $K^b(\mathcal{A}/\mathcal{B})$ obtenues en se limitant respectivement aux complexes bornés inférieurement, supérieurement, ou bornés.

Remarque 2.2.11. Prenant pour $\mathcal{B}$ la catégorie finale, on retrouve les catégories usuelles de complexes .

2.2.12. Soit F un pseudo-foncteur d'une catégorie $\mathcal{B}^\circ$ dans (Cat). On sait (SGA 1 VI) que F définit une catégorie fibrée sur $\mathcal{B}$ , de fibres les catégories F(x). Quels que soient $f: x \longrightarrow y$ dans $\mathcal{B}$ et $X \in \mathrm{Ob}\ F(n)$, $Y \in \mathrm{Ob}\ F(y)$, on a par définition

(2.2.12.1) $$\mathrm{Hom}_f(X,Y) = \mathrm{Hom}_{F(x)}(X,F(f)(Y)) \quad .$$

On sait (ibidem) que la construction précédente définit une équivalence entre la 2-catégorie des pseudo-foncteurs de $\mathcal{B}^\circ$ dans (Cat) et la 2-catégorie des catégories fibrées sur $\mathcal{B}$ .

Partons d'un pseudo-foncteur de $\mathcal{B}^\circ$ dans la 2-catégorie ayant pour objets les catégories additives (resp. abéliennes, resp. triangulées) et pour 1-flèchesles foncteurs additifs (resp. exacts à gauche, resp. triangulés). On vérifie aussitôt que la catégorie définie par(2.1.12.1) est additive (resp. abélienne, resp. triangulée). Réciproquement :

Proposition 2.2.13. La construction précédente établit une équivalence entre

(a) La 2-catégorie des pseudo-foncteurs de $\mathcal{B}^{\circ}$ dans la 2-catégorie ayant pour objets les catégories additives (resp. abéliennes, resp. triangulées), et pour 1-flèches les foncteurs additifs (resp. exacts à gauche, resp. triangulés).

(b) La 2-catégorie des catégories additives (resp. abéliennes, resp. triangulées) sur $\mathcal{B}$, qui sont fibrées sur $\mathcal{B}$.

La théorie développée en SGA 1 VI permet de ne vérifier que le point suivant :

2.2.13.1. Soient $\mathcal{A}$ une catégorie additive (resp. abélienne, resp. triangulée) sur $\mathcal{B}$, $f : x \longrightarrow y$ une flèche de $\mathcal{B}$ et supposons qu'un foncteur image réciproque $f^* : \mathcal{A}_y \longrightarrow \mathcal{A}_n$ existe ; $f^*$ est alors additif (resp. exact à gauche, resp. triangulé).

Le foncteur $f^*$ donne lieu à des isomorphismes

$$\mathrm{Hom}_f(X,Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_x(X, f^*(Y)) \quad .$$

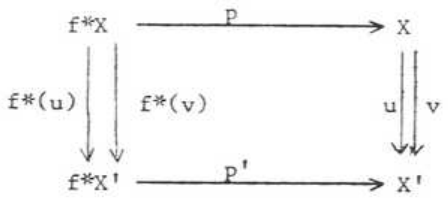
Il faut prouver dans le cas triangulée, que $f^*$ est triangulé pour l'isomorphisme $Tf^* = f^* T$ (T foncteur de translation) qui rend commutatif les diagrammes suivants

(2.2.13.2)

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}_f(X,Y) & = & \mathrm{Hom}_x(X, f^*Y) & & \\ \| & & & \searrow & \\ & & & & \mathrm{Hom}_x(TX, Tf^*Y) \\ \mathrm{Hom}_f(TX,TY) & = & \mathrm{Hom}_x(TX, f^*TY) & \nearrow & \end{array}$$

Cas additif : Soit un diagramme

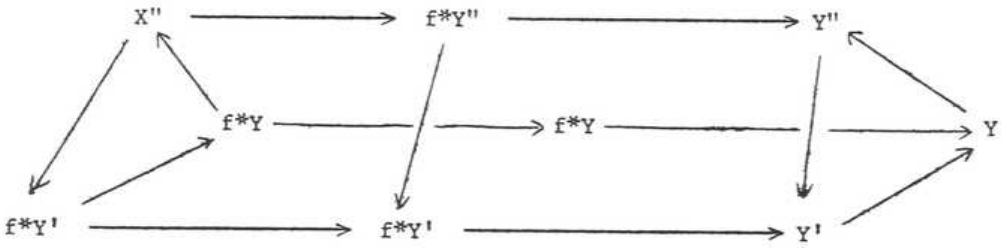
(2.2.13.3)




On a $p'f^*(u+v) = (u+v)\,p = up+vp = p'f^*(u)+p'f^*(v) = p'(f^*(u) + f^*(v))$ et donc $f^*(u+v) = f^*(u) + f^*(v)$.

Cas abélien : par définition (2.2 ), le foncteur $\mathrm{Hom}(X, f^*Y) = \mathrm{Hom}_f(X,Y)$ est exact à gauche en Y, quel que soit X, donc $f^*$ est exact à gauche.

Cas triangulé : soit (Y',Y,Y") un triangle distingué dans $\mathcal{A}_Y$ et soit $(f^*Y', f^*Y)$. En vertu de 2.2.3 , le morphisme canonique entre les bases de ces triangles peut se prolonger en un morphisme de triangles, donnant lieu au diagramme suivant




Prouvons que s est un isomorphisme, ce qui achèvera la démonstration. Quel que soit X dans Ob $\mathcal{A}_X$, on dispose du diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathrm{Hom}_{X'}(X,f^*Y') & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_X(X,f^*Y) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_X(X,X'') & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_X(X,f^*Y'[1]) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_X(X,f^*Y[1]) \\
\| & & \| & & \downarrow & & \| & & \| \\
\mathrm{Hom}_X(X,f^*Y') & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_X(X,f^*Y) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_X(X,f^*Y'') & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_X(X,f^*Y'[1]) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_X(X,f^*Y[1]) \\
\| & & \| & & \| & & \| & & \| \\
\mathrm{Hom}_f(X,Y) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_f(X,Y) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_f(X,Y'') & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_f(X,Y'[1]) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_f(X,Y[1])
\end{array} .$$

Les premières et dernières lignes sont exactes en vertu de 2.2.4. En vertu du lemme des cinq, l'application induite par s de Hom(X,X") dans Hom(X,f*Y") est toujours bijective et s est donc un isomorphisme.

On a évidemment des résultats duaux pour les catégories cofibrées.

2.3. Formule triviale de dualité.

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie sur une catégorie base $\mathcal{B}$, et soit S un ensemble de flèches de $\mathcal{A}$, chacune se projetant sur une identité de $\mathcal{B}$. La catégorie $\mathcal{A}(S^{-1})$ déduite de $\mathcal{A}$ par calcul de fractions est une catégorie sur $\mathcal{B}$ (vue la propriété universelle).

Soit $\mathcal{B}' \longrightarrow \mathcal{B}$ un foncteur ; on désigne par $\mathcal{A}'$ le produit fibré $\mathcal{A} \underset{\mathcal{B}}{\times} \mathcal{B}'$ et par S' l'image réciproque de S dans $\mathcal{A}'$. Le foncteur composé $\mathcal{A}' \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}(S^{-1})$ rend inversible les flèches de S', donc se factorise par $\mathcal{A}'(S'^{-1})$. On trouve ainsi un $\mathcal{B}'$-foncteur canonique

$$(2.3.1) \qquad \mathcal{A}'(S^{-1}) \longrightarrow \mathcal{B}' \underset{\mathcal{B}}{\times} \mathcal{A}(S^{-1}) \quad .$$

Lemme 2.3.2. Si $\mathcal{B}'$ est une sous-catégorie de $\mathcal{B}$, et si chaque fois qu'une flèche composée h = f∘g de $\mathcal{B}$ appartient à $\mathcal{B}'$, f et g appartiennent à $\mathcal{B}'$, alors le foncteur (2.3.1) est un isomorphisme.

Notons que (2.3.1) induit toujours une bijection sur les objets, et que, dans le cas présent, $\mathcal{B}' \times_{\mathcal{B}} \mathcal{A}(S^{-1})$ est une sous-catégorie de $\mathcal{A}(S^{-1})$.

Rappelons la construction "explicite" de $\mathcal{A}(S^{-1})$ [1, Chap. I]. Etant donné deux objets X et Y de $\mathcal{A}$, on considère les "composés formels" $f_1 \ldots f_n$ où chaque $f_i$ est soit une flèche de $\mathcal{A}$, soit l'inverse d'une flèche de S. L'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}(S^{-1})}(X,Y)$ sera le quotient de l'ensemble de ces "composés formels" par la relation d'équivalence engendrée par les relations

$$f_1 \ldots uv \ldots f_n \equiv f_1 \ldots (u \circ v) \ldots f_n \qquad \text{pour } u,v \text{ dans } Fl(\mathcal{A})$$

$$f_1 \ldots ss^{-1} \ldots f_n \equiv f_1 \ldots f_n \qquad \text{pour } s \in S$$

$$f_1 \ldots s^{-1}s \ldots f_n \equiv f_1 \ldots f_n \qquad \text{pour } s \in S \quad .$$

Si on applique ces constructions à $\mathcal{A}$ et à la sous-catégorie $\mathcal{A}'$, on vérifie que $\mathcal{A}'(S^{-1})$ est identique à la sous-catégorie de $\mathcal{A}(S^{-1})$ image réciproque de $\mathcal{B}'$, du fait que si un "composé formel" $f_1 \ldots f_n$ a pour composé dans $\mathcal{A}$ une flèche de $\mathcal{B}'$, l'image de chaque $f_i$ sera aussi une flèche de $\mathcal{B}'$.

Supposons maintenant que $\mathcal{A}$ soit une catégorie triangulée sur $\mathcal{B}$, et que les ensembles $S_x = S \cap Fl(\mathcal{A}_x)$ pour $x \in Ob(\mathcal{B})$ soient des systèmes multiplicatifs saturés (CD Ch.1 §2. 1).

Définition 2.3.3. Sous les hypothèses précédentes la catégorie $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ sera dite presque dérivable (resp. dérivable, resp. codérivable) relativement à S si, quel que soit le foncteur $F : \mathcal{B}' \longrightarrow \mathcal{B}$, le foncteur (2.3.1) est un isomorphisme (resp. et si $\mathcal{A}(S^{-1})$ est fibrée, resp. cofibrée sur $\mathcal{B}$).

On désignera par I la catégorie du diagramme suivant

(2.3.4) $$I : \overset{\circ}{\times} \xrightarrow{F} \overset{1}{\times} .$$

D'après 2.2.13, il revient au même de se donner une catégorie triangulée $\mathcal{A}$ sur I, fibrée (resp. cofibrée) sur $\mathcal{A}$, ou de se donner ses fibres $\mathcal{A}_o$ et $\mathcal{A}_1$ et le foncteur triangulé image réciproque $F^* : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_o$ (resp. et le foncteur triangulé image directe $F_* : \mathcal{A}_o \to \mathcal{A}_1$). Si $A_o \in Ob\, \mathcal{A}_o$ et $A_1 \in Ob\, \mathcal{A}_1$, on a (2.2.12.1)

$$Hom_F(A_o, A_1) = Hom(A_o, F^*A_1)$$

(resp. $Hom_F(A_o, A_1) = Hom(F_*A_o, A_1)$).

Proposition 2.3.5. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie triangulée sur I et S comme en (2.3.3).

(i) $\mathcal{A}$ est presque dérivable relativement à S, et $\mathcal{A}(S^{-1})$ est triangulée sur I.

(ii) Si $\mathcal{A}$ est fibrée (resp. cofibrée), le foncteur $F^*$ (resp. $F_*$) est dérivable à droite (resp. à gauche) relativement à $S_o$ et $S_1$ (1.2.1) si et seulement si $\mathcal{A}$ est dérivable (resp. codérivable) sur I.

En vertu de 2.3.2, les catégories fibres de $\mathcal{A}(S^{-1})$ sont les catégories $\mathcal{A}_o(S_o^{-1})$ et $\mathcal{A}_1(S_1^{-1})$, où $S_i = S \cap Fl(\mathcal{A}_i)$ $(i = 0,1)$. Avec les notations du § 1 n°2, les foncteurs $A_o \to A_o^-$ et $A_1 \to A_1^+$ identifient $\mathcal{A}_o(S_o^{-1})$ et $\mathcal{A}_1(S_1^{-1})$ à des catégories de pro et ind-objets de $\mathcal{A}_o$ et $\mathcal{A}_1$. Cela permet de définir une catégorie sur I, de fibres $\mathcal{A}_o(S_o^{-1})$ et $\mathcal{A}_1(S^{-1})$, en posant, pour $A_o \in \mathcal{A}_o$ et $A_1 \in \mathcal{A}_1$ :

$$\mathrm{Hom}_F(A_o,A_1) = \mathrm{Hom}_F(A_o^-,A_1^+) = \varinjlim_{A'_o \xrightarrow{s} A_p} \ \varinjlim_{A_1 \xrightarrow{t} A'_1} \mathrm{Hom}(A'_o,A'_1) \quad ,$$

où s et t parcourent les éléments de $S_o$ et $S_1$ de but (de source) $A_o(A_1)$. La catégorie $\mathcal{A}$ s'envoie dans cette catégorie, et on vérifie aussitôt qu'elle vérifie la propriété universelle de $\mathcal{A}_b(S^{-1})$, sur I et après tout changement de base.

Pour vérifier (i), il suffit de prouver que cette catégorie, soit $\mathcal{A}(S^{-1})$, est triangulée, et il suffit de vérifier la condition 2.2.3 (iii). Soient donc $(X_o,Y_o,Z_o)$ et $(X_1,Y_1,Z_1)$ des triangles distingués de $\mathcal{A}_{b_o}$ et $\mathcal{A}_{b_1}$, donnant lieu aux triangles distingués $(X_o^-,Y_o^-,Z_o^-)$ et $(X_1^+,Y_1^+,Z_1^+)$ de $\mathcal{A}_{b_o}(S_o^{-1})$ et $\mathcal{A}_{b_1}(S_1^{-1})$.

(2.3.5.1)
$$\begin{array}{ccc} X_o^- & \xrightarrow{u} & X_1^+ \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y_o^- & \xrightarrow{v} & Y_1^+ \end{array} \quad .$$

En vertu du lemme 1.2.2.1, les triangles $(X_o^-,Y_o^-,Z_o^-)$ et $(X_1^+,Y_1^+,Z_1^+)$ sont limites de triangles distingués ; il existe donc des morphismes de triangles distingués

$$(X_o^-,\ Y_o^-,\ Z_o^-) \longrightarrow (X'_o,\ Y'_o,\ Z'_o)$$

(2.3.5.2)

$$(X'_1,\ Y'_1,\ Z'_1) \longrightarrow (X_1^+,\ Y_1^+,\ Z_1^+) \quad ,$$

et un diagramme

$$\begin{array}{ccc} X'_o & \xrightarrow{u'} & X'_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y'_o & \xrightarrow{v'} & Y'_1 \end{array} ,$$

compatibles avec (2.3.5.1). La catégorie $\mathcal{A}$ étant triangulée sur I, ce diagramme peut se prolonger en un morphisme de triangles

$$(X'_o, Y'_o, Z'_o) \longrightarrow (X'_1, Y'_1, Z'_1) .$$

Composant ce dernier avec les morphismes (2.3.5.2), on voit que le diagramme (2.3.5.1) peut se prolonger en un morphisme de triangles, ce qui établit 2.2.3 (iii).

Vérifions (ii), supposant par exemple $\mathcal{A}_\bullet$ fibrée sur I. Si $A_1 \in \mathrm{Ob}\,(\mathcal{A}_1(S_1^{-1}))$, une image réciproque de $A_1$ dans $\mathcal{A}(S^{-1})$ est un objet B de $\mathcal{A}_o(S_o^{-1})$ tel que, dans $\mathcal{A}_o(S_o^{-1})$, on ait

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_o(S_o^{-1})}(A_o,B) = \mathrm{Hom}_F(A_o^-, A_1^+) = \mathrm{Hom}(A_o^-, F^*(A_1^+)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_o(S_o^{-1})}(A_o, F^*(A_1^+)).$$

Il existe un tel objet B si et seulement si le Ind-objet $F^*(A_1^+)$ de $\mathcal{A}_o(S^{-1})$ est essentiellement constant (i.e. représentable), et B représente alors cet ind-objet, qui n'est autre que $RF(A_1)$ (1.2.1), d'où l'assertion.

Corollaire 2.3.6. Avec les notations de 2.3.3 , si $\mathcal{A}_\bullet$ est presque dérivable sur $\mathcal{B}_\bullet$ , alors $\mathcal{A}_\bullet(S^{-1})$ est une catégorie triangulée sur $\mathcal{B}_\bullet$ .

Tout d'abord, la catégorie fibre $\mathcal{A}_\bullet(S^{-1})_x$ peut être identifiée à $\mathcal{A}_x(S_x^{-1})$ : on applique l'hypothèse au changement de base $\{x\} \longrightarrow \mathcal{B}_\bullet$ .

Cette catégorie est triangulée, munie d'un ensemble $\Delta_x$ de triangles, ce qui donne un sens à l'énoncé précédent. Pour vérifier la condition 2.2.3 (iii), il suffit de le faire après tout changement de base $I \longrightarrow \mathcal{B}$, et l'assertion résulte de 2.3.5 (i).

Il résulte aussitôt de la démonstration de 2.3.5 (ii) que :

Théorème 2.3.7. (formule triviale de dualité).

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie triangulée fibrée et cofibrée sur I, et désignons par $F_*$ et $F^*$ les foncteurs image directe et image réciproque. Soit $S = S_o \cup S_1$ un système multiplicatif comme en 2.3.3. On suppose que $LF_*$ est défini en $A_o \in Ob\ \mathcal{A}_o\ (S_o^{-1})$ et que $Rf^*$ est défini en $A_1 \in Ob\ \mathcal{A}_1(S_1^{-1})$. On a alors

$$Hom_{\mathcal{A}_o(S_o^{-1})}(A_o, RF^*A_1) = Hom_{\mathcal{A}_{(S^{-1})}}(A_o, A_1) = Hom_{\mathcal{A}_1(S_1^{-1})}(LF_* A_o, A_1) .$$

La position des symboles R, L, * et $_*$ dans 2.3.7 n'est aberrante qu'en apparence ; en effet, dans la catégorie fibrée et cofibrée 0.2 des faisceaux sur des sites variables, les catégories fibres sont les catégories opposées des catégories usuelles de faisceaux.

## 2.4. Catégories fibrées en catégories dérivées.

2.4.0. On désigne dans ce n° par $\mathcal{A}$ une catégorie triangulée cofibrée sur $\mathcal{B}$ et par S un système multiplicatif de morphismes de $\mathcal{A}$, tous au-dessus d'une identité, et tels que $S_x = S \cap Fl(\mathcal{A}_x)$ soit un système multiplicatif saturé de $\mathcal{A}_x$ [CD 1.2.1] pour tout $x \in Ob(\mathcal{B})$.

On recherche un critère pour que $\mathcal{A}$ soit codérivable relativement à S (2.3.3), ce qui implique que $\mathcal{A}(S^{-1})$ soit triangulée sur $\mathcal{B}$ lorsqu'on la munit de l'ensemble des triangles isomorphes à l'image d'un triangle distingué de $\mathcal{A}$ (2.3.5).

Proposition 2.4.1. Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et S comme ci-dessus. Pour que $\mathcal{A}$ soit codérivable relativement à S, il suffit que la condition suivante soit vérifiée :

(*) $\forall\, x \in Ob\mathcal{B}, \forall\, A \in Ob(\mathcal{A}_x), \exists\, s : A' \to A$ dans S $\forall g, f : x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} Z$, $f_*A'$ est déployé à gauche pour le foncteur $g_*$ .

Désignons par $\mathcal{A}^1$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}$ formée des objets dont toutes les images directes sont déployés relativement à tous les foncteurs image directes . Alors 1.2.2 montre que $\mathcal{A}^1$ est une sous-catégorie triangulée de $\mathcal{A}$ , évidemment cofibrée. On pose $S^1 = S \cap Fl(\mathcal{A}^1)$.

Lemme 2.4.1.1. Supposons que S soit stable par images directes. Alors, $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ est codérivable et $\mathcal{A}(S^{-1})$ peut se calculer par un calcul de fractions à droite.

Vérifions la condition c) de [1, I 2.2], si possible moins triviale que les autres. On se donne f et s ($s \in S$) et on doit trouver

(2.4.1.2)
$$\begin{array}{ccc} A' & \dashrightarrow & B' \\ {\scriptstyle s}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle t} \\ A & \longrightarrow & B \end{array} ,$$

un diagramme commutatif (2.4.1.2) avec t∈S . Soit F l'image de f dans $\mathcal{B}$ . Par hypothèse $F_*(s)$ est encore dans S, de sorte que, d'après VERDIER, il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} F_*(A') & \longrightarrow & B' \\ \uparrow{\scriptstyle s} & & \uparrow{\scriptstyle t} \\ F_*(A) & \xrightarrow[f]{} & B \end{array}$$

donc aussi un diagramme (2.4.1.2).

Du fait que $\mathcal{A}(S^{-1})$ se calcule par calcul de fractions à droite, il est trivial que sa formation commute au changement de base $c : \mathcal{B}' \longrightarrow \mathcal{B}$ .

Ce lemme s'applique en particulier à $\mathcal{A}^1$ et $S^1$ ; le lemme suivant implique donc 2.4.1 :

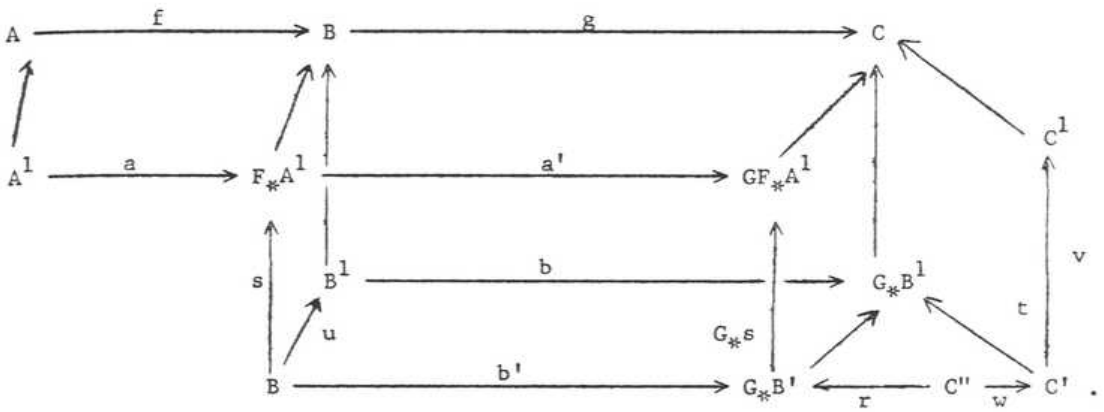
Lemme 2.4.1.3. Sur $\mathcal{B}$ et après tout changement de base $c : \mathcal{B}' \longrightarrow \mathcal{B}$, le foncteur canonique $\Phi : \mathcal{A}_1(S^{1-1}) \longrightarrow \mathcal{A}(S^{-1})$ est une équivalence de catégorie.

Construisons un foncteur quasi-inverse au foncteur $\Phi$ . Quel que soit $A \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{A}$ , choisissons $s_A \in S$ de but A et de source $A^1 \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{A}^1$ avec $s_A = \mathrm{Id}_A$ pour $A \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{A}^1$ . Soit f une flèche de $\mathcal{A}$, de but A, de source B et d'image F dans $\mathcal{B}$ . Puisque $s_B \in S$ et que $F_*A^1 \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}^1$, on peut trouver $B^1$, v et $s \in S^1$ rendant commutatif le diagramme suivant

(2.4.1.4)
$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow[s_B]{} & B_1 \\ \uparrow{\scriptstyle s_A} & & \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle u} \\ A_1 & \xrightarrow{a} & F_*A_1 & \xleftarrow{s} & B' \end{array} \quad .$$

La flèche $f^1 = us^{-1}a$ de $\mathcal{A}^1(S^{1-1})$ ne dépend alors que de f .

Soient f et g deux flèches composables, d'images F et G dans $\mathcal{B}$. Pour prouver que $(g\circ f)^1 = g^1\circ f^1$, contemplons le diagramme suivant, où figurent des diagrammes (2.4.1.4) pour f et g :




Puisque $t \in S$, il existe C'', $r \in S^1$ et w qui le rende commutatif. Par définition, $g^1\circ f^1 = vt^{-1}\, b\, u\, s^{-1}a$ et $(g\circ f)^1 = vw\,(G_*(s)r)^{-1}a'a$, et on conclut par la commutativité du diagramme.

On a donc défini un foncteur de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}^1(S^{1-1})$ ; il se factorise en $\psi : \mathcal{A}(S^{-1}) \longrightarrow \mathcal{A}^1(S^{1-1})$, la propriété universelle de $\mathcal{A}(S^{-1})$. Le composé $\tilde{\varphi}\,\psi$ est isomorphe à l'identité car son composé avec le foncteur $J : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}(S^{-1})$ est isomorphe à J. On vérifie de même que $\psi\,\tilde{\varphi}$ est isomorphe à l'identité.

Corollaire 2.4.2. Avec les notations de 2.4.1, $\mathcal{A}$ est codérivable relativement à S dès que, pour tout ensemble fini B de flèches de $\mathcal{B}$, la condition (*) est vérifiée lorsqu'on se limite à ne considérer que les images directes par les flèches de B.

Quelle que soit la catégorie $\mathfrak{B}'$ d'ensemble de flèches fini, la prop. 2.4.1 sera applicable après tout changement de catégorie de base $\mathfrak{B}' \longrightarrow \mathfrak{B}$. On prendra pour $\mathfrak{B}'$ les catégories des diagrammes suivants :

$*$ $\quad * \longrightarrow *$ $\quad * \longrightarrow * \longrightarrow *$ $\quad * \longrightarrow * \longrightarrow * \longrightarrow *$

(0) (1) (2) (3) .

Considérons les catégories $\mathcal{A}_x(S_x^{-1})$ ($x \in Ob\,\mathfrak{B}$). Etant donné $f \in F\ell(\mathfrak{B})$ et $A_1$, $A_2$ dans ces catégories au-dessus de la source et du but de f, on définit $Hom_f(A_1, A_2)$ comme étant l'ensemble analogue défini après le changement de catégorie base de type (1) défini par f. On définit la composition des morphismes à l'aide de changements de catégorie base de type (3). On construit ainsi une catégorie $\mathcal{A}(S^{-1})^*$ sur $\mathfrak{B}$, dont la formation est compatible à tout changement de base ; on vérifie qu'elle est solution du problème universel qui définit $\mathcal{A}(S^{-1})$ en utilisant les changements de base de type (0), (1) et (2).

Le résultat suivant est le dual de 2.4.2.

Proposition 2.4.3. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie triangulée fibrée sur $\mathfrak{B}$ et S comme en 2.4.1. Pour que $\mathcal{A}$ soit dérivable relativement à S, il suffit que pour tout ensemble fini B de flèches de $\mathfrak{B}$, on ait

(*') $\forall\, x \in Ob(\mathfrak{B})$, $\forall\, A \in Ob(\mathcal{A}_x)$, $\exists\, s : A \longrightarrow A'$ dans S, $\forall g, f : Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X$ dans B, $f^*A'$ est déployé à droite pour le foncteur $g^*$.

## 3. Recollement de catégories fibrées ou cofibrées.

### 3.1. Introduction.

Soit $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme séparé de type fini d'un schéma Y dans un schéma X, ou une application continue d'un espace localement compact dans un espace localement compact. On sait alors définir un foncteur "image directe à support propre", noté $f_!$ , de la catégorie des faisceaux abéliens sur Y dans la catégorie des faisceaux abéliens sur X (cf. 5.3 dans le cas des schémas, et VERDIER [3] pour le cas des espaces localement compacts séparés). Lorsque Y et X sont des schémas de type fini sur $\mathbb{C}$, ces deux définitions sont compatibles en un sens évident. Malheureusement dans le cas des schémas, contrairement à ce qui se passe dans le cas des espaces localement compacts, les foncteurs dérivés du foncteur $f_!$ sont pathologique ; on peut toutefois définir un foncteur "image directe à support propre" raisonnable, directement de la catégorie $D^+(Y)$ dans $D^+(X)$. Pour le définir, on factorise le morphisme f en une immersion ouverte et un morphisme propre : $f = \bar{f}\, j$ . Le foncteur $Rf_!$ cherché se définit alors comme composé du "prolongement par 0" $j_!$ et du foncteur $R\bar{f}_*$ , dérivé du foncteur image directe par $\bar{f}$ .

Ces foncteurs $Rf_!$ , "image directe à support propre" ne sont utilisables que si on vérifie pour eux un "formalisme de variance" incluant, pour un composé f=gh, une formule

$$Rf_! = Rg_!\, Rh_!$$

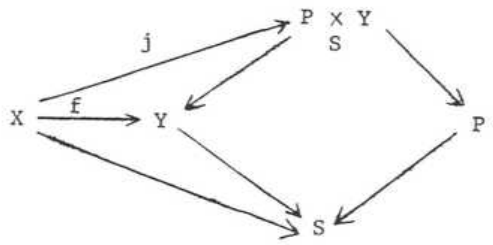
qui s'exprime le mieux en terme de catégories cofibrées. On dispose d'un tel formalisme séparément pour les "prolongements par zéro" et pour les

images directes par un morphisme propre, et le problème est de recoller ces formalismes. Pour éviter d'être embouteillés plus tard par des calculs idiots, on se propose dans ce § de dresser la liste des vérifications élémentaires requises pour mener à bien un tel recollement. On le fera dans un cadre légèrement plus abstrait qu'il n'est indispensable, espérant que le résultat pourra resservir.

La construction esquissée plus haut du foncteur $Rf_!$ exige que le morphisme f puisse se factoriser en une immersion ouverte et un morphisme propre. Sur le modèle de HARTSHORNE [RD III 8 p.189], on introduit au n° 2 la notion adéquate de morphisme compactifiable.

3.2. Morphismes compactifiables.

Définition 3.2.1. Un morphisme f d'un S-schéma X dans un S-schéma Y quasi-compact, quasi-séparé, est dit S-compactifiable s'il existe un S-schéma P propre sur S et une factorisation de f en un morphisme quasi-fini séparé j de X dans $P \times_S Y$ suivi de la projection de $P \times_S Y$ dans Y



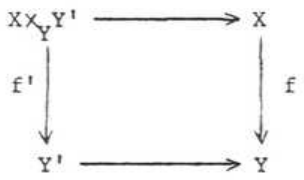

Lorsque S = Y, on parlera simplement de morphisme compactifiable.

Proposition 3.2.2. (i) Un morphisme S-compactifiable est séparé de type fini.

(ii) Si Y est quasi-compact, quasi-séparé, un morphisme quasi-fini séparé de but Y est compactifiable.

(iii) Le composé de deux morphismes S-compactifiables est encore S-compactifiable.

(iv) Soit un diagramme de S-schémas quasi-compacts quasi-séparés

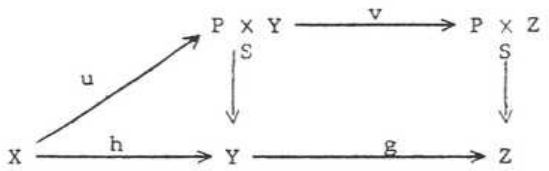



Si f est S-compactifiable, alors f' est S-compactifiable.

(v) Soit g un morphisme S-compactifiable ; pour qu'un morphisme composé g∘f soit S-compactifiable, il faut que h le soit.

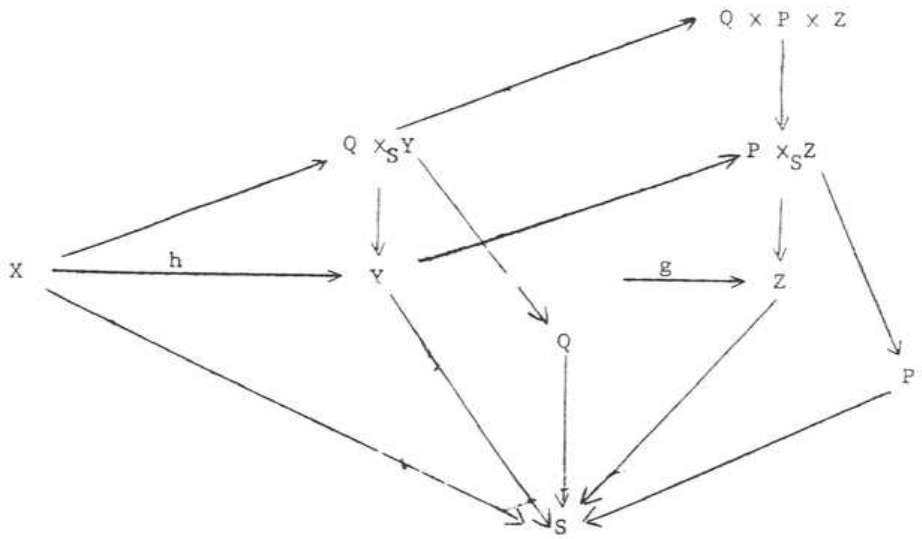
Les assertions (i) (ii) et (iv) sont triviales. Pour prouver (iii) et (v), considérons un composé f = gh, g étant compactifiable.

Supposons gh compactifiable, d'où un diagramme




Le composé vu est quasi-fini ; u est donc quasi-fini et (v) est prouvé.

Si h est compactifiable, on dispose d'un diagramme




et f = fh se factorise par un morphisme quasi-fini séparé dans $(Q \times_S P) \times_S Z$.

Nagata affirme dans [5] que tout morphisme de type fini entre schémas noethériens intègres séparés est compactifiable. Le rédacteur avoue ne pas avoir compris la démonstration.

Fixons maintenant un schéma S et désignons par (S) la sous-catégorie de la catégorie des S-schémas dont les objets sont les S-schémas quasi-compacts, quasi-séparés et dont les flèches sont les S-morphismes S-compactifiables.

Proposition 3.2.3. Dans la catégorie (S):

(i) Les immersions ouvertes (resp. les morphismes propres) définissent une sous-catégorie (S,i) (resp.(S,p)) de (S) ayant mêmes objets que (S).

(ii) Les produits fibrés existent dans (S,p) et sont des produits fibrés dans (S).

(iii) Tout morphisme f est le composé f = pj d'un morphisme propre p et d'une immersion ouverte.

En vertu de 3.2.2 (iii) (iv) et (v), les produits fibrés existent dans (S) et sont des produits fibrés dans la catégorie de tous les schémas. Puisque le produit fibré $X = X_1 \times_Y X_2$ de deux schémas propres sur Y est encore propre sur Y, et qu'un schéma est propre sur X si et seulement si il est propre sur $X_1$ et $X_2$, la condition (ii) est vérifiée.

Si f est un morphisme de (S), il admet par hypothèse, dans (S), une factorisation $f = pj'$, où p est propre et j quasi-fini séparé. En vertu de EGA IV 18.12.13, j' admet une factorisation $j' = qj$, où q est fini et j une immersion ouverte ; de plus, en vertu de 3.2.2 (ii), q et j sont dans (S). On a alors $f = (pq)j$, ce qui prouve (iii). L'assertion (i) résulte de 3.2.2 (iii).

3.2.4. Dans la suite de ce §, on suppose donnée une catégorie (S), munie de deux sous-catégories (S,i) et (S,p), telles que

(i) $Ob(S) = Ob(S,i) = Ob(S,p)$;

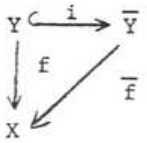
(ii) les produits fibrés existent dans (S,p) et sont des produits fibrés dans (S) ;

(iii) $\forall\ f \in Fl(S), \exists\ p \in Fl(S,p), \exists\ j \in Fl(S,i),\ f = pj$.

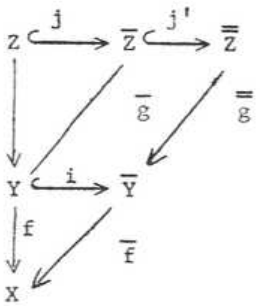
Les flèches de (S,i) (resp. de (S,p)) s'appelleront les immersions ouvertes (resp. les morphismes propres).

Définition 3.2.5. (i) Une compactification d'un morphisme f de (S) (resp. d'un couple (f,g), resp. d'un triple (f,g,h) de morphismes composables) est un diagramme commutatif (3.2.5.1) (resp. (3.2.5.2), resp. (3.2.5.3)) dont les flèches horizontales sont des immersions ouvertes et dont les flèches obliques sont propres.

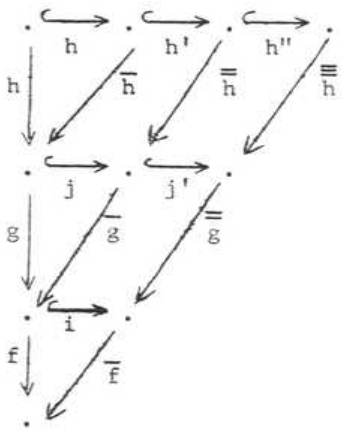
(ii) Un morphisme de compactifications est un morphisme de diagrammes (3.2.5.1) (resp. ...) qui soit l'identité sur la 1ère ligne verticale et propre en tous les sommets



(3.2.5.1)



(3.2.5.2)



(3.2.5.3)

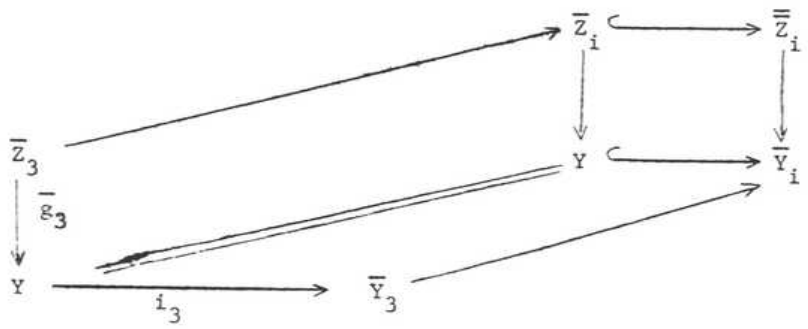
Proposition 3.2.6. (i) Tout morphisme (resp. tout couple (f,g), resp. tout triple (f,g,h), de morphismes composables) admet une compactification.
(ii) La catégorie des compactifications de f est filtrante à gauche.
(iii) Si des diagrammes $(3.2.4.2)_i$ (i=1,2) sont des compactifications de (f,g), il existe une compactification $(3.2.4.2)_3$ de (f,g) et des morphismes de compactifications de $(3.2.4.2)_3$ dans les compactifications $(3.2.4.2)_i$ .

(i) Le cas d'un morphisme n'est autre que 3.2.4 (iii). Traitons le cas d'un triple ; avec les notations de (3.2.5.3), il suffit de construire successivement des compactifications de f, g et h, de $i\bar{g}$ et $j\bar{h}$, et enfin de $j'\bar{\bar{h}}$ .

(ii) Soient $(3.2.5.1)_1$ et $(3.2.5.1)_2$ deux compactifications de f . La projection $\rho$ de $\overline{Y}_1 \underset{S}{\times} \overline{Y}_2$ dans X est propre et Y s'y envoie par $(i_1,i_2)$, qui ( 3.2.4 (iii)) peut se compactifier en $(i_1,i_2) = qj$ . La compactification $f = (p.q)\, j$ domine $(3.2.4.1)_1$ et $(3.2.4.1)_2$.

Si r et s sont deux morphismes de $(3.2.4.1)_1$ dans $(3.2.4.1)_2$, le noyau K de la double flèche $\overline{Y}_1 \underset{s}{\overset{r}{\rightrightarrows}} \overline{Y}_2$ s'envoie par un morphisme propre dans $\overline{Y}_1$ et $i_1$ se factorise par K : soit $i_1 = k\, i$ . Si $i = pi_3$ est une compactification de i, l'existence de la compactification $f = (\overline{f}_1\ k\ p)i_3$ montre que l'axiome $L_2$ est satisfait.

(iii) Appliquons l'axiome $L_1$ des catégories filtrantes aux compactifications de f et g déduites des $(3.2.4.2)_i$ (i = 1,2). On trouve ainsi $\overline{Y}_3$ et $\overline{Z}_3$ donnant lieu à des diagrammes commutatifs $(3.2.5.1)_i$ (i=1,2)




$(3.2.5.1)_i$ ,

et il reste à trouver une compactification de $i_3\, \overline{g}_3$ par $\overline{\overline{Z}}_3$ , telle que $\overline{\overline{Z}}_3$ puisse s'envoyer par un morphisme propre dans $\overline{\overline{Z}}_i$, de façon à donner lieu à un cube commutatif (i =1,2). Si le but d'un morphisme entre compactifications de $i_3\overline{g}_3$ a cette propriété, la source l'a encore et en vertu de (ii), il suffira de s'occuper séparément des cas i = 1 et i = 2.

Soit T le produit fibré de $\overline{Y}_3$ et $\overline{\overline{Z}}_i$ sur $\overline{Y}_i$ : alors T figure dans un cube commutatif analogue à celui qu'on cherche, sauf que la flèche k de $\overline{Z}_3$ dans T pourrait ne pas être une immersion ouverte. Posant k = pj (p propre, j immersion ouverte) et remplaçant T par la source $\overline{\overline{Z}}_3$ de p, on trouve le cube cherché.

Remarque 3.2.7. La proposition 3.2.3 aurait encore été valable si, dans la définition 3.2.1 des morphismes compactifiables, on avait omis d'exiger que Y soit quasi-compact quasi-séparé et demandé en compensation que j soit une immersion ouverte quasi-compacte et non seulement un morphisme quasi-fini.

## 3.3. Recollement.

Rappelons que les hypothèses 3.2.4 sont satisfaites.

3.3.1. Supposons donnés :

α) pour chaque $X \in Ob(S)$, une catégorie $F(X)$,

β) une $(S,i)$-catégorie cofibrée $F_i$ et une $(S,p)$ catégorie cofibrée $F_p$,

γ) pour chaque $X \in Ob(S)$, des isomorphismes entre $F(X)$, $(F_i)_X$ et $(F_p)_X$ ,

δ) un scindage normalisé de $F_i$ et un scindage normalisé de $F_p$ .

En vertu de (SGA 1VI), il "revient au même" de se donner plutôt α) et :

(i) pour tout morphisme propre $p : X \longrightarrow Y$, un foncteur $p_* : F(X) \longrightarrow F(Y)$,

(ii) pour tout couple composable $(p,q)$ de morphismes propres,

un isomorphisme de foncteur $c_{p,q} : p_*q_* \longleftrightarrow (pq)_*$ ,

(i) et (ii)', données analogues pour (S,i),

ces données vérifiant les conditions suivantes :

(a) si p est une identité, alors $p_*$ , $c_{p,q}$ et $c_{q,p}$ sont des identités,

(b) pour tout triple composable de morphismes propres, on a

$$c_{p,qr} \cdot (p_* * c_{q,r}) = c_{pq,r} \circ (c_{p,q} * r_*) \quad ,$$

(a)' et (b)', conditions analogues pour (S,p).

Supposons donné de plus,

(iii) pour tout diagramme commutatif D

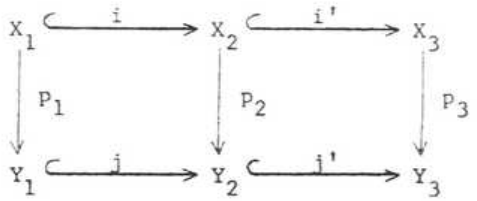
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j'} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle p'} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ Z & \xrightarrow[j]{} & T \end{array}$$

$j,j' \in F\ell(S,i)$ ; $p,p' \in F\ell(S,p)$,

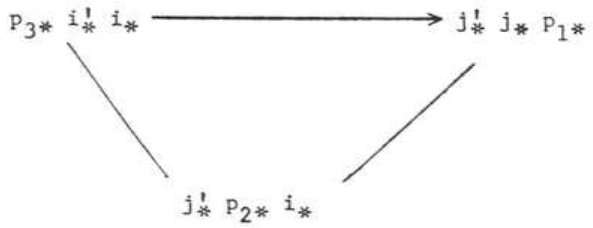
un isomorphisme de foncteur $d(D) : p_*j'_* \longleftrightarrow j_*p'_*$ .

Proposition 3.3.2. Si des données (i) (ii) (i') (ii') (iii) vérifient les conditions (a) (b) (a') (b') ainsi que (c) et (c') énoncées ci-dessous, alors, il existe une et "essentiellement" une seule catégorie F cofibrée sur S, munie d'isomorphismes $F \times_S(S,i) = F_i$ et $F \times_S(S,p) = F_p$ , compatibles à la donnée 3.3.1 γ) et tels que les isomorphismes d(D) de (iii) soient les isomorphismes composés $j_*p'_* = (jp')_* = (pj')_* = p_*j'_*$ .

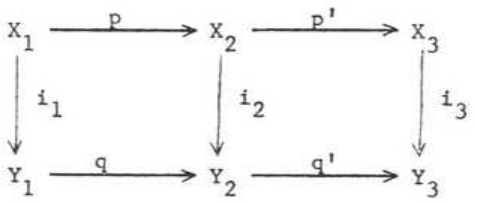
(c) Pour tout diagramme commutatif du type suivant



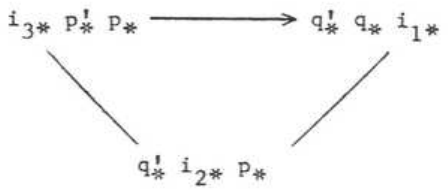
dont les flèches horizontales sont des immersions ouvertes et dont les flèches verticales sont propres, le triangle suivant d'isomorphismes d de (iii) est commutatif :



(c') Pour tout diagramme commutatif du type suivant



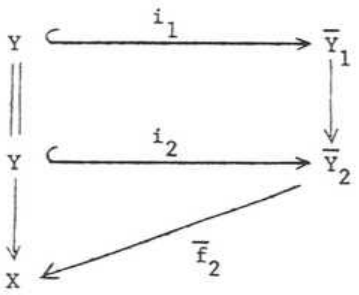
dont les flèches horizontales sont propres et dont les flèches verticales sont des immersions ouvertes, le triangle suivant d'isomorphismes d de (iii) est commutatif :



3.3.2.1. Définition de $f_*$.

Soit f un morphisme de Y dans X. Chaque compactification de f, de diagramme (3.2.5(i)), définit un foncteur composé $\overline{f}_* \, i_*$ de F(Y) dans F(X). Un morphisme de compactifications définit un diagramme commutatif

(3.3.2.2)




La donnée (iii) nous fournit donc un isomorphisme

$$\overline{f}_{2*} \, i_{2*} = \overline{f}_{2\,*} \circ (i_{2*} \circ 1_{Y*}) = \overline{f}_{2*} \circ (p_* \circ i_{1*}) = \overline{f}_{1*} \circ i_{1*} \quad .$$

L'axiome (c') garantit de plus que l'isomorphisme associé à un composé de morphismes de compactification est le composé des isomorphismes associés à chacun d'eux. La catégorie des morphismes de compactification étant filtrante (3.2.6 (ii)), on obtient ainsi un système transitif d'isomorphismes entre les foncteurs associés aux diverses compactification de f. Choisissant l'une d'elles, on définit le foncteur $f_*$ .

3.3.2.3. Homomorphismes de transitivité.

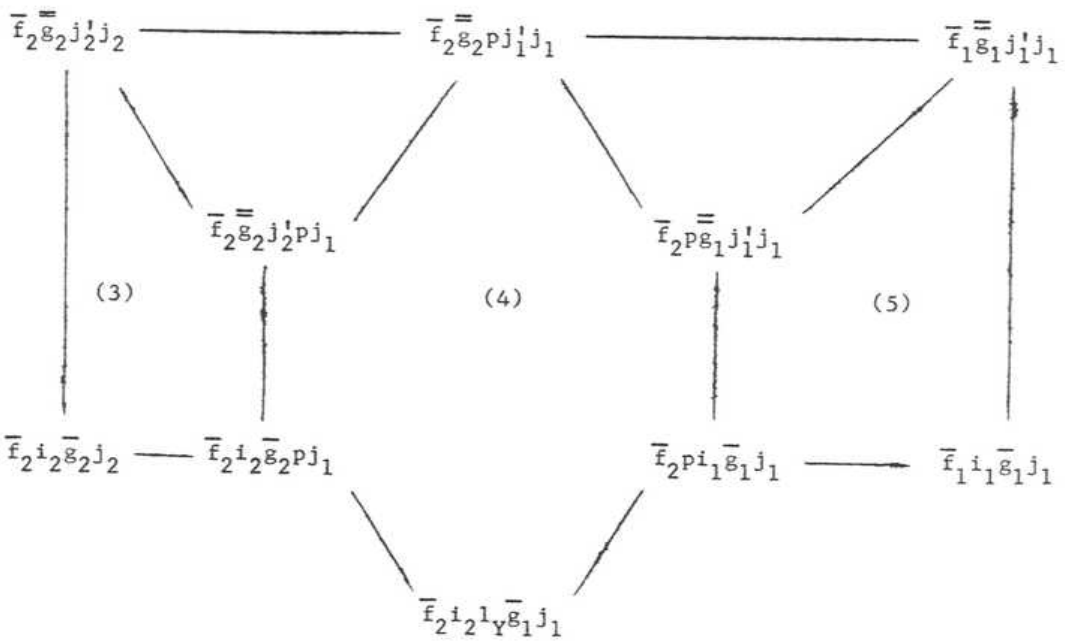
Toute compactification d'un couple (f,g) de morphismes composables (diagramme (3.2.5.2)) définit une compactification de f, une de g, une de $f \circ g = (\overline{f}\,\overline{\overline{g}})(j'j)$, et un isomorphisme $c_{f,g} : (fg)_* \xrightarrow{\sim} f_* \, g_*$ , composé des isomorphismes

$$(fg)_* = (\overline{f}\,\overline{\overline{g}})_*\,(j'j)_* = \overline{f}_*\,(\overline{\overline{g}}_*\,j'_*)j_* = \overline{f}_*\,(i_*\,\overline{g}_*)\,j_* = (\overline{f}_*i_*)(\overline{g}_*j_*) = f_*g_*$$

(où l'isomorphisme médian provient de (iii)).

Prouvons que cet isomorphisme ne dépend pas de la compactification choisie de (f,g). En vertu de 3.2.6 (iii) , il suffira de comparer les isomorphismes $c_{f,g}$ obtenus à partir de deux compactifications $(3.2.4.2)_i$ (i=1,2) telles qu'existe un morphisme de compactification de la première dans la seconde. Les flèches de ces morphismes seront désignées par p.

Considérons le diagramme suivant d'isomorphismes de foncteurs. Pour faciliter sa lecture, on a omis d'écrire les * .

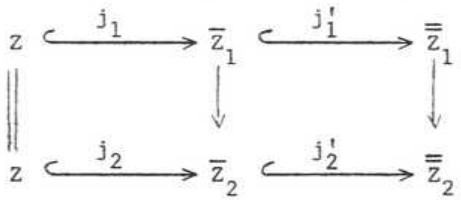


a) L'isomorphisme composé de la 1ère ligne est l'isomorphisme 3.3.2.1 entre deux définitions de $(fg)_*$ .

b) L'isomorphisme composé de la dernière ligne est l'isomorphismes 3.3.2.1 entre deux définitions de $f_* g_*$ .

c) Les isomorphismes verticaux extrêmes sont les isomorphismes $c_{f,g}$ entre $(fg)_*$ et $f_* g_*$ déduits de l'une ou l'autre compactification.

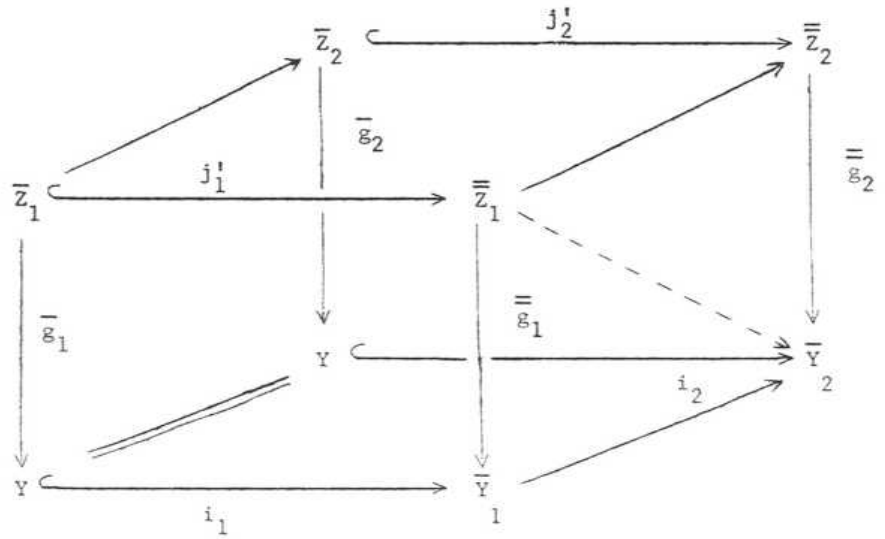
Le problème est donc de prouver que le bord extérieur du diagramme est commutatif. Un diagramme commutatif de foncteurs reste commutatif quand on compose chacun d'eux avec un même foncteur. Ceci rappellé, la commutativité de (i) résulte de (c) appliqué au diagramme




.

La commutativité de (3) et (5) est triviale, celle de (2), qui concerne essentiellement des morphismes propres, l'est aussi. Reste à considérer l'hexagone (4).

Considérons le cube commutatif suivant

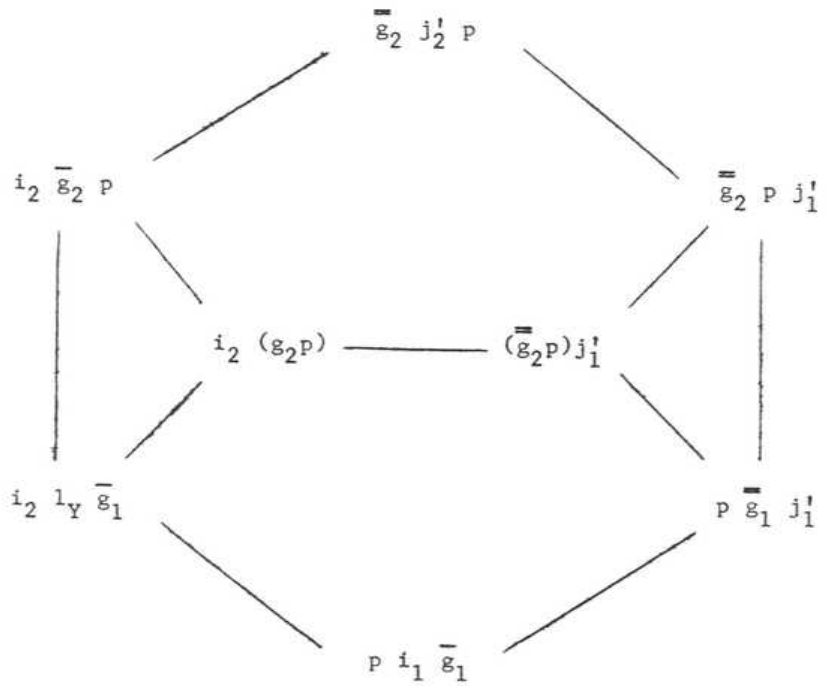



.

Il y a six façons de parcourir les arêtes de ce cube $\overline{Z}_1$ à $\overline{Y}_2$, chacune "adjacente" à deux autres ; on dispose d'un isomorphisme entre les foncteurs composés associés à deux chemins adjacents (i.e. séparés par une seule face) et la commutativité de (4) résultera de la commutativité de l'hexagone ainsi obtenu.

La morale de ce genre de diagramme est qu'une arête représente un foncteur, une face un isomorphisme entre foncteurs composés et un volume une condition de compatibilité (entre les faces qui en sont le bord). On décomposera le cube en deux prismes à base triangulaire (par le "plan" $\overline{Z}_1$ $\overline{\overline{Z}}_1$ Y $\overline{Y}_2$) pour se ramener aux hypothèses (c').

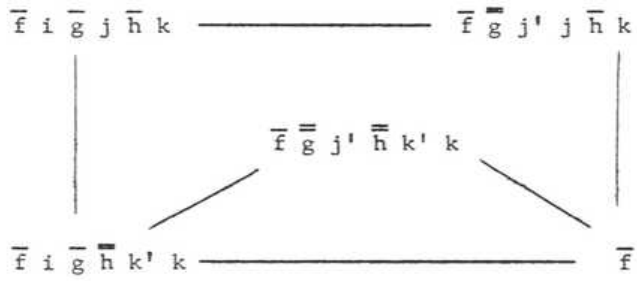
De façon précise, on complète l'hexagone en le diagramme d'isomorphismes suivant (pour faciliter sa lecture, les * ont été omis) :



Les triangles sont trivialement commutatifs et les pentagones le sont en vertu de (c').

3.3.2.4. Condition de cocycles.

Vérifions que les isomorphismes $c_{f,g}$ construits en 3.3.2.3 vérifient une condition de cocycle pour un triple (f, g, h) de morphismes composables. Introduisons une compactification de (f, g, h), de diagramme (3.2.4.3) et considérons le diagramme d'isomorphismes de foncteurs suivant :




La commutativité du carré est triviale, celle des triangles résulte de (c) et (c' ). La commutativité du bord extérieur étant ce qu'il fallait démontrer, ceci achève la démonstration de 3.3.2 .

3.3.3. Supposons données sur (S,i) et (S,p) respectivement des catégories fibrées munies d'un scindage normalisé $F_i$ et $F_p$ , et supposons que $F_i$ et $F_p$ ont même fibre F(X) en tout $X \in Ob\ S$ .

D'après SGA 1 VI , il "revient au même" de se donner plutôt :

(i bis) pour tout morphisme propre $p : X \longrightarrow Y$, un foncteur $p^* : F(Y) \longrightarrow F(X)$,

(ii bis) pour tout couple composable (p,q) de morphismes propres, un isomorphisme de foncteur $c_{p,q} : q^*p^* \longleftrightarrow (pq)^*$ ,

(i' bis) et (ii' bis) données analogues pour (S,i),

ces données vérifiant les conditions (a bis) (b bis)(a' bis) (b' bis) duales de 3.3.1 (a)(b)(a')(b').

Supposons donné de plus,

(iii bis) pour tout diagramme commutatif D

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j'} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle p'} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ Z & \xrightarrow{j} & T \end{array} \qquad j,j' \in F\mathcal{L}(S,i)\ ;\ p\ p' \in F\mathcal{L}(S,p)$$

un isomorphisme de foncteurs d(D) : $j'^*p^* \longleftrightarrow p'^*j^*$ .

On laisse au lecteur d'énoncer les conditions (c bis) et (c' bis) duales de 3.3.2 (c) et (c').

Des raisonnements parallèles à ceux qui précèdent prouvent alors la proposition suivante.

Proposition 3.3.4. Si des données (i bis)(ii bis)(i' bis)(ii' bis)(iii bis) vérifient les conditions (a bis)(b bis)(a' bis)(b' bis)(c bis)(c' bis), il existe une et essentiellement une catégorie F cofibrée sur S et munie d'isomorphismes $F \times_S (S,i) = F_i$ , $F \times_S (S,p) = F_p$ , ces isomorphismes étant compatibles avec les identifications $F_{iX} = F_{pX}$ ($X \in Ob\ S$) et tels que les isomorphismes d(D) de (iii bis) deviennent les isomorphismes composés $p'^*j^* = (jp')^* = (pj')^* = j'^*p^*$ .

On notera cependant que 3.3.4 n'est pas dual de 3.3.2 , car les hypothèses faites sur (S,i) et (S,p) ne sont pas autoduales.

4. Résolutions. Application à la flèche de changement de base.

4.1. Résolutions plates.

Rappelons que si $f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (Y, \mathcal{B})$ est un morphisme de sites (ou de topos) annelés, l'image réciproque par f d'un faisceau de $\mathcal{B}$-modules à gauche $\mathcal{M}$ est le faisceau de $\mathcal{A}$-modules à gauche $\mathcal{A} \otimes_{f^*\mathcal{B}} f^*\mathcal{M}$.

Proposition 4.1.1. Soient $f: (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (Y, \mathcal{B})$ un morphisme de sites annelés, K un faisceau de $\mathcal{A}$-modules à droite, et $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ une suite exacte de faisceaux de $\mathcal{B}$-modules à gauche. Si M et N sont plats, alors

(i) L est plat,

(ii) la suite suivante est exacte :

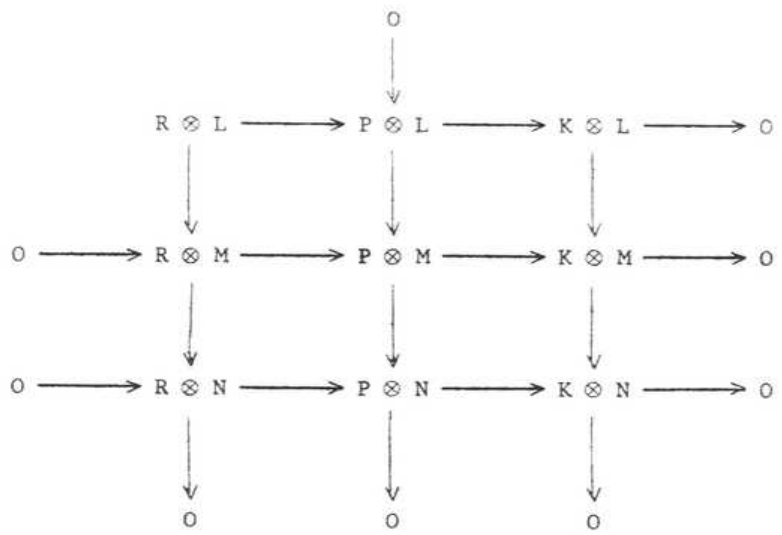
$$0 \longrightarrow K \otimes_{\mathcal{A}} f^*L \longrightarrow K \otimes_{\mathcal{A}} f^*M \longrightarrow K \otimes_{\mathcal{A}} f^*N \longrightarrow 0 \quad .$$

Factorisons f en les flèches $(X, \mathcal{A}) \xrightarrow{u} (X, f^*\mathcal{B}) \xrightarrow{v} (Y, \mathcal{B})$. Le foncteur $v^*$ est exact, et transforme Modules plats en Modules plats (IV 15) de sorte qu'il suffit de prouver 4.1.1 pour u . L'isomorphisme

$$(4.1.1.1) \qquad K \otimes_{\mathcal{A}} (\mathcal{A} \otimes_{f^*\mathcal{B}} P) = K \otimes_{f^*\mathcal{B}} P$$

nous ramène alors au cas où f est l'identité.

Soit une suite exacte $0 \longrightarrow R \longrightarrow P \longrightarrow K \longrightarrow 0$ avec P plat (4.1.2). Les lignes et colonnes du diagramme suivant sont exactes:



Appliquons le diagramme du serpent au deux premières colonnes : on trouve

$$0 \xrightarrow{i} K \otimes L \longrightarrow K \otimes M \quad ,$$

ce qui prouve (ii). Sans plus supposer P plat, on sait que dans le diagramme précédent les trois colonnes et deux lignes sont des suites exactes courtes ; la première ligne est donc exacte, i.e. L est plat.

4.1.2. Soit $\mathcal{S}$ une sous-catégorie de la catégorie des sites annelés. Les faisceaux de modules sur les sites annelés de $\mathcal{S}$ forment une catégorie $\mathcal{M}$, abélienne sur $\mathcal{S}$ (2.2.2), fibrée et cofibrée, dont les fibres sont les opposées des catégories usuelles de faisceaux de modules sur un site. On désignera par $K(\mathcal{S})$ la catégorie $K(\mathcal{M})$ (2.2.8) et par $K^+(\mathcal{S})$ (resp. $K^-(\mathcal{S})$) la sous-catégorie pleine de $K(\mathcal{S})$, dont les catégories fibres sont les opposées des catégories $K^+(S)$ (resp. $K^-(S)$) pour $S \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{S}$. Les catégories $K(\mathcal{S})$, $K^+(\mathcal{S})$ et $K^-(\mathcal{S})$ sont triangulées sur $\mathcal{S}$, fibrées et cofibrées.

Soit $f : S \longrightarrow S'$ une flèche de $\mathcal{S}$. Tout injectif est acyclique (1.2.3) pour le foncteur $Rf_*$, et tout faisceau de modules plats est acyclique pour le foncteur $Lf^*$ (4.1.1 et 1.2.6), d'où des foncteurs dérivés (1.2.7)

(4.1.2.1) $\qquad Rf_* : D^+(S) \longrightarrow D^+(S')$

(4.1.2.2) $\qquad Lf^* : D^-(S) \longrightarrow D^-(S')$ .

Si $Rf_*$ (resp. $Lf^*$) est de dimension finie, on peut dans 4.1.2.1 (resp. 4.1.2.2)) remplacer l'exposant + (resp. -) par b, par - (resp. +) ou le supprimer (1.2.10).

On désigne par $D(\mathcal{S})$ (resp. $D^+(\mathcal{S})$, resp. $D^-(\mathcal{S})$) la catégorie déduite de $K(\mathcal{S})$ (resp. $K^+(\mathcal{S})$, resp. $K^-(\mathcal{S})$) en inversant les quasi-isomorphismes.

Scholie 4.1.3. ("Théorème trivial de dualité").

(a) On suppose que tous les foncteurs $Rf_*$ (resp. $Lf^*$) sont de dimension finie. Alors :

(i) La formation de $D(\mathcal{S})$ commute à tout changement de catégorie base $\mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}$. La catégorie $D(\mathcal{S})$ est triangulée sur $\mathcal{S}$ (2.2.3), et ses fibres s'identifient aux opposées des catégories $D(S)$ pour $S \in Ob\,\mathcal{S}$.

(ii) La catégorie $D(\mathcal{S})$ est cofibrée (resp. fibrée) sur $\mathcal{S}$. Soit $f : S \longrightarrow S'$ ; si $Lf^*$ (resp. $Rf_*$) est de dimension finie, alors tout objet de $D(S')$ (resp. $D(S)$) a une image réciproque (resp. directe) par $f$ au sens de la catégorie $D(\mathcal{S})$ sur $\mathcal{S}$. Les foncteurs image réciproque et image directe s'identifient à $Lf^*$ et $Rf_*$ .

(iii) Tout objet de $D^-(S')$ (resp. $D^+(S)$) a une image réciproque (resp. directe) au sens de $D(\mathcal{A})$ et le foncteur image réciproque (resp. directe) s'identifie à $Lf^*$ (resp. $Rf_*$).

(b) (i) La formation de $D^-(\mathcal{A})$ (resp. $D^+(\mathcal{A})$) commute à tout changement de catégorie base $\mathcal{A}' \longrightarrow \mathcal{A}$. La catégorie $D^-(\mathcal{A})$ (resp. $D^+(\mathcal{A})$ est triangulée sur $\mathcal{A}$, et ses fibres s'identifient aux opposées des catégories $D^-(S)$ (resp. $D^+(S)$).

(ii) La catégorie $D^-(\mathcal{A})$ (resp. $D^+(\mathcal{A})$) est fibrée (resp. cofibrée) sur $\mathcal{A}$ ; les foncteurs "image réciproque" (resp. "image directe") s'identifient aux foncteurs dérivés $Lf^*$ (resp. $Rf_*$).

(iii) Si $f : S \longrightarrow S'$ est tel que $Rf_*$ (resp. $Lf^*$) soit de dimension finie, tout objet de $D^-(S)$ (resp. $D^+(S')$) a une image directe au sens de $D^-(\mathcal{A})$ (resp. une image réciproque au sens de $D^+(\mathcal{A})$), et le foncteur "image directe" (resp. "image réciproque") s'identifie à $Rf_*$ (resp. $Lf^*$).

Il suffira de vérifier que dans chaque cas les hypohtèses de 2.4.1 ou 2.4.3 sont remplies, les autres assertions se déduisant après un changement de base $\{S\} \longrightarrow \mathcal{A}$, ou $I \longrightarrow \mathcal{A}$, de 2.3.5 et 1.2.10. Dans le cas (b), les complexes de faisceaux plats (resp. flasques) satisfont aux hypothèses de 2.4.1. Dans le cas (a), on utilisera 2.4.3 de façon à n'avoir à considérer que des f tels que la dimension de $Rf_*$ (resp. $Lf^*$) soit majorée par N fixe. Prouvons qu'il existe "assez" de complexes K dont les composantes ont leurs images directes (resp. réciproques) toutes acycliques pour les foncteurs image directe (réciproque) considérés. Soit K un

complexe et K* (resp. $K_*$) une résolution de Cartan-Eilenberg de K par des complexes à composantes flasques (resp. plates). Si $n > N$, on voit que $f_*\tau''_{<n}(K^*) = \tau''_{<} f_*(K^*)$ (resp. $f^*\tau''_{>-n}(K_*) = \tau''_{>-n} f^*(K_*)$) où $\tau^*$ désigne un tronqué relativement à la seconde différentielle. Pour $n > 2N$, on en déduit que $\tau''_{<n}(K^*)$ (resp. $\tau''_{>-n}(K_*)$) vérifie l'hypothèse de 2.4.3, et tout complexe K est la source (resp. le but) d'un quasi-isomorphisme de but (resp. de source) un tel complexe.

4.1.4. Considérons un carré commutatif de sites annelés (4.1.4.1) (cf. 0.11)

(4.1.4.1)
$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S' & \xrightarrow{g} & S \end{array} \quad .$$

On peut considérer la sous-catégorie de la catégorie des sites réduite à ce diagramme ; on utilise alors 2.1.2 pour définir un "morphisme de changement de base" de $Lg^* Rf_*$ dans $Rf'_* Lg'^*$ lorsque 4.1.3 est applicable :

Proposition 4.1.5. La flèche 2.1.2 de changement de base, de $Lg^* Rf_*$ dans $Rf'_* Lg'^*$, est définie dans chacun des cas suivants :

(i) On travaille dans les catégories $D^+$, et $Lg^*$, $Lg'^*$ sont de dimension finie.

(ii) On travaille dans les catégories $D^-$, et $Rf_*$, $Rf'_*$ sont de dimension finie.

(iii) On travaille dans les catégories dérivées entières, et $Rf_*$, $Rf'_*$, $Lg^*$, $Lg'^*$ sont de dimension finie, ainsi que $Lf^*$ et $Lf'^*$ (ou : ainsi que $Rg_*$ et $Rg'_*$).

On notera que la dernière hypothèse de (iii) semble canularesque. Le rédacteur ne sait pas s'en débarasser sauf lorsque les sites considérés ont assez de points (4.2.12). Les propriétés fonctorielles de cette flèche de changement de base s'obtiennent aussitôt à partir de la description 2.1.2.

4.1.6. Soit $(S,\mathcal{A})$ un site annelé, et considérons le foncteur "produit tensoriel"

$$\otimes : \mathrm{Mod}_d(S,\mathcal{A}^\circ) \times \mathrm{Mod}_g(S,\mathcal{A}) \longrightarrow \mathrm{Mod}(S, C)$$

où $C$ est le centre de $\mathcal{A}$.

La recette de 1.1.6, pour l'application de laquelle on définira le complexe simple associé à un double complexe par une somme, permet d'étendre ce foncteur en un foncteur encore noté $\otimes$ :

$$\otimes : K(S,\mathcal{A}^\circ) \times K(S,\mathcal{A}) \longrightarrow K(S, C) \quad .$$

Proposition 4.1.7. Avec les notations précédentes :

(i) Le foncteur produit tensoriel est dérivable à gauche (1.2.1) en un foncteur "produit tensoriel total"

$$\overset{L}{\otimes} : D^-(S,\mathcal{A}^\circ) \times D^-(S,\mathcal{A}) \longrightarrow D^-(S, C) \quad ;$$

(ii) un couple $(K,L)$ de complexes bornés supérieurement est déployé pour $\overset{L}{\otimes}$ dès que $K$ ou $L$ est à composantes plates.

La démonstration est standard.

Notation 4.1.8. Si $K \in D^-(S,\mathcal{A}^\circ)$ et $L \in D^-(S,\mathcal{A})$, on désigne par $K \overset{L}{\otimes} L$ le produit tensoriel total de K et L. Le faisceau $H_k(K \overset{L}{\otimes} L) = H^{-k}(K \overset{L}{\otimes} L)$ se désigne par $\mathrm{Tor}_k(K,L)$ et s'appelle le $k^{\text{ième}}$ hypertor local de K et L .

Soient $K \in D^-(S,\mathcal{A}^\circ)$ et $L \in D^-(S,\mathcal{A})$. Si $H^i(K) = 0$ pour $i > k$ et $H^i(L) = 0$ pour $i > \ell$, on vérifie que $H^i(K \overset{L}{\otimes} L) = 0$ pour $i > k + \ell$ et que $H^{k+\ell}(K \overset{L}{\otimes} L) = H^k(K) \otimes H^\ell(L)$. Fixons K et regardons $K \overset{L}{\otimes} L$ comme un foncteur en L. Si on applique la définition 1.2.9 de l'amplitude cohomologique comme intervalle de $\mathbb{Z}$, la borne supérieure de cet intervalle est de nature triviale. C'est le plus grand entier i tel que $H^i(K) \neq 0$. La borne inférieure est plus intéressante :

Définition 4.1.9. On dit qu'un complexe $K \in \mathrm{Ob}\, D^b(S,\mathcal{A}^\circ)$ est de Tor-dimension $\leq n$ si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées :

(i) Pour tout $\mathcal{A}$-module L, $\mathrm{Tor}_k(K,L) = 0$ pour $k > n$ .

(ii) Pour tout complexe de $\mathcal{A}$-modules L tel que $H^i(L) = 0$ pour $i < \ell$, $H^i(K \overset{L}{\otimes} L) = 0$ pour $i < \ell - n$.

(iii) Il existe un quasi-isomorphisme de but K et de source un complexe K', à composantes plates et nulles pour $i < -n$ .

4.1.10. Voici quelques variations possibles:

(i) Si $K \in \mathrm{Ob}\, D^b(S,\mathcal{A}^\circ)$ est de tor-dimension finie et si $L \in \mathrm{Ob}\, D(S,\mathcal{A})$, alors le foncteur $\overset{L}{\otimes}$ est défini (1.2.1) en (K,L).

(ii) Si $K \in \mathrm{Ob}\, K^b(S,\mathcal{A}^\circ)$ a des composantes de Tor-dimension finie, le foncteur $L \longmapsto K \otimes L$ $(L \in K(S,\mathcal{A}))$ est dérivable à gauche.

(iii) Si tout Module est de Tor-dimension finie, le foncteur $\otimes$ se dérive en un foncteur

$$\overset{L}{\otimes} : D(S,\mathcal{A}^\circ) \times D(S,\mathcal{A}) \longrightarrow D(S,\mathcal{C}) \quad .$$

4.2. Résolutions flasques de Godement.

4.2.1. Soient S un topos et X un ensemble. Il revient au même de se donner une famille de point de S indexée par X ou de se donner un morphisme $k : \mathrm{Top}(X) \longrightarrow S$ du topos défini par l'espace topologique discret X dans S. Pour que la dite famille soit conservative (IV 6.4.1), il faut et il suffit que pour tout faisceau F de S, la flèche d'adjonction de F dans $k_*k^*F$ soit un monomorphisme (cf. IV 6.4.0).

Définition 4.2.2. Soit $k : \mathrm{Top}(X) \longrightarrow S$ une famille conservative de points d'un topos S . On appelle résolution de Godement ou résolution flasque canonique (relative à X) d'un faisceau abélien F de S, et on désigne par $\mathcal{G}_X^*(F)$ (ou simplement $\mathcal{G}^*(F)$), la résolution à droite suivante de F :

1) $\mathcal{G}^0(F) = k_*k^*F$ et $\varepsilon : F \longrightarrow \mathcal{G}^0(F)$ est la flèche d'adjonction.

2) Posons $d^{-1} = \varepsilon$ ; on définit par récurrence, pour $n \geq 0$

$$\mathcal{G}^{n+1}(F) = \mathcal{G}^0(\mathrm{coker}\ d^{n-1}),$$ et $d^n$ comme flèche composée

$$d^n : \mathcal{G}^n(F) \longrightarrow \mathrm{coker}(d^{n-1}) \longrightarrow \mathcal{G}^0(\mathrm{coker}(d^{n-1})).$$

Proposition 4.2.3. Sous les hypothèses de 4.2.2,

(i) $\mathcal{G}^n(F)$ est un faisceau flasque (V 3.7),

(ii) $\mathcal{G}^n(F)$ est un foncteur exact en F,

(iii) la fibre en un point $x \in X$ du complexe $\mathcal{G}^*(F)$ est une résolution canoniquement scindée de $F_x$ .

Les faisceaux $\mathscr{C}^n(F)$ sont flasques en tant qu'image directe de faisceaux (automatiquement flasques) sur l'espace topologique discret X.

Les foncteurs $k^*$ et $k_*$ sont exacts. Le foncteur $\mathscr{C}^0$ est donc exact. Prouvons par récurrence sur $n \geq 0$ que le foncteur $\mathscr{Z}^n(F) = \operatorname{coker}(d^{n-1})$ est exact, donc aussi $\mathscr{C}^{n+1} = \mathscr{C}^0 \mathscr{Z}^n$ . Posons $\mathscr{Z}^{-1}(F) = F$. Une suite exacte de faisceaux

$$0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$$

définit pour $n \geq 0$ un diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathscr{Z}^{n-1}(F') & \longrightarrow & \mathscr{Z}^{n-1}(F) & \longrightarrow & \mathscr{Z}^{n-1}(F'') & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathscr{C}^n(F') & \longrightarrow & \mathscr{C}^n(F) & \longrightarrow & \mathscr{C}^n(F'') & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathscr{Z}^n(F') & \longrightarrow & \mathscr{Z}^n(F) & \longrightarrow & \mathscr{Z}^n(F'') & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array} ,$$

dont les colonnes sont exactes, ainsi, d'après l'hypothèse de récurrence, que les 2 premières lignes. La 3è ligne est donc exacte, et (ii) est prouvé.

Les suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow \mathscr{Z}^{n+1}(F) \longrightarrow \mathscr{C}^n(F) \longrightarrow \mathscr{Z}^n(F) \longrightarrow 0$$

sont des cas particuliers de la suite exacte courte

(4.2.3.1) $$0 \longrightarrow F \xrightarrow{\varepsilon} \mathscr{C}^0(F) \longrightarrow \mathscr{Z}^0(F) \longrightarrow 0$$

(faire la substitution $F \longmapsto \mathcal{Z}^{n-1}(F)$). Pour prouver (iii), il reste à prouver que la suite image réciproque de (4.2.3.1) par k est canoniquement scindée. La flèche composée

$$k^*F \xrightarrow{k^*(\varepsilon)} k^*\mathcal{C}^0F = k^*(k_*k^*)F = (k^*k_*)k^*F \longrightarrow k^*F$$

est en effet l'identité.

Remarque 4.2.4. Si $(x_i)_{i\in X}$ est une famille conservative de points d'un site, à cette famille correspond une famille conservative de points du topos engendré, qui permet encore de définir les résolutions flasques canoniques.

Remarque 4.2.5. Si S est un topos annelé, les foncteurs $\mathcal{C}^n$ transforment Modules en Modules.

Remarque 4.2.6. Soit $\mathcal{S}$ une catégorie formée de sites. Supposons donné, pour chaque $S \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{S}$, un ensemble $S^d$ et une famille conservative $k_S$: $\mathrm{Top}(S^d) \longrightarrow S$ de points de S indexés par $S^d$. Supposons que $S^d$ soit fonctoriel en S et que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Top}(S^d) & \xrightarrow{f^d} & \mathrm{Top}(T^d) \\ \downarrow{\scriptstyle k_S} & & \downarrow{\scriptstyle k_T} \\ S & \xrightarrow{f} & T \end{array}$$

soient commutatifs. Les résolutions flasques canoniques correspondantes sont alors "fonctorielles en S ".

Si $\mathcal{S}$ est la catégorie des espaces topologiques, on peut prendre $S^d$ = ensemble sous-jacent.

Si $\mathcal{S}$ est la catégorie des sites étales de schémas S localement de type fini sur un schéma $S_o$, et si pour chaque $s \in S_o$, $\overline{k(s)}$ est une clôture algébrique de k(s), on peut prendre pour $S^d$ l'ensemble des points de S à valeurs dans l'un des $\overline{k(s)}$.

On peut remplacer la condition "de type fini" par une condition de cardinal si les clôtures algébriques $\overline{k(s)}$ sont remplacées par des extensions algébriquement closes assez grandes.

4.2.7. Un des intérêts des résolutions flasques canoniques est qu'elles permettent de construire des complexes déployés à la fois pour des foncteurs du type "produit tensoriel" et pour des foncteurs du type "image directe". Il permettent par là une construction peut-être plus compréhenseible des morphismes de changement de base (4.1.5).

Lemme 4.2.8. Soient $f : (S,\mathcal{A}) \longrightarrow (S',\mathcal{B})$ un morphisme de sites annelés, $K \in \mathrm{Ob}\, K(S,\mathcal{A}^\circ)$ et $L \in \mathrm{Ob}\, K(S',\mathcal{B})$ des complexes et $k : \mathrm{Top}(X) \longrightarrow S$ un ensemble conservatif de points de S . On suppose remplie l'une des conditions suivantes :

(a) Les cohomologies de K et L sont bornés supérieurement ;

(b) $\mathcal{A}$ est de Tor-dimension finie sur $f^*\mathcal{B}$ et $K \in \mathrm{Ob}\, D^b(S,\mathcal{A}^\circ)$ est de Tor-dimension finie ;

(c) $L \in \mathrm{Ob}\, D^b(S',\mathcal{B})$ est de Tor-dimension finie.

Alors le foncteur $(K,L) \longmapsto K \otimes f^*L$ est dérivable (1.2.1) en $(K,L)$ ; soit $\overset{\mathbb{L}}{\otimes}\mathbb{L}f^*$ son dérivé.

(i) Si $x$ est un point de $S$, alors $(K \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathbb{L}f^*L)_x \xrightarrow{\sim} K_x \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{f(x)}} L_{f(x)}$.

(ii) Le couple $(K,L)$ est déployé à gauche pour $\overset{\mathbb{L}}{\otimes}\mathbb{L}f^*$ (1.2.1) si et seulement si, pour tout $x \in X$, le couple $(K_x, L_{f(x)})$ est déployé à gauche pour le foncteur $\otimes_{\mathcal{O}_{f(x)}}$.

(iii) Sous les hypothèses (a) ou (b), le foncteur $K \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathbb{L}f^*L$ en $L$ est d'amplitude cohomologique $\subset d$ (1.2.9) si et seulement si, $\forall\, x \in V$, le complexe $K_x$ de $\mathcal{O}_{f(x)}$-modules est de Tor-amplitude $\subset d$.

Ce lemme, dont la démonstration est standard, exprime la "nature ponctuelle" du foncteur considéré.

4.2.9. Soit $L$ un complexe. On appelle résolution de Godement (relative à $X$) de $L$ le complexe simple (défini en terme de sommes) associé au complexe double $C^*L$ (1.1.4). On appelle résolution de Godement tronquée à l'ordre $n$ $\tau''_{\leq n} C^*L$ le complexe simple associé au complexe double déduit de $C^*L$ par troncature (1.1.15) dans le sens de la différentielle de Godement. En vertu de 4.2.3 (iii), $L$ est point de $X$ par point de $X$ homotope aux complexes $\tau''_{\leq n} C^*L$ et $C^*L$ ; ces complexes sont donc "aussi bons que $L$ " vis-à-vis des foncteurs du type "produit tensoriel" (4.2.8).

Proposition 4.2.10. Soient $(S,\mathring{A})$ un site annelé, $X$ un ensemble conservatif de points de $S$ et $N,M \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ avec $N$ ou $M < \infty$. Soit $A$ la sous-catégorie de $K(S)$ formée des complexes $L$ tels que

(a) Si $N = \infty$, alors $H^i(L) = 0$ pour $i$ assez grand ; si $M = \infty$, alors $H^i(L) = 0$ pour $i$ assez petit.

(b) Quels que soient $x \in X$ et le $\mathcal{A}_x$-module $Q$ de Tor-dimension $\leq N$, le complexe $L_x$ est déployé à gauche pour le foncteur $M_x \otimes_{\mathcal{A}_x} *$ .

(c) Quel que soit le morphisme de topos $f : X^{\sim} \longrightarrow E$, de dimension cohomologique $\leq M$, le complexe $L$ est déployé à droite pour le foncteur $f_*$ .

Alors, l'inclusion de A dans K(S) induit une équivalence entre la catégorie déduite de A en inversant les quasi-isomorphismes et la catégorie $D^*(S)$, $* = +$ si $N < M = \infty$, $* = -$ si $M < N = \infty$ et $* =$ blanc si $N, M < \infty$ .

Soit K un complexe vérifiant (a). Si $N = \infty$, alors la flèche canonique $a : K_1 = \sigma_{\leq i} K \longrightarrow K$ est quasi-isomorphisme pour i assez grand. Si $N < \infty$, on pose $K_1 = K$ . Soit $K_1^*$ une résolution plate de Cartan-Eilenberg et posons $K_2 = \tau''_{\geq N} K_1$ (troncature dans le sens de la nouvelle différentielle). La flèche composée de $K_2$ dans K est un quasi-isomorphisme, et $K_2$ vérifie (b).

Soit K un complexe vérifiant (a) et (b). Si $M = \infty$ , alors $N < \infty$ ; pour i assez grand, $b : K \longrightarrow \sigma_{\geq i} K_1 = K_3$ est un quasi-isomorphisme de $K_3$ vérifie encore (a) et (b). Si $M < \infty$, on pose $K = K_3$ . Soit $K_4 = \sigma''_{\leq M} C^* K_3$ . Alors $K_4$ vérifie (a) (c), et (b) par 4.2.3 (iii).

La proposition résulte donc de deux applications successives de [CD I 2.4.2].

Variantes 4.2.11. Si $N < \infty$ (resp. si $M < \infty$ , resp. si $N, M < \infty$) alors on aurait pu travailler de même avec des complexes bornés inférieurement (resp. supérieurement, resp. bornés).

4.2.12. Voici comment utiliser ces constructions pour définir le morphisme de changement de base 4.1.4. sous des hypothèses plus générales que celles de loc. cit., lorsque les sites considérés ont assez de points.

Soient un diagramme commutatif (cf. (0.11)) de sites

(4.2.12.1)
$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S' & \xrightarrow{g} & S \end{array} ,$$

$\mathcal{A}_0$ un faisceau d'anneaux sur S, $\mathcal{A}_0'$ un faisceau d'anneaux sur S' et L un complexe de $(\mathcal{A}_0', g^*\mathcal{A}_0)$-bimodules sur S'. On suppose que :

(i) les sites X et X' admettent des familles conservatives de points, $k : Q \longrightarrow X$ et $k' : Q' \longrightarrow X'$, s'insérant dans un diagramme commutatif

(4.2.12.2)
$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ \downarrow{\scriptstyle k'} & & \downarrow{\scriptstyle k} \\ Q' & \xrightarrow{g_0'} & Q \end{array} .$$

(ii) L'une des hypothèses suivantes est remplie :

(a) Les foncteurs $Rf_*$ et $Rf_*'$ sont de dimension cohomologique finie, et L est borné supérieurement. On pose $s = -$.

(b) L est borné inférieurement, à composantes de Tor-dimension uniformément bornée (comme $g^*\mathcal{A}_0$-modules). On pose $s = +$.

(c) L est borné, et les hypothèses de (a) et (b) sont remplies. On pose s = blanc.

On désigne par $L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathbb{L}g^* : D^s(S, \mathcal{A}) \longrightarrow D^s(S', \mathcal{A}')$ le foncteur dérivé gauche (1.2.1) du foncteur $K \longmapsto L \otimes_{g^*\mathcal{A}} g^*K$ de $K^s(S, \mathcal{A})$ dans $K^s(S', \mathcal{A}')$.

On se propose de définir une flèche de changement de base

(4.2.12.3) $\quad \varphi : L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathbb{L}g^* \, Rf_* \, K \longrightarrow Rf'_*(f'^*L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathbb{L}g'^*K)$

pour K dans $D^s(X, \mathcal{A})$.

En vertu de 4.2.10, il suffit de la définir, fonctoriellement en K, pour les complexes appartenant à la catégorie A de 4.2.10, pour

$$N \geq \sup_i (\text{tor dim de } L^i \text{ sur } g^* \quad )$$

$$M \geq \text{dimension cohomologique de } Rf_* \, .$$

Un tel complexe est déployé tant pour le foncteur $Rf_*$ que pour le foncteur $f'^*L \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{A}}, g'^*$ (4.2.8). Les flèches canoniques

$$\alpha : f_*K \longrightarrow Rf_*K$$

$$\beta : f'^*L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathbb{L}g^*K \longrightarrow L \otimes g^*K$$

sont donc des quasi-isomorphismes. Pour calculer le membre de gauche I de (4.2.12.3), il suffit donc de prendre une résolution gauche (i.e. un quasi-isomorphisme)

$$\gamma : K_1 \longrightarrow f_*K \quad ,$$

avec $K_1$ déployé pour $L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathbb{L}g^*$ ; on a

$$I \xrightarrow{\sim} L \otimes \mathbb{L}g^* \, K_1 \quad .$$

De même, pour calculer le membre de droite $\amalg$ de (4.2.12.3), il suffit de prendre une résolution droite

$$\delta : f'^*L \otimes g'^*K \longrightarrow K_2 \quad ,$$

avec $K_2$ déployé pour $Rf'_*$ ; on a

$$\amalg \xrightarrow{\sim} f'_* K_2 \quad .$$

On définit alors la flèche de changement de base comme le composé

$$I \xrightarrow{\sim} L \otimes g^*K_1 \xrightarrow{\gamma} L \otimes g^*f_*K \xrightarrow{c} f'_*(f'^*L \otimes g'^*K) \xrightarrow{\alpha} f'_* K_2 \xrightarrow{\sim} \amalg \ ,$$

où la flèche c est la flèche de changement de base usuelle, au niveau des vrais complexes.

Cette flèche de changement de base a la propriété caractéristique suivante, qui rend en principe aisée la vérification de ses propriétés de compatibilité.

Proposition 4.2.13. Sous les hypothèses précédentes, soient $K \in Ob\ C^s(X',\mathcal{A})$, $K_1 \in Ob\ C^s(X,\mathcal{A})$ et $K_2 \in Ob\ C^s(S,\mathcal{A})$. Soient de plus u un f-morphisme de K dans $K_1$, i.e. $u \in Hom(K_1, f_* K) \xrightarrow{\sim} Hom(f^*K_1, K)$, et v un morphisme de $f'^*L \otimes g'^*K$ dans $K_2$ . On déduit de u,v et de la flèche de changement de base usuelle un morphisme de complexes $c_{u,v} : L \otimes g^*K_1 \longrightarrow f'_*k_2$ . Soient u', v' et $c'_{uv}$ les flèches composées

$$u' : K_1 \xrightarrow{u} f_*K \longrightarrow Rf_*K$$

$$v' : L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathbb{L}g'^*K \longrightarrow L \otimes g'^*K \xrightarrow{v} K_2$$

$$c'_{u,v} : L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathbb{L}g'^*K_1 \longrightarrow L \otimes g'^*K_1 \xrightarrow{c_{uv}} f'_* K_2 \longrightarrow Rf'_*K_2 \quad .$$

Le diagramme suivant est commutatif

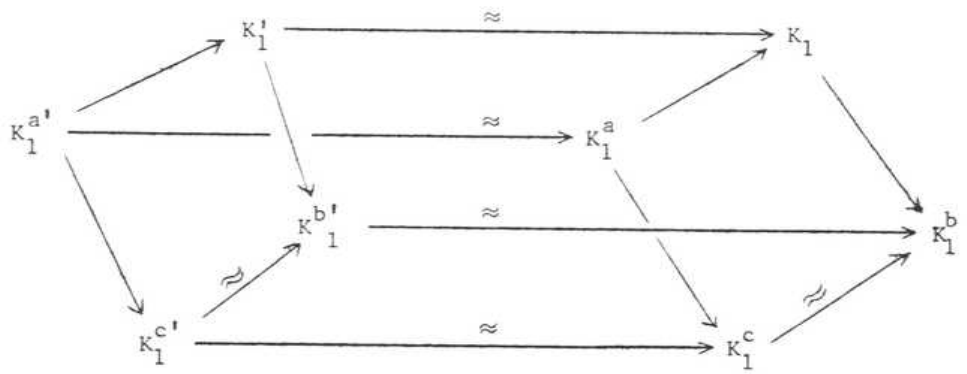
$$\begin{array}{ccc} L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} Lg^*Rf_*K & \xrightarrow{\Phi} & Rf'_*(f'^*L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} Lg'^*K) \\ \uparrow{\scriptstyle L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} Lg^*(u')} \quad (4.2.13.1) & & \downarrow{\scriptstyle Rf'_*(v')} \\ L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} Lg^*K_1 & \xrightarrow{c'_{uv}} & Rf'_* K_2 \end{array} .$$

Supposons tout d'abord que $K_1 = f_*K$ et que $K_2 = f'^*L \otimes g'^*K$ , et soit un diagramme commutatif de complexes

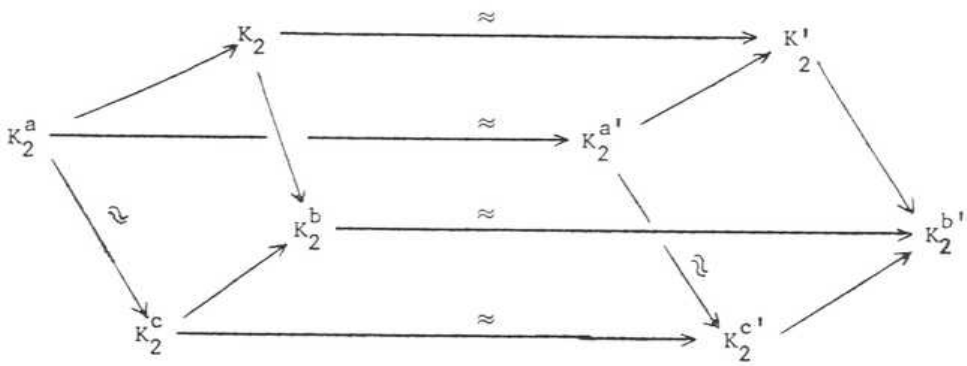
$$\begin{array}{ccc} K^a & \longrightarrow & K \\ \downarrow & & \downarrow \\ K^c & \longrightarrow & K^b \end{array}$$

tel que $K^a$ soit déployé pour $Lf'^*L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} Lg'^*$ , que $K^b$ soit déployé pour $Rf_*$ et que $K^c$ soit déployé pour ces deux foncteurs : pour construire ce diagramme, on commence par construire $K^a$ , puis on applique une résolution flasque canonique (éventuellement tronquée) à $K^a$ et $K$ .

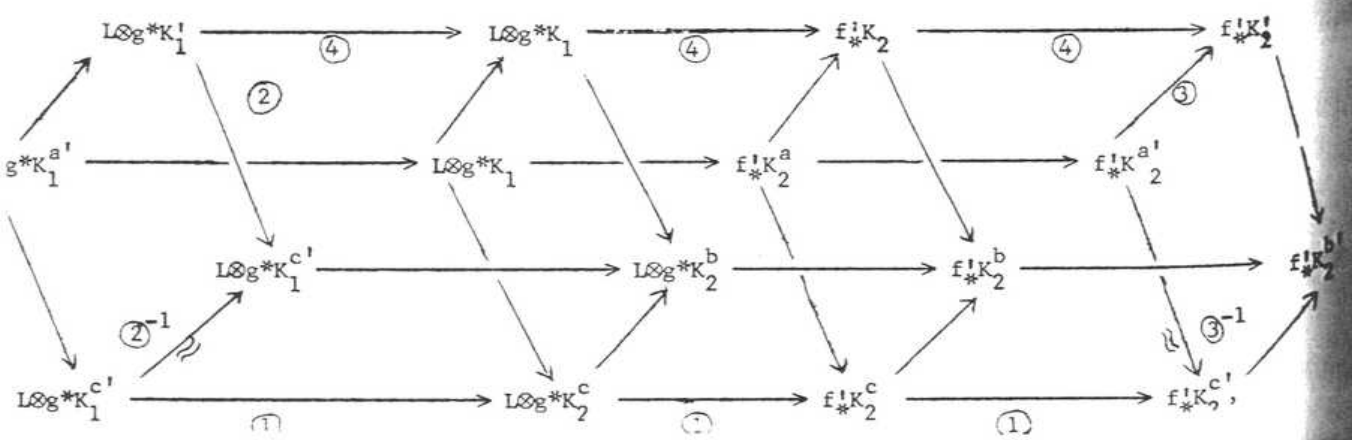
Appliquons le foncteur $f_*$ (resp. $L \otimes g'^*$) à ce diagramme, et résolvons les complexes du diagramme $(K_1, K_1^a, K_1^b, K_1^c)$ (resp. $(K_2, K_2^a, K_2^b, K_2^c)$) de façon à obtenir un cube commutatif, où $\approx$ désigne un quasi-isomorphisme :



avec $K_1'$, $K_1^{a'}$, $K_1^{b'}$, $K_1^{c'}$ déployés pour le foncteur $L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} Lg^*$ (resp.



avec $K_2'$, $K_2^{a'}$, $K_2^{b'}$, $K_2^{c'}$ déployés pour le foncteur $Rf_*^!$). Utilisant les morphismes usuels de changement de base, on obtient un prisme commutatif de complexes sur S:



et on conclut en notant que les flèches du diagramme (4.2.13.1) s'identifient aux flèches composées suivantes :

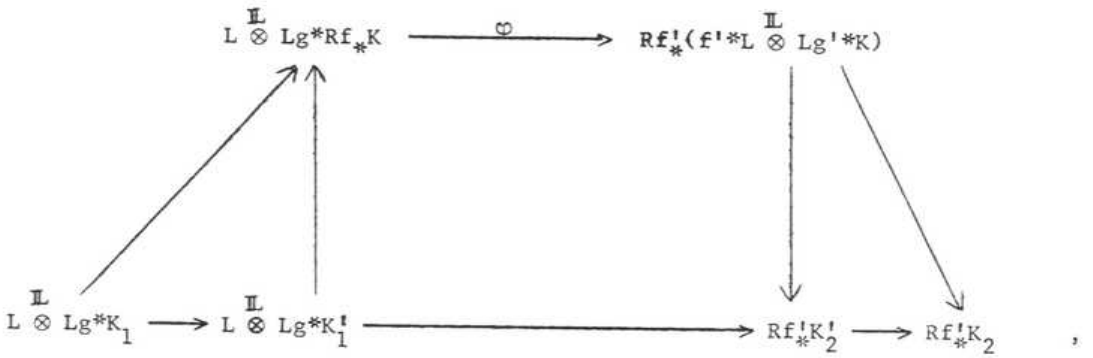
pour $\varphi$ : la composée des flèches (1);

pour $L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} Lg^*(u')$ : la composée des flèches (2) , dont une flèche inverse d'un quasi-isomorphisme ;

pour $Rf'_*(v')$ : la composée des flèches (3) , dont une flèche inverse d'un quasi-isomorphisme ;

pour $C'_{uv}$ : la composé des flèches (4) .

Dans le cas général, posons $K'_1 = f_*K$ et $K'_2 = f'^*L \otimes g^*K$. On dispose alors d'un diagramme




dont les triangles sont commutatifs, ainsi que le rectangle intérieur d'après ce qui précède. Le contour est donc commutatif, et ceci prouve 4.2.13.

4.3. Le théorème de changement de base.

On se propose de reformuler en termes de catégories dérivées le théorème de changement de base pour les morphismes propres XII 5.1 (iii).

Théorème 4.3.1. Soit un diagramme cartésien de schémas

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S' & \xrightarrow{g} & S \end{array}$$

avec f propre. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ des faisceaux d'anneaux de torsion sur S et S' et L un complexe borné supérieurement de $(\mathcal{A}', g^*\mathcal{A})$-bimodules. On suppose que la dimension des fibres de f est bornée. L'hypothèse 4.2.12 (a) est alors remplie, et la flèche de changement de base (4.2.12.3), entre foncteurs de $D^-(X, f^*\mathcal{A})$ dans $D^-(S', \mathcal{A}')$ :

$$\varphi_K : L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} Lg^*K \longrightarrow Rf'_*(f'^*L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} Lg'^* K) \quad ,$$

est un isomorphisme.

Les foncteurs considérés sont triangulés et "way-out" [RD I 7], de sorte que, pour vérifier que $\varphi_K$ est un isomorphisme, il suffit de vérifier que les $\varphi_{\underline{H}^i(K)}$ sont des isomorphismes. On peut donc supposer que K est réduit à un faisceau de $f^*\mathcal{A}$-modules (de torsion) placé en degré 0 .

Pour vérifier que $\varphi_K$ est un isomorphisme, il suffit de le vérifier après application du foncteur d'oubli de la catégorie des $\mathcal{A}'$-Modules dans celle des $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-Modules, où $n\mathcal{A} = n\mathcal{A}' = 0$ .

Ceci permet de se ramener au cas où $\mathcal{A}' = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, avec $n\mathcal{A} = 0$ . On peut alors remplacer L par un complexe isomorphe dans la catégorie dérivée, à composantes plates sur $g^*\mathcal{A}$, et borné supérieurement. Les foncteurs considérés étant triangulés et "way out" en L, il suffit de vérifier que $\varphi_K$ est un isomorphisme après avoir remplacé L par une de ses composantes. On peut donc supposer que L est réduit à un faisceau de $g^*\mathcal{A}$-modules plats placé en degré 0 . Il faut prouver que les flèches

$$\varphi^q : L \otimes g^*R^qf_*K \longrightarrow R^qf'_*(f'^*L \otimes g^*K)$$

sont des isomorphismes. Soit s un point géométrique de S', $X_s$ la fibre de X' en s et $K_s$ les images réciproques de K sur $X_s$ . En vertu de XII 5.1 (iii), la fibre en s de $\varphi^q$ est la flèche

$$\varphi^q_s : L_s \otimes H^q(X_s,K) \longrightarrow H^q(X_s, L_s \otimes K) \quad .$$

En vertu du théorème de D. Lazard [1], le $\mathcal{A}_s$-module plat $L_s$ est limite inductive filtrante de $\mathcal{A}_s$-modules libres $L_{s,i}$ ; le foncteur $H^q(X_s,*)$ commute aux limites inductives filtrantes. La flèche $\varphi^q$ est donc limite inductive des flèches

$$\varphi^q_i : L_{s,i} \otimes H^q(X_s,K) \longrightarrow H^q(X_s, L_{s,i} \otimes K) \quad .$$

Ces dernières sont évidemment des isomorphismes, donc aussi $\varphi^q_s$ , et $\varphi$ est un isomorphisme.

Variantes 4.3.2. (i) Lorsque L est un complexe borné de composantes de Tor-dimension finie sur $g^*\mathcal{A}_0$, les hypothèses (c) de 4.2.12 sont remplies, et on peut travailler dans la catégorie dérivée entière.
(ii) Si L borné inférieurement, à composantes de Tor-dimension finie sur $g^*\mathcal{A}_0$, les hypothèses (b) de 4.2.12 sont remplies, même si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ ne sont pas de torsion ; la flèche de changement de base $\varphi_K$ ($K \in D^+(X, f^*\mathcal{A}_0)$) sera un isomorphisme si les faisceaux $\underline{H}^i(K)$ sont de torsion.

## 5. Les foncteurs image directe à support propre.

### 5.1. La construction fondamentale.

On se propose de suivre le programme indiqué en 3.1 et de définir le foncteur $Rf_!$ pour f un morphisme compactifiable (3.2). On montrera en appendice comment traiter le cas d'un morphisme séparé de type fini quelconque.

5.1.1. Soient X un topos, U un ouvert de X (IV 8.3) et j le morphisme d'inclusion de U dans X . On a défini en IV 5.2 un foncteur "prolongement par le vide" de la catégorie des faisceaux d'ensembles sur U dans celle des faisceaux d'ensembles sur X . Ce foncteur $j_!$ est adjoint à gauche au foncteur de restriction $j^*$ .

On désigne encore par $j_!$ le foncteur de la catégorie des faisceaux d'ensembles pointés sur U (resp. des faisceaux en groupes, resp. des faisceaux de $j^*\mathcal{A}$-modules pour $\mathcal{A}$ faisceau d'anneaux sur X)

dans la catégorie analogue sur X, adjoint à gauche au foncteur de restriction $j^*$ (IV ). Ces trois foncteurs $j_!$ sont compatibles aux foncteurs d'oubli, de la catégorie des Modules dans celle des Groupes, et de la catégorie des Groupes dans celle des Ensembles pointés (*). Si $i : F \longrightarrow X$ est l'inclusion du fermé complémentaire de U, alors $j^*j_!$ est (canoniquement isomorphe à) l'identité et $i^*j_!$ est le foncteur constant de valeur l'objet initial (ou final, cela revient ici au même). Ceci caractérise d'ailleurs $j_!$ . On en déduit que les trois foncteurs $j_!$ envisagés sont exacts et s'injectent dans les foncteurs $j_*$ correspondants. On les appelle foncteurs de prolongement par zéro. La formule $(j_1\ j_2)^* = j_2^*\ j_1^*$ se transpose en un isomorphisme de transitivité

$$(j_1\ j_2)_! = j_{1!}\ j_{2!} \quad .$$

Les foncteur $j_!$ sont compatibles aux changements de base :

Lemme 5.1.2. Soient $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de topos, V un ouvert de Y et U son image réciproque dans X :

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f'} & V \\ \downarrow{\scriptstyle j'} & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \quad .$$

Il existe alors un et un seul isomorphisme de changement de base $f^*j_! \xrightarrow{\sim} j_!'\, f'^*$ rendant commutatif le diagramme

(5.1.2.1)
$$\begin{array}{ccc} f^*j_! & \xrightarrow{\sim} & j_!f'^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ f^*j_* & \xrightarrow{\alpha} & j_*f'^* \end{array} \quad ,$$

où $\alpha$ est la flèche de changement de base.

(*) Mais pas dans celle des Ensembles !

Preuve. La flèche de changement de base $\omega : j^*f_* \longrightarrow f'_*j'^*$ est trivialement un isomorphisme. Elle se transpose en un isomorphisme de changement de base $\omega' : j_! f'^* \xrightarrow{\sim} f^*j_!$ . Pour vérifier que le diagramme (5.1.2.1)est commutatif, il suffit de voir que sa restriction à U l'est, ce qui est trivial.

5.1.3. Sous les hypothèses de 5.1.1, avec X annelé par un faisceau d'anneaux $\mathcal{A}$, le foncteur $j_!$ sur les Modules est exact, donc passe trivialement aux catégories dérivées et définit un foncteur, encore noté $j_!$ , de $D(U, j^*\mathcal{A})$ dans $D(X, \mathcal{A})$. On dispose encore d'isomorphismes de transitivité

(5.1.3.1) $$(j_1 j_2) = j_{1!}\, j_{2!} \quad .$$

On a encore, au niveau des catégories dérivées, une formule d'adjonction

(5.1.3.2) $$\mathrm{Hom}_{D(X)}(j_! K, L) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{D(U)}(K, j^*L) \quad .$$

5.1.4. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme propre, $\mathcal{A}$ un faisceau d'anneaux de torsion sur Y, et annelons X par le faisceau d'anneaux image réciproque de $\mathcal{A}$. Supposons que la dimension des fibres de f soit majorée par un entier n (ce qui est le cas si Y est quasi-compact) . On sait alors que pour chaque faisceau de $f^*\mathcal{A}$-modules F sur X, les faisceaux $R^q f_* F$ sont nuls pour $q > 2n$ (XII 5.3 bis). Le foncteur $f_*$ admet donc un foncteur dérivé (1.2.10)

$$Rf_* : D(X, f^*\mathcal{A}) \longrightarrow D(Y, \mathcal{A}) \quad .$$

Si f est le composé g h de deux morphismes propres, on dispose d'une formule de transitivité $Rf_* = Rg_* Rh_*$ , qu'on peut comme d'habitude exprimer en terme de catégories cofibrées (Scholie 5.1.3).

5.1.5. Soit un diagramme commutatif de schémas

(5.1.5.1)
$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow[j_1]{} & X \\ \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ V & \xrightarrow[j_2]{} & Y \end{array} ,$$

dans lequel $j_1$ et $j_2$ sont des immersions ouvertes et f, g des morphismes propres dont la dimension des fibres est majorée par un entier n . Soit $\mathcal{A}$ un faisceau d'anneaux de torsion sur Y, et annelons U, V et X par les images réciproques de $\mathcal{A}$ . En vertu de 5.1.3.2, si $K \in D(U)$, définir une flèche

(5.1.5.2)
$$d : j_{2!} Rg_* K \longrightarrow Rf_* j_{1!} K$$

revient à définir une flèche

$$d' : Rg_* K \longrightarrow j_2^* Rf_* j_{1!} K \quad .$$

Le produit fibré $X' = V \times_Y X$ s'insère dans un diagramme commutatif

(5.1.5.3)
$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{k} & X' & \xrightarrow[j_2']{} & X \\ \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ V & = & V & \xrightarrow[j_2]{} & Y \end{array} ,$$

et, trivialement, on a $j_2^* Rf_* j_{1!} K \simeq Rf'_*(j_2'^* j_{1!} K) \simeq Rf'_* k_! K$ .

La flèche k est une immersion ouverte propre ; on a donc $k_! = k_*$ , d'où un isomorphisme $Rf'_* k_! K \simeq Rf'_* k_* K \simeq Rg_* K$ , qui nous fournit l'isomorphisme d' cherché et le morphisme d . On voit de plus que la restriction de d à V est un isomorphisme.

Lemme 5.1.6. Le morphisme 5.1.5.2 est un isomorphisme.

Il reste à vérifier que la restriction de d à Y - V = F est un isomorphisme. Soit $X'' = X \times_Y F$ et appliquons le théorème de changement de base pour un morphisme propre (4.3.1) au carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X'' & \xrightarrow{i'} & X \\ \downarrow{\scriptstyle f''} & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ F & \xrightarrow{i} & Y \end{array} ,$$

pour $\mathcal{A}_0' = i^* \mathcal{A}_0$ et $L = \mathcal{A}_0'[0]$. On trouve :

$i^* Rf_* j_{1!} K \simeq Rf''_* i'^* j_{1!} K \simeq Rf''_* 0 \simeq 0$ , de sorte que les deux membres de (5.1.5.2) sont nuls en dehors de U et que d est un isomorphisme.

5.1.7. Soit S un schéma annelé par un faisceau d'anneaux de torsion $\mathcal{A}_0$. Pour tout S-schéma $\varphi : X \longrightarrow S$, on pose $\mathcal{A}_{0X} = \varphi^* \mathcal{A}_0$. Plaçons-nous dans la catégorie (S) des S-schémas quasi-compacts quasi-séparés et des morphismes S-compactifiables (3.2). En vertu de 3.2.3, cette catégorie, la sous-catégorie (S,i) des immersions ouvertes, et la sous-catégorie (S,p) des morphismes propres vérifient les hypothèses 3.2.4 .

On se propose d'appliquer la théorie 3.3.2 aux données suivantes (notations de 3.3.1)

α) $F(X) = D(X, \Lambda_X)$ pour $\varphi : X \longrightarrow S$ dans S :

(i) Pour $p : X \longrightarrow Y$ propre, on prend pour foncteur $p_*$ le foncteur $Rp_*$ .

(ii) On utilise les isomorphismes de transitivité usuels $R(pq)_* = Rp_* Rq_*$ .

(i') Pour une immersion ouverte $i : X \longrightarrow Y$, on prend pour foncteur $i_*$ le foncteur $i_!$ .

(ii') On utilise les isomorphismes de transitivité (5.1.3.1).

(iii) Pour tout diagramme commutatif (5.1.5.1) on prend pour isomorphisme d l'isomorphisme (5.1.5.2).

On vérifie les conditions (a) (b) (c) (a') (b') (c') de 3.3.2, ce qui prouve le point (a) du :

Théorème 5.1.8. (a) Dans la catégorie (S) définie dans 5.1.7, on peut d'une, et essentiellement d'une seule façon, définir pour toute flèche $f : X \longrightarrow Y$ un foncteur

$$Rf_! : D(X, \Lambda_X) \longrightarrow D(Y, \Lambda_Y) \quad ,$$

et pour tout morphisme composé $f = g\,h : X \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{g} Z$ des isomorphismes de transitivité $c_{f,g}$ entre $Rf_!$ et $Rg_!\ Rh_!$ de sorte que

(i) Les $c_{f,g}$ vérifient la "condition de cocycles"

$$(c_{f,g} * Rh_!) \circ c_{fg,h} = (Rf_! * c_{g,h}) \circ c_{f,gh} \quad .$$

(ii) Lorsqu'on se restreint aux morphismes propres (resp. aux immersions ouvertes) on retrouve la théorie de variance 5.1.4 (resp. 5.1.3 ).

(iii) Pour tout diagramme (5.1.5.1), l'isomorphisme d (5.1.5.2) est l'isomorphisme composé $c_{f,j'} \circ c^{-1}_{j,f'}$ .

(b) Les foncteurs $Rf_!$ sont "way out" [RD I 7] et triangulés.

Tout foncteur $Rf_!$ est composé d'un foncteur $Rg_*$ , pour g propre de but quasi-compact, donc à fibres de dimension bornée, et d'un foncteur $j_!$ pour j immersion ouverte. Ces foncteurs sont way out et triangulés, donc aussi $Rf_!$ .

5.1.8.1. Les isomorphismes de transitivité 5.1.8 (a) sont souvent utilisés via la suite spectrale "des foncteurs composés" qui s'en déduit, valable pour $K \in \mathrm{Ob}\ D(X, \mathcal{A}_X)$ :

$$(5.1.8.2) \qquad E_2^{pq} = R^p g_! R^q h_!(K) \Longrightarrow R^{p+q} f_!(K) \quad .$$

Pour l'obtenir, on note que d'après 5.1.8 b) et [VERDIER 2], pour tout $L \in \mathrm{Ob}\ D(Y, \mathcal{A}_Y)$, on dispose d'une suite spectrale

$$(5.1.8.3) \qquad E_2^{pq} = R^p g_! (\underline{H}^q(L)) \Longrightarrow R^{p+q} g_! (L) \quad ,$$

et (5.1.8.2) est le cas particulier de (5.1.8.3) pour $L = Rh_! K$ .

Définition 5.1.9. (i) On appelle "foncteurs image directe à support propre totals" les foncteurs construits en 5.1.8. On omettra l'adjectif "total" lorsqu'il n'y aura pas de risque de confusion.

(ii) On appelle $q^{\text{ième}}$ foncteur image directe à support propre, et on désigne par $R^q f_!$, le foncteur composé $\mathcal{H}^q \circ Rf_!$ .

(iii) Si X est un schéma sur un corps k séparablement clos, immergeable dans un schéma propre sur k, on identifie faisceaux de modules

sur Spec(k) et modules usuels, et on désigne le foncteur $R^q f_!$ par l'une des notations $H^q_c(X, )$, $H^q_!(X, )$, ou simplement $H^q_c( )$ s'il n'y a pas danger de confusion. On l'appelle alors "$q^{ième}$ groupe d'hypercohomologie à support propre", ou "$q^{ième}$ groupe de cohomologie à support propre" si on l'applique à un complexe réduit au degré 0 .

5.1.9.1. La notation $Rf_!$ est abusive en ce que le foncteur $Rf_!$ n'est pas le dérivé droit du foncteur $f_!$ qui sera défini en 6.1.2. Certains préfèrent la notation $R_!f$ .

5.1.10. Les ingrédients dans la démonstration de 5.1.8 sont le théorème de changement de base propre et l'identité entre $j_*$ et $j_!$ lorsque j est une immersion ouverte propre. Cela permet d'énoncer diverses variantes à 5.1.8 ; on laisse au lecteur le soin de leur donner un sens précis et de les vérifier.

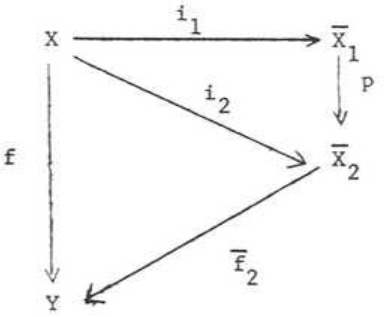
Variante 5.1.11. Dans la catégorie (S), on peut d'une, et essentiellement d'une seule façon, définir pour toute flèche $f : X \longrightarrow Y$ un foncteur $f_!$ de la catégorie des faisceaux d'ensembles pointés sur X dans la catégorie des faisceaux d'ensembles pointés sur Y et pour tout morphisme composé $f = g\,h$ des isomorphismes de transitivité vérifiant des conditions (i), (ii) (iii) analogues à celles de 5.1.4.

Voir 6.1.2 pour une description directe de ce foncteur.

Variante 5.1.12. On peut, pour tout morphisme compactifiable $f : X \to Y$, définir un foncteur $R^1 f_!$ de la catégorie des faisceaux de groupes Ind-finis sur X dans la catégorie des faisceaux d'ensembles pointés sur Y, avec pour toute compactification $f = \bar{f}j$ de f, un isomorphisme $R^1 f_! \xrightarrow{\sim} R^1 \bar{f}_* \circ f_!$ .

On ne postule ici aucune formule de transitivité ; le seul problème est de montrer que le foncteur $R^1 f_!$ ne dépend pas de la compactification choisie de f . Soit $p : (\bar{f}_1, i_1) \to (\bar{f}_2, i_2)$ un morphisme de compactification, i.e. un diagramme

(5.1.12.1)




,

où $\bar{f}_1 = \bar{f}_2 \circ p$ , p étant propre. Si G est un faisceau au groupes sur X, on dispose d'une suite exacte d'ensembles pointés (avec $\alpha$ injectif)

$$0 \to R^1 f_{2*}(p_* i_{1!} G) \xrightarrow{\alpha} R^1 f_{1*}(i_{1!} G) \to \bar{f}_{2*} R^1 p_*(i_{1!} G) \quad ,$$

et d'une flèche de $i_{2!}G$ dans $p_* i_{1!}G$, d'où par composition une flèche $\beta$ de $R^1 f_{2*} i_{2!}G$ dans $R^1 f_{1*} i_{1!} G$ . Raisonnant comme en 3.3.2.1, on voit que le problème est de prouver que cette flèche est toujours un isomorphisme lorsque G est Ind-fini.

Si on applique le théorème de changement de base propre à p et au faisceau d'ensembles $i_{1!}G$, on vérifie que $p_* i_{1!} G = i_{2!} G$, d'où la suite exacte

$$0 \longrightarrow R^1 f_{2*}(i_{2!}G) \xrightarrow{\beta} R^1 f_{1*}(i_{1!}G) \longrightarrow \bar{f}_{2*} R^1 p_* i_{1!} G \quad .$$

La flèche $\beta$ est injective (car $\alpha$ l'est). Si on applique le théorème de changement de base propre à p et au faisceau en groupes G , supposé Ind-fini, on trouve que $R^1 p_* i_{1!} G = 0$ . Donc $\beta$ est un épimorphisme, ce qui achève de démontrer 5.1.12.

Définition 5.1.13. Pour tout site X, on désigne par $D_{tors}(X)$ la sous-catégorie pleine de la catégorie dérivée de la catégorie des faisceaux abéliens sur X, formée des complexes dont les faisceaux de cohomologie sont de torsion.

Variante 5.1.14. Dans la catégorie (S), on peut d'une, et essentiellement d'une seule façon, définir pour toute flèche $f : X \longrightarrow Y$ un foncteur triangulé et "way out" [RD, I 7]

$$Rf_! \ : \ D^+_{tors}(X) \longrightarrow D^+_{tors}(Y)$$

et pour tout morphisme composé $f = g\,h$ des isomorphismes de transitivité vérifiant des conditions (i) (ii) (iii) analogues à celles de 5.1.4.

Variante 5.1.5. Plaçons-nous dans la catégorie des S-schémas annelés par des faisceaux de torsion, les flèches étant les morphismes de schémas annelés induisant (0.8) un morphisme S-compactifiable de schémas. Pour toute flèche

$$f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (Y, \mathcal{B}) ,$$

soit $Rf_!$ le composé du foncteur d'oubli de la catégorie des $\mathcal{A}$ -modules dans celle des $f^*\mathcal{B}$ -modules, et de $Rf_!$ . Ces foncteurs jouissent des propriétés de variance des foncteurs $Rf_!$ usuels.

On notera toutefois que la notation $Rf_!$ n'est raisonnable ici que si $\mathcal{A}$ est fini sur $f^*\mathcal{B}$ , ainsi qu'on s'en rend compte en prenant $X = Y = \mathrm{Spec}(k)$, $k$ algébriquement clos.

5.1.16. Soient $f : X \longrightarrow S$ un morphisme compactifiable, $j : U \longrightarrow X$ un ouvert de X, $i : F \longrightarrow X$ le fermé complémentaire, $\mathcal{A}_S$ un faisceau d'anneaux de torsion sur S, $\mathcal{A}_X$ son image réciproque sur X et $K \in \mathrm{Ob}\, D(X, \mathcal{A}_X)$.

La suite exacte de complexes

$$0 \longrightarrow j_!j^*K \longrightarrow K \longrightarrow i_!i^*K \longrightarrow 0$$

donne naissance à un triangle distingué dans $D(X, \mathcal{A}_X)$ [VERDIER C.D. I 2.4]. Son image par $Rf_!$ est un triangle distingué (5.1.8 (b))

(5.1.16.1) $R(fj)_!j^*K \longrightarrow Rf_!K \longrightarrow R(f\,i)_!\, i^*K \longrightarrow R(f\,j)_!j^*K[1]$ ...

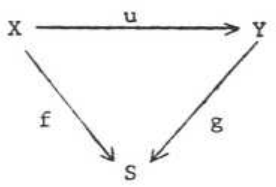
qui définit une suite exacte longue de cohomologie

(5.1.16.2)... $R^q(fj)_!j^*K \longrightarrow R^qf_!K \longrightarrow R^q(fi)_!i^*K \xrightarrow{j} R^{q+1}(fj)_!j^*K \to \ldots$ .

Dans le cas particulier où S est spectre d'un corps séparablement clos et où K est réduit à un faisceau $\underline{G}$ placé en degré 0 , la suite (5.1.16.2) s'écrit

(5.1.16.3)... $H^q_c(U, \underline{G}) \longrightarrow H^q_c(X, \underline{G}) \longrightarrow H^q_c(F, \underline{G}) \xrightarrow{j} H^{q+1}_c(U, \underline{G})$ ...

5.1.17. Soit un diagramme de schémas S-compactifiables




,

avec u <u>propre</u>. On annèle X et Y par l'image réciproque d'un faisceau d'anneaux de torsion $\mathcal{A}_S$ sur S. Pour $K \in D(Y, \mathcal{A}_Y)$, la flèche évidente (d'adjonction) $K \longrightarrow Ru_*u^*K$ définit par application du foncteur $Rg_!$ une flèche

(5.1.17.1) $\qquad u^* : Rg_! K \longrightarrow Rg_!Ru_*u^*K = Rg_! Ru_!u^*K \simeq Rf_!u^*K$

(<u>contravariance de la cohomologie à support propre vis-à-vis des morphismes</u> propres).

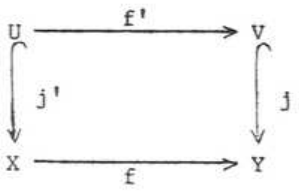
Pour S spectre d'un corps algébriquement clos et K réduit à un faisceau <u>G</u> placé en degré 0, cette flèche s'écrit

(5.1.17.2) $\qquad u^* : H_c^q(Y, \underline{G}) \longrightarrow H_c^q(X, \underline{G})$

5.2. <u>Le théorème de changement de base</u>.

5.2.1. Soient $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de topos, V un ouvert de Y, $U = f^{-1}(V)$ son image réciproque dans X, $\mathcal{A}$ un faisceau d'anneaux sur Y, $\mathcal{A}'$ un faisceau d'anneaux sur X et L un complexe borné supérieurement de $(\mathcal{A}', f^*\mathcal{A})$-bimodules :

(5.2.1.1)



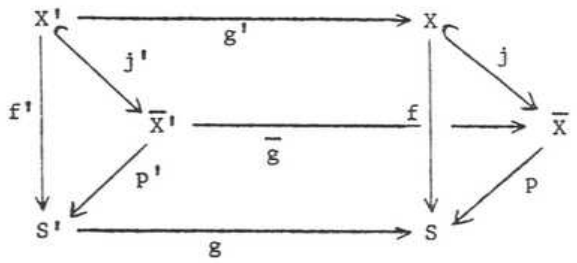

.

On dispose alors d'un isomorphisme de changement de base (5.1.2.1) entre foncteurs de $D(V,\mathcal{A}_0)$ dans $D(X,f^*\mathcal{A}_0)$ : $f^*j_! \xrightarrow{\sim} j'_!f'^*$ . De plus, on dispose d'un isomorphisme évident entre foncteurs de $D^-(U,f'^*\mathcal{A}_0)$ dans $D^-(X,\mathcal{A}')$ : $L \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f^*\mathcal{A}_0} j'_! K \xrightarrow{\sim} j'_!(j'^*L \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f^*\mathcal{A}_0} K)$. Pour le construire, il suffit de noter que si un complexe K est déployé pour le foncteur $j'^*L \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f^*\mathcal{A}}$, alors le complexe $j'_!K$ est déployé pour le foncteur $L \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f^*\mathcal{A}_0}$, et qu'on dispose d'un isomorphisme du type précédent au niveau des complexes. Composant ces deux isomorphismes, on obtient un isomorphisme de changement de base entre foncteurs de $D^-(V,\mathcal{A})$ dans $D^-(X,\mathcal{A}')$ :

$$(5.2.1.2) \qquad L \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f^*\mathcal{A}_0} f^* j_!K \xrightarrow{\sim} j'_!(j'^*L \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f'^*\mathcal{A}_0} f'^*K) \quad .$$

Si L est borné à composante de tor-dimension finie sur $f^*\mathcal{A}$, cet isomorphisme est encore défini pour $K \in \mathrm{Ob}\, D(V,\mathcal{A}_0)$ .

5.2.2. Soient $f : X \longrightarrow S$ et $g : S' \longrightarrow S$ des morphismes de schémas, et supposons que f soit le composé d'une immersion ouverte j et d'un morphisme propre p, dont la dimension des fibres soit bornée par un entier n (automatique pour S quasi-compact). Ces morphismes s'insèrent dans un diagramme à carrés cartésiens



Soient $\mathcal{A}$ un faisceau d'anneaux de torsion sur S, $\mathcal{A}'$ un faisceau d'anneaux de torsion sur S' et L un complexe borné supérieurement de $(\mathcal{A}', g^*\mathcal{A})$-bimodules. On annèle X et $\overline{X}$ (resp. X' et $\overline{X}'$) par les images réciproques $\mathcal{A}_X$ et $\mathcal{A}_{\overline{X}}$ (resp. $\mathcal{A}'_{X'}$ et $\mathcal{A}'_{\overline{X}'}$) de $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{A}'$) sur X et $\overline{X}$ (resp. X' et $\overline{X}'$). On dispose alors d'isomorphismes de changement de base (5.2.1.2) entre les foncteurs $p'^*L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \bar{g}^* j_!K$ et $j'_!(f'^*L \otimes g'^*K)$ de $D^-(X, \mathcal{A}_X)$ dans $D^-(\overline{X}', \mathcal{A}'_{\overline{X}'})$, et d'isomorphismes de changement de base (4.3.1) entre les foncteurs $L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} g^* Rp_* K$ et $Rp'_* (p'^*L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \bar{g}^*K)$ de $D^-(\overline{X}, \mathcal{A}_{\overline{X}})$ dans $D^-(S', \mathcal{A}')$. Par compsition, on en déduit un isomorphisme de changement de base entre foncteurs de $D^-(X, \mathcal{A}_X)$ dans $D^-(S', \mathcal{A}')$

$$(5.2.2.1) \qquad L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} g^* Rp_* j_! K \xrightarrow{\sim} Rp'_* j'_! (f'^*L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} g'^*K) \quad .$$

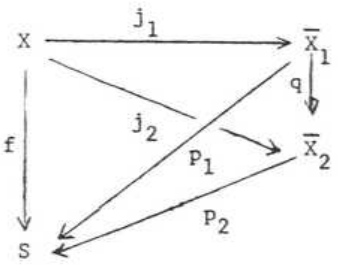
Lorsque L est borné à composantes de tor-dimension finie, les arguments précédents et 4.3.2 (i) permettent de définir l'isomorphisme de changement de base pour $K \in \mathrm{Ob}\, D(X, \mathcal{A}_X)$.

Pour pouvoir référer à 5.1.8, supposons que S soit quasi-compact quasi-séparé. Les foncteurs $Rp_* j_! = Rf_!$ et $Rp'_* j'_! = Rf'_!$ ne dépendent alors que de f et f', ce qui donne un sens au

Lemme 5.2.3. L'isomorphisme de changement de base (5.2.2.1) ne dépend pas de la compactification choisie $f = p\, j$ de X .

Soit un morphisme de compactification $q : \overline{X}_1 \longrightarrow \overline{X}_2$

(5.2.3.1)




L'isomorphisme de changement de base $c_1$ relatif à $\overline{X}_1$ s'obtient en "composant" ceux relatifs à $j_1$ et $p_1$ , ou encore en composant ceux relatifs à $j_1$, q et $p_2$ . L'isomorphisme $c_2$ relatif à $\overline{X}_2$ s'obtient en composant ceux relatifs à $j_2$ et $p_2$ . Pour vérifier que $c_1 = c_2$ , il suffit de vérifier que l'isomorphisme $c_1'$ relatif à $j_2$ s'obtient comme le composé $c_2'$ de ceux relatifs à $j_1$ et q . Désignons par un ' les flèches déduites par le changement de base g des flèches (5.2.3.1) ; $c_1'$ et $c_2'$ sont des isomorphismes

$$c_1', c_2' : L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \bar{g}_2^* j_{2!} K \xrightarrow{\sim} j_{2!}' (j_2'^* L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} g'^* K) \quad .$$

D'après (5.1.3.2), pour vérifier que $c_1' = c_2'$ , il suffit de le vérifier après s'être restreint à $X_2'$ , ce qui est trivial.

Les isomorphismes de changement de base relatifs à deux compactifications entre lesquelles il existe un morphisme sont donc égaux, et on conclut par 3.2.6 (ii).

Lemme 5.2.4. Soit $f = u\,v : X \longrightarrow Y \longrightarrow S$ un composé de morphismes S-compactifiables. Les isomorphismes de changement de base (5.2.2.1) relatifs à u, v et f donnent lieu à un diagramme commutatif (notations de (5.2.4.1) ci-dessous) :

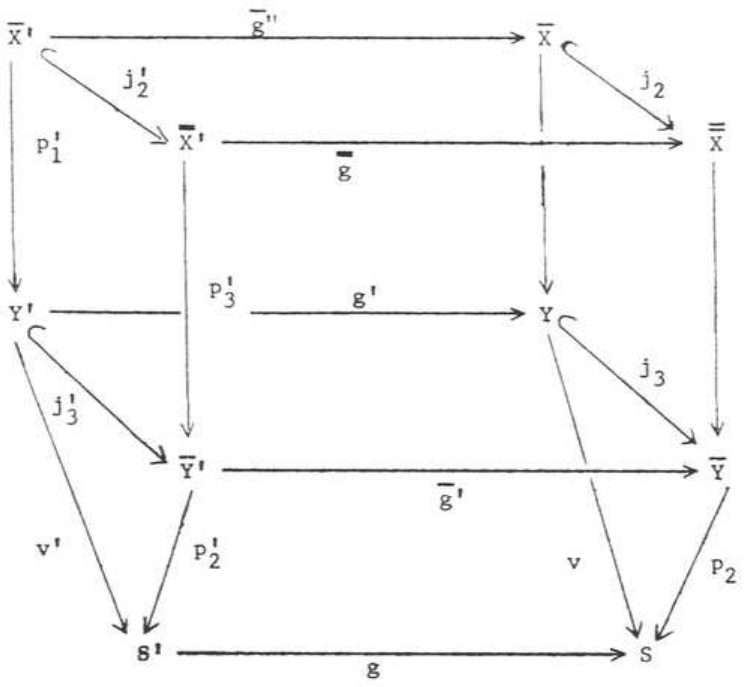
$$\begin{array}{ccc} L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} g^* Ruv_! K & \xrightarrow{\sim} & Ru'v'_!((u'v')^* L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} g''^* K) \\ \| & & \| \\ L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} g^* Ru_! Rv_! K & \xrightarrow{\sim} Ru_!(u'^* L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} g'^* Rv_!) \xrightarrow{\sim} & Ru_! Rv_!(v'^* u'^* L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} g''^* K) \end{array} .$$

Choisissons une compactification de (u,v) (3.2.5) :

$$\begin{array}{ccccccc} & X' & \xrightarrow{g''} & X & \xrightarrow{j_1} & \overline{X} & \xrightarrow{j_2} & \overline{\overline{X}} \\ & \downarrow{\scriptstyle u'} & & \downarrow{\scriptstyle u} & \swarrow{\scriptstyle p_1} & \downarrow & \swarrow{\scriptstyle p_3} & \\ (5.2.4.1) & Y' & \xrightarrow{g'} & Y & \xrightarrow{j_3} & \overline{Y} & & \\ & \downarrow{\scriptstyle v'} & & \downarrow{\scriptstyle v} & \swarrow{\scriptstyle p_2} & & & \\ & S' & \xrightarrow{g} & S & & & & \end{array} .$$

Le lemme 5.2.4 exprime que l'isomorphisme de changement de base $c_1$ relatif à f est le composé $c_2$ de ceux relatifs à u et v . L'isomorphisme $c_1$ s'obtient en composant les isomorphismes de changement de base relatifs à $j_1$, $j_2$, $p_3$ et $p_2$ . Pour $c_2$, on compose ceux relatifs à $j_1$, $p_1$, $j_3$, $p_2$ . Il suffit donc de comparer les isomorphismes $c'_1$ , composé de ceux relatifs à $p_3$ et $j_2$, et $c'_2$ , composé de ceux relatifs à $j_3$ et $p_1$ .

Soit le diagramme cartésien




,

$L' = p'^{*}_{2} L$ et

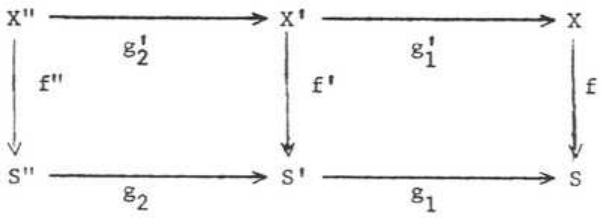
$$c_1', c_2' : L' \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \overline{g}'^{*} R(j_3 p_1)_! K \xrightarrow{\sim} R(j_3' p_1')_! ((j_3' p_1')^* L' \otimes \overline{g}''^* K) \quad .$$

En vertu de (5.1.3.2), pour vérifier que $c_1' = c_2'$, il suffit de vérifier que $j_3'^*(c_1') = j_3'^*(c_2')$, ce qui est trivial.

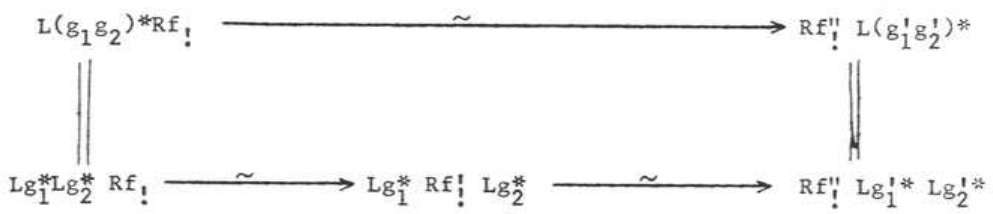
Lemme 5.2.5. Soient des morphismes de schémas annelés par des faisceaux d'anneaux de torsion

$$(S'', \mathcal{A}'') \xrightarrow{g_2} (S', \mathcal{A}') \xrightarrow{g_1} (S, \mathcal{A}) ,$$

et $f : X \longrightarrow S$ un morphisme compactifiable, d'où un diagramme :



On annèle X, X', X" par $f^*\mathcal{A}_0$ , $f'^*\mathcal{A}'$ et $f''^*\mathcal{A}''$ . Alors, le diagramme



est commutatif.

Ce lemme se déduit aussitôt des résultats analogues pour les foncteurs $j_!$ et $Rp_*$ pour p propre. On laisse au lecteur le soin de le moduler.

On résume les énoncés qui précédent en le

Théorème 5.2.6. Le foncteur $Rf_!$ commute aux changements de base.

Variantes 5.2.7. (i) Les foncteurs $f_!$ (pour les faisceaux d'ensembles pointés : 5.1.11) et les foncteurs $R^1f_!$ (pour les faisceaux en groupes : 5.1.12) commutent aux changement de base.

(ii) Les foncteurs $Rf_!$ (5.1.14) commutent aux changements de base.

(iii) Sous les hypothèses (5.2.2), si L est borné et à composantes de tor-dimension finie, les foncteurs $Rf_! : D(X) \longrightarrow D(S)$, commutent aux changements de base.

Le théorème 5.2.6 est essentiellement équivalent à la conjonction des deux corollaires 5.2.8 et 5.2.9 suivants.

Proposition 5.2.8. Soient $f : X \longrightarrow S$ un morphisme compactifiable, et $\mathfrak{F}$ un faisceau de torsion sur X . Pour tout point géométrique s de S, soient $X_s$ la fibre géométrique de X en s et $\mathfrak{F}_s$ le faisceau induit. On a canoniquement

$$(R^q f_!(\mathfrak{F}))_s = H^q_c(X_s, \mathfrak{F}_s) \quad .$$

Corollaire 5.2.8.1. Si les fibres de f sont de dimension $\leq d$, le foncteur $Rf_!$ est de dimension cohomologique $\leq 2d$ (1.2.9) : pour tout faisceau de torsion F, on a $R^i f_! F = 0$ pour $i > 2d$ . Le foncteur $R^{2d} f_!$ est donc exact à droite sur la catégorie des faisceaux de torsion.

On se ramène par changement de base (5.2.8) au cas où S est le spectre d'un corps algébriquement clos. Si alors $\overline{X}$ est un schéma propre sur S contenant X comme ouvert de Zariski dense, $j : X \longrightarrow \overline{X}$ , on a $\dim(\overline{X}) = \dim(X) \leq D$. Pour F faisceau de torsion sur X et $i > 2d$, on a donc, par X 4.3, 5.2

$$H^i_c(X, F) = H^i(\overline{X}, j_! F) = 0 \quad .$$

Proposition 5.2.9. Soient $f : X \longrightarrow S$ un morphisme compactifiable, $\mathcal{A}$ un faisceau d'anneaux de torsion sur S, K un complexe borné supérieurement de $f^*\mathcal{A}$ -modules à gauche et L un complexe borné supérieurement de $\mathcal{A}$ -modules à droite . On a canoniquement

$$L \overset{\mathbf{L}}{\underset{\mathcal{A}}{\otimes}} Rf_!(K) = Rf_!(f^*L \overset{\mathbf{L}}{\underset{f^*\mathcal{A}}{\otimes}} K) \quad .$$

Cette proposition implique formellement le résultat suivant :

Théorème 5.2.10. Soient $f : X \longrightarrow S$ un morphisme compactifiable, $\mathcal{A}_0$ un faisceau d'anneaux de torsion sur S, $K \in D^-(X, f^*\mathcal{A}_0)$ et $d \in \mathbb{Z}$. Si K est de Tor-dimension finie $\leq d$ (4.1.9), alors $Rf_! K$ est de Tor-dimension finie $\leq d$.

Il suffit de vérifier que pour tout faisceau de $\mathcal{A}_0$-modules à droite L sur S, on a

$$H^{-i}(L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} Rf_! K) = 0 \quad \text{pour } i > d \ .$$

D'après 5.2.9 , on sait que

$$H^{-i}(L \overset{L}{\otimes} Rf_! K) = R^{-i}f_!(f^*L \overset{L}{\otimes} K) \ ,$$

de plus, par hypothèse,

$$H^{-i}(f^* L \overset{L}{\otimes} K) = 0 \text{ pour } i > d \ ,$$

et on conclut en remarquant que si un complexe M de faisceaux de modules sur X satisfait à $H^{-i}(M) = 0$ pour $i > d$, alors on a encore $H^{-i}(Rf_! M) = 0$ pour $i > d$ .

Dans le cas particulier des faisceaux d'anneaux constants et noethériens, on a le résultat plus général :

Théorème 5.2.11. Soient $f : X \longrightarrow S$ un morphisme de sites , A un anneau , C son centre et $d \in \mathbb{Z}$. On suppose que

(i) le foncteur $Rf_* : D^+(X,C) \longrightarrow D^+(S,C)$ est de dimension cohomologique finie.

(ii) A est noethérien à droite.

(iii) S a assez de points.

Pour tout complexe $K \in \mathrm{Ob}\ D^-(X,A)$ de faisceaux de A-modules à gauche, si K est de Tor-dimension finie $\leq d$, alors le complexe $Rf_* K \in \mathrm{Ob}\ D^-(S,A)$ est de Tor-dimension $\leq d$ .

Preuve. En vertu de (i), le foncteur $f_*$ est dérivable en des foncteurs

$$Rf_* : D(X,A) \longrightarrow D(S,A)$$

et

$$Rf_* : D(X,C) \longrightarrow D(S,C) \quad .$$

D'après 4.2.8 , il suffit de vérifier que pour tout point s de S, le complexe $(Rf_*K)_s$ de A-modules est de Tor-dimension $\leq d$ ; il suffit pour cela que pour tout A-module à droite L de type fini on ait

$$H^{-i}(L \overset{L}{\otimes} Rf_* K) = 0 \text{ pour } i > d \quad .$$

Raisonnant comme en 5.2.10, on voit qu'il suffit pour cela que la "flèche de changement de base"

$$L \overset{L}{\otimes} Rf_* K \longrightarrow Rf_*(L \overset{L}{\otimes} K) \tag{5.2.11.1}$$

soit un isomorphisme.

Soit L* une résolution de L par des A-modules libres de type fini. Les foncteurs considérés étant way-out à droite, il suffit de prouver que (5.2.11.1) est un isomorphisme après avoir remplacé L par une quelconque composante de $L_*$ , et on est ramené au cas trivial où L est libre de type fini.

Remarques 5.2.12. (i) L'hypothèse (iii) de 5.2.11 est sans doute inutile. (ii) Si on omet l'hypothèse noethérienne sur A, 5.2.11 reste valable lorsque les foncteurs $R^i f_*$ commutent aux limites inductives filtrantes. (iii) L'hypothèse que S soit annelé par un faisceau d'anneaux constant est essentielle. On obtiendrait un contre-exemple en prenant pour S le spectre d'un anneau de valuation discrète strictement local, pour f l'inclusion du point générique $\eta$, pour faisceau d'anneaux $\mathcal{A}$ le faisceau valant $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ au point générique et $\mathbb{Z}/n^2\mathbb{Z}$ au point fermé s ($n > 1$ premier aux caractéristiques résiduelles) et pour faisceau le module $f^*\mathcal{A}$.

## 5.3. Théorème de comparaison et théorème de finitude.

5.3.1. A un schéma X de type fini sur $\mathbb{C}$ sont associés son site étale $X_{et}$, son site transcendant $X_{cl}$ et un morphisme de sites (XI 4)

$$\epsilon : X_{cl} \longrightarrow X_{et} \quad .$$

Si $j : U \longrightarrow X$ est une immersion ouverte, le diagramme commutatif

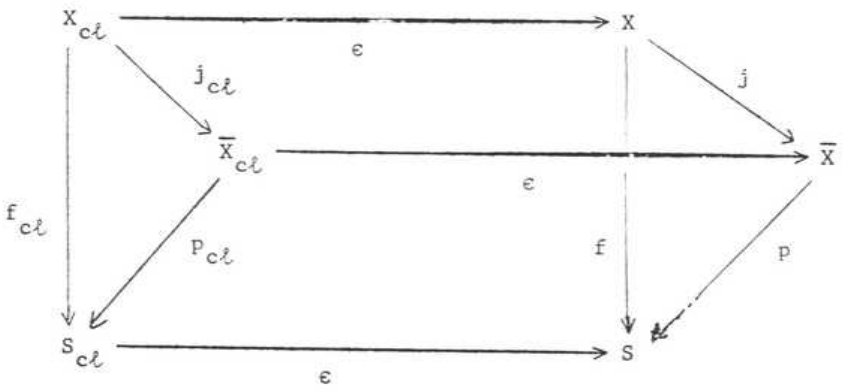
$$\begin{array}{ccc} U_{cl} & \longrightarrow & U_{et} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{cl} & \longrightarrow & X_{et} \end{array}$$

identifie $\widetilde{U_{cl}}$ à l'ouvert de $\widetilde{X_{cl}}$ image réciproque de l'ouvert $U_{\widetilde{et}}$ de $X_{\widetilde{et}}$.

Si $p : Y \longrightarrow X$ est un morphisme propre, l'application continue $p^{an} : Y^{an} \longrightarrow X^{an}$ est propre et séparée. Pour le voir, on se ramène par le lemme de Chow au cas p projectif.

Soit $f : X \longrightarrow S$ un morphisme compactifiable de schémas de type fini sur $\mathbb{C}$ et soit $f = p\,j$ une compactification de $f$ .

(5.3.1.1)




Le foncteur $p_{c\ell *}\, j_{c\ell !}$ n'est autre que le foncteur image directe à support propre $f_{c\ell !}$ (voir VERDIER [3]). Si $S_{c\ell}$, donc $X_{c\ell}$ est séparé, le foncteur $j_{c\ell !}$ transforme faisceaux mous sur $X_{c\ell}$ en faisceau mous sur $\overline{X}_{c\ell}$ [TF II 3.5.5]. La question étant locale sur S, il transforme en tout cas faisceaux flasques sur $X_{c\ell}$ en faisceaux sur $X_{c\ell}$ acycliques pour le foncteur $p_{cl*}$ . On a donc (cf. VERDIER [3])

$$Rf_{c\ell} = Rp_{cl*}\; j_{c\ell !} \quad .$$

5.3.2. D'après 5.1.2, on dispose d'un isomorphisme de changement de base, entre foncteurs de $D(X)$ dans $D(\overline{X}_{c\ell})$

$$\varepsilon^* j_! \xrightarrow{\sim} j_{c\ell !}\, \varepsilon^* \quad .$$

D'après 4.2.12 ou 4.1.5, on dispose d'un morphisme de changement de base entre foncteurs de $D^+(\overline{X})$ dans $D^+(S_{cl})$ :

$$\varepsilon^* Rp_* \longrightarrow Rp_{cl*}\, \varepsilon^* \quad .$$

Par composition, on en déduit un morphisme de changement de base, entre foncteurs de $D^+_{tors}(X)$ dans $D^+_{tors}(S_{cl})$ (5.1.13)

(5.3.2.1) $$\varepsilon^* Rf_! \longrightarrow Rf_{cl!}\, \varepsilon^* \quad .$$

On vérifie comme en 5.2.3 qu'il ne dépend pas de la compactification choisie de f ; il vérifie une formule de transitivité du type 5.2.4.

Théorème 5.3.3. (Théorème de comparaison). Le morphisme (5.3.2.1) est un isomorphisme.

Par construction, il suffit de traiter le cas où f est propre. Les foncteurs considérés sont triangulés et "way-out" [RD I 7]. Il suffit donc de traiter le cas où K est réduit à un faisceau de torsion placé en degré 0, et on conclut par XVI 4.1 (i).

Variantes 5.3.4. (i) Si $\mathcal{A}$ est un faisceau d'anneaux de torsion sur $S_{et}$, on obtient de même un isomorphisme (5.3.2.1) entre foncteurs de $D(X, f^*\mathcal{A})$ dans $D(S, \varepsilon^*\mathcal{A})$.

(ii) En bas degré, on trouve les variantes habituelles pour les faisceaux d'ensembles pointés et les faisceaux en groupes Ind-finis.

Corollaire 5.3.5. Soient X un schéma séparé de type fini sur $\mathbb{C}$, qui puisse se compactifier en un schéma propre sur $\mathbb{C}$, et F un faisceau de torsion sur X . On a alors

$$H^q_!(X,F) \xrightarrow{\sim} H^q_c(X_{cl}, \varepsilon^*F) \quad .$$

Théorème 5.3.6. Soient $f : X \longrightarrow S$ un morphisme compactifiable de présentation finie et A un anneau de torsion noethérien à gauche. Le foncteur $Rf_! : D(X,A) \longrightarrow D(S,A)$ transforme complexes à cohomologie constructible en complexes à cohomologie constructible.

L'assertion est locale sur S, qu'on peut supposer affine. Par passage à la limite, on se ramène au cas S noethérien. Les complexes à cohomologie constructible forment une sous-catégorie triangulée de D(S,A). Le foncteur $Rf_!$ étant "way-out", on se ramène à vérifier que si $\mathfrak{F}$ est un faisceau constructible de A-modules, les faisceaux $R^qf_!\mathfrak{F}$ sont constructibles. Soit f = pj, avec p propre et j une immersion ouverte. On a $R^qf_!\mathfrak{F} = R^qp_*(j_!\mathfrak{F})$. Le faisceau $j_!\mathfrak{F}$ est constructible et on conclut par XIV 1.1.

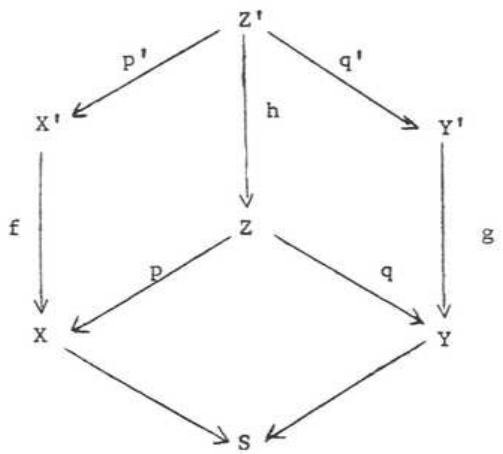
5.3.7. En bas degrés, on dispose d'énoncés analogues pour les images directes à support propre d'un faisceau constructible d'ensembles ou de groupes Ind-finis.

Corollaire 5.3.8. Soient X un schéma séparé de type fini sur un corps séparablement clos k et $\mathfrak{F}$ un faisceau constructible de torsion sur X . On suppose que X puisse se compactifier en un schéma propre sur k . Alors, les groupes $H^q_c(X,\mathfrak{F})$ sont finis.

5.4. Formule de Künneth.

5.4.1. Soit un diagramme commutatif (0.11) de sites

(5.4.1.1)




On suppose S annelé par un faisceau d'anneaux $\mathcal{A}_0$, de centre $\mathcal{C}$ ; on désignera encore par $\mathcal{A}_0$ et $\mathcal{C}$ les images réciproques de ces faisceaux sur les sites de (5.4.1.1).

Si K est un faisceau de $\mathcal{A}_0$-modules à droite sur X et L un faisceau de $\mathcal{A}_0$-modules à gauche sur Y, on pose

$$K \underset{\mathcal{A}_0}{\boxtimes} L = p^* \underset{\mathcal{A}_0}{\otimes} q^* L$$

(produit tensoriel externe). De même pour K (resp. L) sur X' (resp. Y'). Soit alors K un faisceau de $\mathcal{A}_0$-modules à droite sur X' et L un faisceau de $\mathcal{A}_0$-modules à gauche sur Y'. Les flèches de changement de base (XII 4.1) définissent

(5.4.1.2)
$$\begin{cases} p^* f_* K \longrightarrow h_* p'^* K \\ q^* g_* L \longrightarrow h_* q'^* L \end{cases},$$

d'où, par produit tensoriel, une flèche

(5.4.1.3) $$f_*K \boxtimes_{\mathcal{A}} g_*L \longrightarrow h_*p'^*K \otimes_{\mathcal{A}} h_*q'^*L \longrightarrow h_*(K \boxtimes_{\mathcal{A}} L) \quad .$$

Supposons que les foncteurs

$$Rf_* : D^+(X', \mathcal{A}^\circ) \longrightarrow D^+(X, \mathcal{A}^\circ)$$

$$Rg_* : D^+(Y', \mathcal{A}) \longrightarrow D^+(Y, \mathcal{A})$$

$$Rh_* : D^+(Z', \mathcal{C}) \longrightarrow D^+(Z, \mathcal{C})$$

soient de dimension cohomologique finie, et se prolongent donc aux catégories dérivées entières. Il s'impose alors, pour $K \in \mathrm{Ob}\, D^-(X', \mathcal{A}^\circ)$ et $L \in \mathrm{Ob}\, D^-(Y', \mathcal{A})$, de définir une <u>flèche de Künneth</u>

(5.4.1.4) $$Rf_* K \overset{\mathbf{L}}{\boxtimes}_{\mathcal{A}} Rg_*L \longrightarrow Rh_*(K \overset{\mathbf{L}}{\boxtimes}_{\mathcal{A}} L) \quad .$$

On ne la définira que si les sites considérés ont assez de points, de façon à pouvoir utiliser 4.2.1C et 4.2.8 . En vertu de 4.2.10, il suffit de la définir pour un couple (K,L) déployé à gauche pour le foncteur $(K,L) \longmapsto K \boxtimes_{\mathcal{A}} L$, K et L étant déployés à droite pour les foncteurs $f_*$ et $g_*$ et bornés supérieurement.

Soient $K_1$ une résolution plate de $f_*K$, $L_1$ une résolution plate de $g_*L$ et $u : K \overset{\mathbf{L}}{\boxtimes} L \longrightarrow M$ une résolution de $K \overset{\mathbf{L}}{\boxtimes} L$, déployée pour le foncteur $Rh_*$ . On dispose de morphismes

$$Rf_*K \overset{\mathbf{L}}{\boxtimes}_{\mathcal{A}} Rg_*L \xrightarrow{\sim} K_1 \boxtimes_{\mathcal{A}} L_1 \longrightarrow f_*K \boxtimes_{\mathcal{A}} g_*L \longrightarrow$$

$$\longrightarrow h_*(K \boxtimes_{\mathcal{A}} L) \longrightarrow h_*M \xrightarrow{\sim} Rh_*(K \overset{\mathbf{L}}{\boxtimes}_{\mathcal{A}} L)$$

et on définit (5.4.1.4) comme leur composé.

Cette flèche a la propriété caractéristique suivante, de démonstration toute analogue à celle de 4.2.13 :

5.4.1.5. Soient $K \in \mathrm{Ob}\ C^-(X', \mathcal{A}^\circ)$ et $L \in \mathrm{Ob}\ C^-(Y', \mathcal{A}_b)$. Posons $K_1 = f_*K$, $L_1 = g_*K$, et $M_2 = K \boxtimes L$ . Le diagramme suivant est alors commutatif

$$\begin{array}{ccccc} Rf_*K \overset{\mathbf{L}}{\boxtimes}_{\mathcal{A}_b} Rg_* L & & \longrightarrow & & Rh_*(K \overset{\mathbf{L}}{\boxtimes}_{\mathcal{A}_b} L) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K_1 \overset{\mathbf{L}}{\boxtimes}_{\mathcal{A}_b} L_k & \longrightarrow & K_1 \boxtimes L_1 & \longrightarrow & h_* M_2 \longrightarrow Rh_* M_2 \end{array} .$$

On a une commutativité analogue (cf. 4.2.13) en partant plûtôt de morphismes $K_1 \longrightarrow f_*K$, $L_1 \longrightarrow g_*K$ et $K \boxtimes L \longrightarrow M_2$ .

La commutativité 5.4.1.5 rend en principe aisée la vérification des propriétés de compatibilité du morphisme de Künneth.

5.4.2. Soient un diagramme commutatif (5.4.1.1) de schémas et $\mathcal{A}$ un faisceau de torsion sur S. Supposons que f et g sont compactifiables (3.2.1), que $Z = X \times_S Y$ et que $Z' = X' \times_S Y'$. Factorisons f et g en un morphisme propre et une immersion ouverte ; on obtient un diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} & X' & \xrightarrow{p'} & Z' & \xleftarrow{q'} & Y' & \\ & \downarrow{\scriptstyle j_1} & & \downarrow{\scriptstyle j_3} & & \downarrow{\scriptstyle j_2} & \\ f & \overline{X'} & \xrightarrow{\overline{p}} & \overline{Z'} & \xleftarrow{\overline{q}} & \overline{Y'} & g \\ & \downarrow{\scriptstyle \overline{f}} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{h}} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{g}} & \\ & X & \xleftarrow{p} & Z & \xrightarrow{q} & Y & \end{array}$$

dans lequel on a posé $\overline{Z}' = \overline{X}' \times_S \overline{Y}'$ . On dispose d'un isomorphisme de nature triviale, pour K et L complexes sur X' et Y'

$$(5.4.2.1) \qquad j_{3!}\,(K \boxtimes_{\mathcal{A}_\ell} L) \xrightarrow{\sim} j_{1!}\,K \boxtimes_{\mathcal{A}_\ell} j_{2!}\,L \quad .$$

En "composant" l'inverse de cet isomorphisme et la flèche de Künneth (5.4.1.4) relative à $(\overline{f},\overline{g},\overline{h},j_{1!}K,j_{2!}L)$, on obtient, pour $K \in \mathrm{Ob}\ D^-(X',\mathcal{A}_\ell)$ et $L \in \mathrm{Ob}\ D^-(Y',\mathcal{A}_\ell)$, une flèche de Künneth

$$(5.4.2.2) \qquad Rf_!\,K \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} Rg_!L \longrightarrow Rh_!(K \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} L) \quad ,$$

dont on vérifie qu'elle ne dépend pas des compactifications choisies.

Théorème 5.4.3. Sous les hypothèses de 5.4.2, la flèche de Künneth en cohomologie à supports propres (5.4.2.2) est un isomorphisme.

Preuve. (a) Par construction, il suffit de vérifier ce résultat lorsque f et g (donc aussi h) sont propres.

(b) Soit un diagramme commutatif

$$(5.4.3.1) \qquad \begin{array}{ccccc} X_1 & \xrightarrow{p_1} & S_1 & \xrightarrow{q_1} & Y_1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{p} & S & \xrightarrow{q} & Y \end{array} \quad ,$$

et soient $Z_1 = X_1 \underset{S_1}{\times} Y_1$, $X_1' = X' \underset{X}{\times} X_1$, $Y_1' = Y' \underset{Y}{\times} Y_1$ et $Z_1' = X_1' \underset{S_1}{\times} Y_1' = Z' \underset{Z_1}{\times} Z_1$, de sorte que l'on dispose d'un morphisme de diagrammes (5.4.1),

$$(S_1,X_1,Y_1,Z_1,X_1',Y_1',Z_1') \longrightarrow (S,X,Y,Z,X',Y',Z')$$

dont les flèches seront uniformément désignées par C .

On admettra que :

Lemme 5.4.3.2. Le diagramme suivant est commutatif :

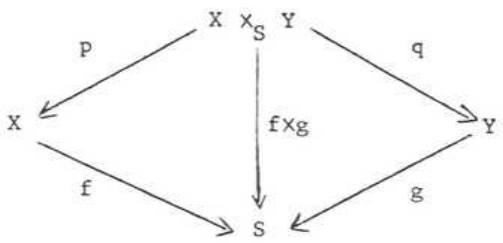
$$\begin{array}{ccccc} C^*(Rf_!\, K \overset{L}{\boxtimes}_{\Lambda_0} Rg_!\, L) & = & C^*Rf_!K \overset{L}{\boxtimes}_{\Lambda_0} C^*\, Rg_!\, L & \xrightarrow{\sim} & Rf_{1!}C^*K \overset{L}{\boxtimes}_{\Lambda_0} Rg_{1!}\, C^*\, L \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ C^*(Rh_!(K \overset{L}{\boxtimes}_{\Lambda_0} L)) & \xrightarrow{\sim} & Rh_!(C^*(K \overset{L}{\boxtimes}_{\Lambda_0} L)) & = & Rh_!(C^*K \overset{L}{\boxtimes}_{\Lambda_0} C^*\, L) \end{array} .$$

Dans ce diagramme, les flèches horizontales sont des flèches de changement de base et les flèches verticales les flèches de Künneth pour les deux diagrammes (5.4.1.1) considérés.

Pour prouver 5.4.3 , il suffit de prouver que la flèche de Künneth est un isomorphisme en tout point géométrique de Z . D'après 5.4.3.2, il suffit de le vérifier après un quelconque changement de base (5.4.3.1) tel que $S_1$ soit le spectre d'un corps algébriquement clos et $p_1$, $q_1$ des isomorphismes.

Après un tel changement de base, le diagramme (5.4.1.1) se réduit à un diagramme

(5.4.3.3)




et la flèche de Künneth à une flèche (5.4.4.1)

(5.4.3.4) $\quad k : Rf_! K \overset{\mathbb{L}}{\otimes} Rg_! L \longrightarrow R(f\times g)_!(K \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} L)$ .

(c) Soit un diagramme (5.4.3.3) dans lesquel f et g sont propres. On admettra que :

Lemme 5.4.3.5. Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} Rf_!K \overset{L}{\underset{\mathcal{A}}{\otimes}} Rg_!L & \longrightarrow & R(f\times g)_!(K \overset{L}{\underset{\mathcal{A}}{\boxtimes}} L) \\ \downarrow & & \| \\ Rf_!(K \overset{L}{\underset{\mathcal{A}}{\otimes}} f^*Rg_!L) & \longrightarrow & Rf_! Rp_!(p^*K \otimes q^*L) \end{array} .$$

Dans ce diagramme, les flèches horizontales sont les flèches de Künneth et la flèche de changement de base. Les flèches verticales sont une flèche de changement de base par f et un isomorphisme de transitivité. Le théorème 5.5.9 est conséquence de ce lemme et de 4.3.1.

Le lecteur courageux pourra vérifier que ce lemme reste valable si f et g ne sont pas nécessairement propres.

5.4.4. Soient S un schéma, $f_i : X_i' \longrightarrow X_i$ $(i\in I)$ une famille finie de morphismes compactifiables de S-schémas, X le produit sur S des $X_i$, X' le produit sur S des $X_i'$ et $f : X' \longrightarrow X$ le produit des $f_i$. Si S est annelé par $\mathcal{A}$, comme en 5.4.1, et si on annèle les $X_i$ et $X_i'$ par l'image réciproque de $\mathcal{A}$, on a plus généralement un isomorphisme

(5.4.4.1) $\quad \overset{\mathbb{L}}{\underset{i\in I}{\boxtimes}} Rf_{i!}(K_i) \xrightarrow{\sim} Rf_!(\overset{\mathbb{L}}{\underset{i\in I}{\boxtimes}} K_i)$ ,

pour $K_i \in \mathrm{Ob}\, D^-(X_i', \mathcal{A})$. La définition de cet isomorphisme, ainsi que celle des deux membres de (5.4.4.1), ne nécessite pas le choix d'un ordre total sur I .

5.5. Cohomologie des puissances symétriques.

Le résultat principal de ce n° est le théorème 5.5.21, donnant en particulier la cohomologie à supports propres d'une puissance symétrique d'un schéma X sur un corps k algébriquement clos, pour des coefficients convenables (par exemple $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) en terme de la cohomologie à supports propres de X . L'analogue de ce théorème en topologie semi-simpliciale est bien connu, tout au moins pour la cohomologie à coefficients dans un anneau commutatif A ; il se vérifie au niveau des cochaines semi-simpliciales. En effet, si $X_*$ est un ensemble semi-simplicial, il existe une bijection continue canonique de la réalisation géométrique de la puissance symétrique n.ème $(X_*)^n/G_n$ de $X_*$ dans la puissance symétrique $n^{\text{ième}}$ de la réalisation géométrique de $X_*$ , et cette bijection induit un isomorphisme sur la cohomologie.

5.5.1. Rappelons quelques propriétés (dues à D. LAZARD) des modules plats, quelques propriétés (dues à ROBY) des foncteurs $TS^n$ et $T^n$ , et quelques propriétés (dues à DOLD et PUPPE) des foncteurs dérivés de foncteurs non additifs.

5.5.1.1. Tout module plat sur un anneau A est limite inductive filtrante de modules libres de type fini (LAZARD [1, I 1.2]). Ce résultat implique les suivants :

5.5.1.2. Le foncteur $\varinjlim$ est une équivalence de la catégorie des Ind-objets (I 8.1) de la catégorie des A-modules libres de type fini (resp. projectifs de type fini) avec la catégorie des A-modules plats.

5.5.1.3. Si A et B sont deux anneaux, tout foncteur T : Mod(A) $\longrightarrow$ Mod(B) qui transforme module libre de type fini en module plat et commute aux limites inductives filtrantes, transforme module plat en module plat (LAZARD [1, I 1.5]).

5.5.1.4. Toute suite exacte de A-modules, avec L" plat,

$$0 \longrightarrow L' \longrightarrow L \longrightarrow L'' \longrightarrow 0$$

est limite inductive de suites exactes scindées (LAZARD [1, I 2.3]).

5.5.2. Soient A un anneau commutatif et M un A-module.

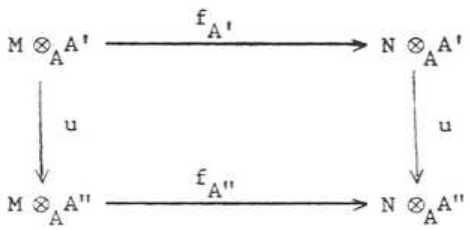
5.5.2.1. Pour tout entier n, on désigne par $TS^n(M)$ (ou $TS^n_A(M)$) le module des tenseurs symétriques de degré n de M . Désignant par $\mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique de degré n, on a par définition

$$TS^n(M) = (\overset{n}{\otimes} M)^{\mathfrak{S}_n} .$$

Si B est une A-algèbre, alors $TS^n(B)$ est une sous-algébre de $\overset{n}{\otimes} B$ . Si de plus B est commutatif, alors $Spec(TS^n(B))$ est par définition la puissance symétrique $n^{ième}$ de Spec(B) sur Spec(A) ;

$$Spec(TS^n_A(B)) = Sym^n_{Spec(A)}(Spec(B) \underset{dfn}{=} (Spec(B)/Spec(A))^n/\mathfrak{S}_n .$$

5.5.2.2. Rappelons (ROBY [1, I 1 pg.226]) qu'une <u>loi polynôme</u> f d'un A-module M dans un A-module N est la donnée, pour toute A-algèbre commutative A', d'une application $f_{A'} : M \otimes_A A' \longrightarrow N \otimes_A A'$ , ces applications étant telles que pout tout homomorphisme de A-algèbres $u : A' \longrightarrow A''$, le diagramme




soit commutatif.

Une loi polynôme f est dite homogène de degré n (ROBY [1, I 1 pg.226]) si, pour tout $a' \in A'$, on a identiquement

$$f_{A'}(a'\,x) = a'^{n} f_{A'}(x) \quad .$$

Une telle loi polynôme s'appellera aussi application $n^{\text{ique}}$ (quadratique, cubique, ...) ; on notera leur ensemble

$$\mathrm{Hom}\ n^{\text{ique}}\ (M,N) \quad .$$

Plus généralement, si $(M_i)_{i\in I}$ est une famille finie de A-modules et $\underline{n} = (n_i)_{i\in I}$ une famille d'entiers, une loi polynôme multihomogène de multidegré $\underline{n}$ des modules $M_i$ dans N est une loi polynôme de $\Sigma M_i$ dans N vérifiant identiquement, pour $a_i \in A'$,

$$f_{A'}((a_i x_i)_{i\in I}) = \prod_{i\in I} a_i^{n_i} \cdot f_{A'}((x_i)_{i\in I}) \quad .$$

On notera $\mathrm{Hom}\ \underline{n}^{\text{ique}}((M_i),N)$ l'ensemble de ces lois polynômes.

5.5.2.3. Pour tout module M, le foncteur covariant des A-modules dans les ensembles

$$N \longmapsto \mathrm{Hom}\ n^{\text{ique}}(M,N)$$

est représentable par un A-module $\Gamma^n(M)$ (ou $\Gamma^n_A(M)$), muni d'une

application $n^{ique}$ universelle $\gamma^n : M \longrightarrow \Gamma^n(M)$ (ROBY [1, IV 1 pg.226]).

Etant donné $(M_i)_{i\in I}$ et $\underline{n}$ comme en 5.5.2.2, le foncteur covariant

$$N \longmapsto \mathrm{Hom}_{\underline{n}^{ique}}((M_i),N)$$

est représenté par le module $\bigotimes_{i\in I} \Gamma^{n_i}(M_i)$, muni de la loi polynôme multihomogène (de multidegré $\underline{n}$) universelle $(m_i) \longmapsto \bigotimes_{i\in I} \gamma^{n_i}(m_i)$ .

5.5.2.4. Les foncteurs $TS^n$ et $\Gamma^n$ commutent aux limites indcutives filtrantes (pour le second, (ROBY [1, IV 6 pg.275]). Ils transforment modules libres en modules libres, donc modules plats en modules plats (5.5.1.2).

5.5.2.5. L'application $n^{ique}$ de M dans $TS^n(M)$ donnée par $m \longmapsto \overset{n}{\otimes} m$ définit une application $\varphi$, dite canonique, de $\Gamma^n(M)$ dans $TS^n(M)$, vérifiant

$$\varphi(\gamma^n(m)) = \overset{n}{\otimes} m \quad .$$

Cette application est un isomorphisme pour M libre de type fini (ROBY [1,IV pg.272]) donc aussi pour M plat (5.5.2.4 et 5.5.1.1).

Soit M un A-module et P une suite exacte

$$P : P_1 \xrightarrow{d} P_o \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0 \quad .$$

Soit $P_1' = P_1 \times P_o$, et soient $j_o$ et $j_1$ les morphismes de $P_1'$ dans $P_o$ de coordonnées (d,Id) et (0,Id). La suite

$$\Gamma^n(P_1') \underset{\Gamma^n(j_1)}{\overset{\Gamma^n(j_o)}{\rightrightarrows}} \Gamma^n(P_o) \longrightarrow \Gamma^n(M) \longrightarrow 0$$

est alors exacte (ROBY [1 pg.284]). Pour P une présentation plate de

M, on en déduit une description du foncteur $\Gamma^n$ via le foncteur $TS^n$

(5.5.2.5.1) $\quad TS^n(P_1') \rightrightarrows TS^n(P_0) \longrightarrow \Gamma^n(M) \longrightarrow 0$ .

5.5.2.6. Si $M = M' \oplus M''$, l'application $n^{ique}$

$$m \longmapsto (\gamma^{n'}m \otimes \gamma^{n''}m)_{n'+n''=n}$$

définit un isomorphisme, dit canonique (ROBY [1, III 4])

(5.5.2.6.1) $\quad \Gamma^n(M) \xrightarrow{\sim} \sum_{n'+n''=n} \Gamma^{n'}(M) \otimes \Gamma^{n''}(M)$ .

Si $\Sigma$ est une suite exacte

$$\Sigma : 0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0 \quad ,$$

le module $\Gamma^n(M)$ est muni d'une filtration canonique (décroissante) et de morphismes

(5.5.2.6.2) $\quad \Gamma^i(M') \otimes \Gamma^{n-i}(M') \longrightarrow Gr^i(\Gamma^n(M))$ .

Ces données sont caractérisées par les propriétés d'être fonctorielles en $\Sigma$ et de vérifier une compatibilité évidente avec (5.5.2.6.1) pour $\Sigma$ scindable. Les flèches (5.5.2.6.2) sont des isomorphismes pour $\Sigma$ scindable, donc aussi pour M' plat (5.5.1.4).

5.5.2.7. Le foncteur $\Gamma^n$ commute à l'extension des scalaires (ROBY [1, III 3 pg.262]) (la propriété analogue pour $TS^n$ est en général fausse).

5.5.2.8. Si $u : M_1 \times M_2 \longrightarrow N$ est une application bilinéaire, alors $\gamma^n \circ u$ est une loi polynôme bihomogène de bidegré (n,n) et définit donc (5.5.2.3) $\quad u^n : \Gamma^n(M_1) \otimes \Gamma^n(M_2) \longrightarrow \Gamma^n(N)$ vérifiant $u^n(\gamma^n x \otimes \gamma^n y) = \gamma^n u(x,y)$.

En particulier, si B est une A-algèbre, le produit : $B \times B \longrightarrow B$ induit un produit sur $\Gamma^n(B)$. Ce produit fait de $\Gamma^n(B)$ une A-algèbre, et l'application canonique de $\Gamma^n(B)$ dans $TS^n(B)$ est un homomorphisme d'algèbres.

5.5.3. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. On désignera par $\mathrm{ssimpl}^+(\mathcal{A})$ la catégorie des objets co-semi-simpliciaux de $\mathcal{A}$, par $C^{\geq 0}(\mathcal{A})$ la catégorie des complexes différentiels K avec $K^i = 0$ pour $i < 0$, et par $K^{\geq 0}(\mathcal{A})$ l'image de $C^{\geq 0}(\mathcal{A})$ dans $K(\mathcal{A})$. Si $K \in \mathrm{Ob}\ \mathrm{ssimpl}^+(\mathcal{A})$, le complexe normalisé associé $N(K) \in \mathrm{Ob}\ C^{\geq 0}(\mathcal{A})$ est défini par

(5.5.3.1)
$$\begin{cases} N(K)^n = \text{intersection des noyaux des opérateurs de dégénérescence de } K^n \text{ dans } K^{n-1} \\ d = \Sigma(-1)^i \partial_i \end{cases} .$$

Si on désigne encore par K le complexe de composantes $K^n$, et de différentielle $d = \Sigma(-1)^i \partial_i$, alors N(K) est un sous-complexe facteur direct dans K, et K/N(K) est homotope à zéro.

D'après **DOLD-PUPPE** [1], le foncteur N est une équivalence de catégories

$$N : \mathrm{ssimpl}^+(\mathcal{A}) \longrightarrow C^{\geq 0}(\mathcal{A}) \quad .$$

Cette équivalence et son inverse transforment morphismes homotopes en morphismes homotopes. De plus, pour tout $K \in \mathrm{Ob}\ \mathrm{ssimpl}^+(\mathcal{A})$, $K^n$ est somme de copies de $N(K)^i$ $(i \leq n)$ ; si $\mathbb{P}$ est une propriété d'objets de $\mathcal{A}$, stable par sommes finies et facteurs directs, on en déduit que les $K^i$ ont la propriété $\mathbb{P}$ pour $i \leq n$ si et seulement si les $N(K)^i$ ont cette propriété pour $i \leq n$ .

L'équivalence N est utilisée par DOLD et PUPPE pour étendre tout foncteur (non nécessairement additif) $T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ dans une catégorie quelconque $\mathcal{B}$ en un foncteur $C^{\geq 0}(T)$ (ou simplement T) de $C^{\geq 0}(\mathcal{A})$ dans $C^{\geq 0}(\mathcal{B})$

(5.5.3.2) $$C^{\geq 0}(T) = N\ T\ N^{-1} \quad .$$

Le foncteur $C^{\geq 0}(T)$ passe au quotient pour définir

(5.5.3.3) $$T \text{ ou } K^{\geq 0}(T) : K^{\geq 0}(\mathcal{A}) \longrightarrow K^{\geq 0}(\mathcal{B}) \quad .$$

5.5.3.4. Si T est <u>de degré</u> $\leq n$, i.e. si le $(n+1)^{\text{ième}}$ "cross effect" est nul (DOLD-PUPPE [1, 4.18 pg.232]) alors, pour tout $K \in \text{Ob}\ C^{\geq 0}(\mathcal{A})$ tel que $K^i = 0$ pour $i > m$, on a $[T(K)]^i = 0$ pour $i > nm$ (DOLD-PUPPE [1, 4.2.3 pg.233]).

5.5.3.5. En particulier, si T est un foncteur de degré fini de la catégorie des A-modules dans celle des B-modules, qui transforme objet plat en objet plat, alors un complexe plat borné a pour image un complexe plat borné.

<u>Lemme</u> 5.5.4. <u>Soit</u> $\mathcal{A}$ <u>une catégorie abélienne</u>.

(i) <u>Les quasi-isomorphismes dans</u> $K^{\geq 0}(\mathcal{A})$ <u>permettent un calcul des fractions à gauche et à droite</u>.

(ii) <u>Le foncteur évident est une équivalence entre la catégorie déduite de</u> $K^{\geq 0}(\mathcal{A})$ <u>en inversant les quasi-isomorphismes et la catégorie</u> $D^{\geq 0}(\mathcal{A})$.

Le foncteur $\tau_{\geq 0} : C(\mathcal{A}_b) \longrightarrow C^{\geq 0}(\mathcal{A}_b)$ (1.1.13) passe au quotient pour définir un foncteur $\tau_{\geq 0} : K(\mathcal{A}_b) \longrightarrow K^{\geq 0}(\mathcal{A}_b)$, adjoint à gauche à l'inclusion de $K^{\geq 0}(\mathcal{A}_b)$ dans $\mathcal{A}_b$. Le foncteur $\tau_{\geq 0}$ transforme quasi-isomorphismes en quasi-isomorphismes, et la flèche d'adjonction $X \longrightarrow \tau_{\geq 0}(X)$ est un quasi-isomorphisme si et seulement si $H^i(X) = 0$ pour $i < 0$. Le lemme 5.5.4 résulte donc de VERDIER [CD] et des points (i) et (ii) du lemme suivant, dont la démonstration est laissée au lecteur :

Lemme 5.5.4.1. Soient K une catégorie, K' une sous-catégorie pleine, S un ensemble de morphismes de K égal à l'image inverse de l'ensemble des isomorphismes de $K(S^{-1})$ (cf. [GAB.ZIS 1, chap 1]) et S' sa trace dans K'. On suppose que l'inclusion i de K' dans K admet un adjoint à gauche $\tau$, et que $\tau(S) \subset S'$.

(i) Le foncteur évident de $K'(S'^{-1})$ dans $K(S^{-1})$ est pleinement fidèle, et admet $\tau$ pour adjoint à gauche.

(ii) Si $K(S^{-1})$ peut se calculer par calcul de fractions à gauche (resp. à droite), alors $K'(S'^{-1})$ a la même propriété.

Si l'inclusion i n'a pas nécessairement d'adjoint à gauche, et si $\tau$ désigne le foncteur non partant défini adjoint à gauche à i, on a :

(iii) Si $K(S^{-1})$ peut se calculer par calcul de fractions à gauche (resp. à droite) et si pour tout $u \in S$, de but (resp. de source) dans K', $\tau(u)$ est défini et dans S', alors $K'(S'^{-1})$ admet un calcul de fractions à gauche (resp. à droite) et le foncteur $K'(S'^{-1}) \longrightarrow K(S^{-1})$ est pleinement fidèle.

5.5.5. Soit $T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un foncteur entre catégories abéliennes. Comme en 1.2.1, on définit les dérivés de T

$$LT : D^{\geq 0}(\mathcal{A}) \longrightarrow Pro(D^{\geq 0}(\mathcal{B}))$$

$$RT : D^{\geq 0}(\mathcal{A}) \longrightarrow Ind(D^{\geq 0}(\mathcal{B}))$$

par les formules

$$LT(K) = \text{"}\varprojlim\text{"}_{s:K' \to K} T(K')$$

$$RT(K) = \text{"}\varinjlim\text{"}_{s:K \to K'} T(K') ,$$

où s parcourt la catégorie filtrante des quasi-isomorphismes de but (resp. de source) K .

On dit que T est dérivable à gauche (resp. à droite) en K si LT(K) (RT(K)) est représentable. On dit que K est déployé à gauche (resp. à droite) pour T (ou, par abus de langage, déployé pour LT (resp. RT)) si la flèche canonique suivante est un isomorphisme :

$$LT\,K \xrightarrow{\sim} TK \quad (\text{resp. } TK \xrightarrow{\sim} RT\,K) \quad .$$

Proposition 5.5.6. Soit F un foncteur de la catégorie des modules sur un anneau A dans une catégorie abélienne $\mathcal{B}$ . Supposons que les limites inductives filtrantes dans $\mathcal{B}$ soient représentables et soient exactes, et que F commute aux limites inductives filtrantes. Alors tout complexe borné $M^{\cdot} \in Ob\, K^{\geq 0}(A)$ de modules plats est déployé pour LF .

La proposition résulte immédiatement des définitions, du lemme suivant, qui sera prouvé en 5.5.6.4, et du fait que les quasi-isomorphismes $u : N^{\cdot} \longrightarrow M^{\cdot}$, avec $N^{\cdot} \in B^{b,\geq 0}(A)$ à composantes plates, forment un ensemble cofinal dans la catégorie des quasi-isomorphismes de but $M^{\cdot}$ .

Lemme 5.5.6.1. Soit $u : N^{\cdot} \longrightarrow M^{\cdot}$ un quasi-isomorphisme entre complexes plats, objets de $C^{b,\geq 0}(A)$. Alors, $F(u)$ est un quasi-isomorphisme.

Lemme 5.5.6.2. Soient $\mathcal{A}$ une catégorie additive et d un intervalle borné supérieurement de $\mathbb{Z}$ . On désigne par $C^{d}$ (resp. $C^{d,b}$, resp. $K^{d}$, resp. $K^{d,b}$) la catégorie des complexes nuls en degrés $i \not\leq d$ (resp. et bornés, resp. à homotopie près). On a une équivalence

$$\underline{\ell} \ : \ \mathrm{Ind}(C^{d,b}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\approx} C^{d}(\mathrm{Ind}\ \mathcal{A}) \quad ;$$

l'inverse de cette équivalence induit un foncteur

$$\underline{\ell}' \ : \ K^{d}(\mathrm{Ind}\ \mathcal{A}) \longrightarrow \mathrm{Ind}(K^{d,b}(\mathcal{A})) \quad .$$

A) Prouvons que $\underline{\ell}$ est pleinement fidèle. Soit donc K un complexe borné d'objets de $\mathcal{A}$ et $L = \text{"}\varinjlim\text{"}\ L_{\alpha}$ un Ind-complexe. On a

$$\mathrm{Hom}(K,L) \overset{\text{dfn}}{=} \varinjlim \mathrm{Hom}(K,L_{\alpha}) = \varinjlim Z^{0}(\mathrm{Hom}^{\cdot}(K,L_{\alpha})) \simeq Z^{0} \varinjlim_{\alpha} \mathrm{Hom}^{\cdot}(K,L_{\alpha})$$

$$\xrightarrow{\sim} Z^{0}\ \mathrm{Hom}^{\cdot}(K,\underline{\ell}L) = \mathrm{Hom}(K,\underline{\ell}L) \quad ,$$

l'avant-dernièr isomorphisme provenant du fait que K est fini, de sorte que la $\varinjlim$ commute au passage du double au simple complexe. Ceci prouve l'assertion.

B) On laisse au lecteur le soin (assez fastidieux) de vérifier que $\underline{\ell}$ est essentiellement surjectif en construisant, de gauche à droite, à partir d'un degré arbitrairement choisi, "suffisamment" de complexes bornés s'envoyant dans un complexe borné **supérieurement** de Ind-objets K ; et de développer de même le point suivant :

C) Si $\ell f : \ell \varinjlim K_\alpha \longrightarrow \ell \varinjlim L_\beta$ est homotope à zéro : $f = d H + H d$, alors, pour tout $\alpha$, H se relève en $H^i_\alpha : K^i_\alpha \longrightarrow L^i_{\beta(\alpha)}$ qui, pour $\beta$ assez grand, définit une homotopie à zéro de $f_\alpha : K_\alpha \longrightarrow L_{\beta(\alpha)}$ .

5.5.6.3. Soient A un anneau, d un intervalle borné supérieurement de $\mathbb{Z}$, P(A) la catégorie des A-modules projectifs de type fini, $P\ell(A)$ la catégorie des A-modules plats. Désignons par $D^{\mathrm{Tor}\subset d}(A)$ l'image de $C^d(P\ell(A))$ dans D(A) et par $D^{\mathrm{parf}\subset d}(A)$ l'image de $C^{d,b}(P(A))$ dans D(A). D'après 5.5.1.2, on a $P\ell(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}\, P(A)$. On a par ailleurs $K^{d,b}(P(A)) \xrightarrow{\sim} D^{\mathrm{parf}\subset d}(A)$. On déduit dès lors de 5.5.6.2, et du fait que $H^i$ commute aux limites inductives filtrantes, qu'il existe un diagramme commutatif de foncteurs

$$\begin{array}{ccc}
C^d(P\ell(A)) & \xleftarrow[\sim]{\varinjlim} & \mathrm{Ind}\, C^{d,b}(P(A)) \\
\downarrow & & \downarrow \\
K^d(P\ell(A)) & \xrightarrow{\ell'} & \mathrm{Ind}\, K^{d,b}(P(A)) \\
\downarrow & & \downarrow \\
D^{\mathrm{Tor}\subset d}(A) & \xrightarrow{\ell''} & \mathrm{Ind}\, D^{\mathrm{parf}\subset d}(A)
\end{array} \quad .$$

5.5.6.4. Prouvons 5.5.6.1. Avec les notations de 5.5.6.3, si d est un intervalle $[0,k]$, on dispose (car F commute aux $\varinjlim$) de diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc}
K^d(P\mathcal{L}(A)) & \xrightarrow{\ell'} & \mathrm{Ind}\, K^d(P(A)) \\
\downarrow{\scriptstyle K^{\geq 0}(F)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ind}(K^{\geq 0}(F))} \\
K^+(\mathcal{B}) & & \mathrm{Ind}\, K^+(\mathcal{B}) \\
\downarrow{\scriptstyle H^i} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ind}(H^i)} \\
\mathcal{B} & \xleftarrow{\varinjlim} & \mathrm{Ind}\, \mathcal{B}
\end{array}$$

Si u est comme en 5.5.6.1, alors, d'après 5.5.6.3, $\ell'(u)$ est un isomorphisme, et $H^i\, K^{\geq 0}(F)(u)$ est donc un isomorphisme, ce qu'il fallait prouver.

5.5.7. Soient X un schéma sur un schéma S et k un entier. On suppose que la puissance symétrique $\mathrm{Sym}^k_S(X)$ est définie. Le lecteur qui voudrait ne pas faire cette hypothèse pourra se placer dans la catégorie des espaces algébriques (ARTIN [1]) . On annèle S par un faisceau d'anneaux commutatifs $\mathcal{A}$. A partir de 5.5.19, $\mathcal{A}$ sera supposé de torsion. On désignera encore par $\mathcal{A}$, par abus de notations, l'image réciproque de $\mathcal{A}$ sur un quelconque S-schéma.

Soit F un faisceau de modules sur X ; le faisceau $\boxtimes^k F$, produit tensoriel externe de n copies de F, est un faisceau sur $X^k/S$, équivariant par l'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_k$ sur $X^k/S$ . Par

passage aux invariants, il définit un faisceau $TS^k_{ext}(\underline{F})$ sur $Sym^k_S(X)$, appelé puissance tensorielle symétrique externe de $\underline{F}$

Pour raisonner "point par point", il est utile de travailler avec les points de $Sym^k_S(X)$ décrits comme suit.

5.5.7.1. Soit s un point géométrique de S . Un point x de $Sym_S(X)$ à valeurs dans k(s) définit un point géométrique de $Sym_S(X)$. On désignera par $(x_1 \ldots x_k)$ un point de $(X/S)^k$ à valeurs dans k(s) d'image x, par $y_1 \ldots y_\ell$ les éléments distincts de la suite $x_1 \ldots x_k$ et par $n_i (1 \leq i \leq \ell)$ la multiplicité de $y_i$ dans cette suite ($\Sigma\, n_i = k$).

Avec les notations de 5.5.7.1, et désignant par $\mathfrak{S}$ un groupe symétrique, on a

$$(5.5.7.2) \qquad TS^k_{ext}(F)_x \xrightarrow{\sim} \Big(\bigotimes_1^\ell \big(\bigotimes^{n_i} F_{y_i}\big)\Big)^{\prod_1^\ell \mathfrak{S}_{n_i}} ,$$

les produits tensoriels étant pris sur $\mathcal{A}_S$ . En particulier, pour F plat, on a, grâce à 5.5.2.5 :

$$(5.5.7.3) \qquad TS^k_{ext}(F)_x \xleftarrow{\sim} \bigotimes_1^\ell \Gamma^{n_i} F_{y_i} ,$$

en utilisant un argument par récurrence sur $\ell$, utilisant la platitude des $\Gamma^{n_i} F_{y_i}$ (5.5.2.4) et le fait suivant : si G (resp. H) est un groupe fini opérant sur un A-module M(resp. N), et si M et $N^H$ sont plats, alors $M^G \otimes_A N^H \xrightarrow{\sim} (M \otimes_A N)^{G \times H}$ .

5.5.8. Soit F un Module sur X, et P une présentation plate de F

$$P : P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow F \longrightarrow 0 \quad .$$

On définit $P'_1$, $j_o$ et $j_1$ comme en 5.5.2.5, et on définit $\Gamma^k_{ext}(F)$ (foncteur $\Gamma$ externe) comme le conoyau de la double flèche $(TS^k_{ext}(j_o), TS^k_{ext}(j_1))$. Avec les notations de 5.5.7.1, on déduit de 5.5.7.3 et 5.5.2.5 des isomorphismes

$$\Gamma^k_{ext}(F)_x \simeq \bigotimes_1^{\ell} \Gamma^{n_i}(F_{y_i}) \quad . \tag{5.5.8.1}$$

De cette formule, on déduit que $\Gamma^k_{ext}(F)$, qui a priori dépend fonctoriellement de P, ne dépend, à isomorphisme unique près, que de F .

5.5.9. On dispose d'un morphisme fonctoriel

$$\alpha : \Gamma^k_{ext}(F) \longrightarrow TS^k_{ext}(F) \quad .$$

Le couple $(\Gamma,\alpha)$ est caractérisé par les deux propriétés :

(i) Pour F plat, $\alpha$ est un isomorphisme

(ii) Avec les notations de 5.5.2.5, pour toute présentation

$$P_1 \xrightarrow{d} P_o \xrightarrow{\varepsilon} F \longrightarrow 0$$

de F, la suite

$$\Gamma^k_{ext}(P'_1) \rightrightarrows \Gamma^k_{ext}(P_o) \longrightarrow \Gamma^k_{ext}(F) \longrightarrow 0$$

est exacte.

On a de plus :

(iii) Les foncteurs $TS^k$ et $\Gamma^k$ commutent aux limites inductives filtrantes (d'après 5.5.7.2, 5.5.8.1, 5.5.2.4).

(iv) Le foncteur $\Gamma^k$ commute à toute extension $\mathcal{A}_0 \longrightarrow \mathcal{A}'_0$ de l'anneau de base.

(v) Le foncteur $\Gamma^k$ commute à tout changement de base $S' \longrightarrow S$ :

pour tout carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S' & \xrightarrow{g} & S \end{array} ,$$

on a

$$Sym_g^k(g')^* \ \Gamma^k_{ext} \ \simeq \ \Gamma^k_{ext} \ g'^* \quad .$$

(5.5.8.1 et 5.5.2.7).

(vi) Le foncteur $\Gamma^k$ commute aux images inverses par tout morphisme radiciel $i : X' \longrightarrow X$ (par exemple une immersion fermée) : On a

$$Sym_S^k(i)^* \ \Gamma^k_{ext} \ \simeq \ \Gamma^k_{ext} \ i^*$$

(5.5.8.1).

(vii) Pour $j : X' \longrightarrow X$ une immersion, on a

$$Sym_S^k(j)_! \ \Gamma^k_{ext} \ \simeq \ \Gamma^k_{ext} \ j_!$$

(5.5.8.1).

5.5.10. Soient $k_1$, $k_2$ et $k = k_1 + k_2$ trois entiers $\geq 0$ . On dispose alors d'un morphisme fini ( ) :

$$\vee_{k_1 k_2} : Sym_S^{k_1}(X) \ X_S \ Sym_S^{k_2}(X) \longrightarrow Sym_S^k(X) \quad .$$

Si $F_i$ (i=1,2) est un Module sur $Sym_S^{k_i}(X)$, on désigne par $F_1 \vee F_2$ le faisceau sur $Sym_S^k(X)$

$$F_1 \vee F_2 \ = \ \vee_{k_1 k_{2*}} (F_1 \boxtimes F_2) \quad .$$

5.5.11. Soit une suite exacte de Modules sur X

$$\Sigma : 0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0 \quad .$$

Avec les notations 5.5.7.1, on dispose, grâce à 5.5.8.1 et 5.5.2.6, d'une filtration sur $\Gamma^k_{ext}(F)_x$, et de morphismes :

$$\sum_{\substack{1 \\ \sum i_\alpha = i}}^{\ell} \ \bigotimes_1^{\ell} \Gamma^{i_\alpha}(F'_{y_\alpha}) \otimes \bigotimes_1^{\ell} \Gamma^{n_i - i_\alpha}(F''_{y_\alpha}) \longrightarrow Gr^i(\Gamma^k_{ext}(F)_x) \quad .$$

Le premier membre n'est autre que $(\Gamma^i_{ext}(F') \vee \Gamma^{k-i}_{ext}(F''))_x$. On vérifie facilement que ces données, construites point par point, proviennent d'une (unique) filtration en k+1 crans de $\Gamma^k_{ext}(F)$, et de morphismes (uniques)

$$(5.5.11.1) \qquad \Gamma^i_{ext}(F') \vee \Gamma^{k-i}_{ext}(F'') \longrightarrow Gr^i(\Gamma^k_{ext}(F)) \quad .$$

Si la suite exacte $\Sigma$ est scindée, on a plus précisément (vérification point par point à partir de 5.5.2.6.2).

$$(5.5.11.2) \qquad \Gamma^k_{ext}(F' \oplus F'') \xrightarrow{\sim} \sum_{k_1+k_2=k} \Gamma^{k_1}_{ext}(F') \vee \Gamma^k_{ext}(F'').$$

Si la suite exacte $\Sigma$ est scindable point par point, ou si F'' est plat, les morphismes (5.5.11.1) sont des isomorphismes (cf. 5.5.1.4).

5.5.12. Soit $u : X \longrightarrow Y$ un morphisme de S-schémas. On suppose que les puissances symétriques $Sym^k_S(X)$ et $Sym^k_S(Y)$ existent. Soient F un Module sur X, G un Module sur Y et $v \in Hom(u^*G, F) \xrightarrow{\sim} Hom(G, u_*F)$ un u-homomorphisme de F dans G (0.2). Si $\prod^n u$ est la puissance cartésienne $n^{ième}$ de u, l'homomorphisme v induit un $\prod^n u$-homomorphisme $\boxtimes^n v$ de $\boxtimes^n F$ dans $\boxtimes^n G$.

Par passage aux invariants, celui-ci définit

$$TS^n(v) : TS^n_{ext}(F) \xrightarrow[Sym^n_S(u)]{} TS^n_{ext}(G) \quad .$$

On déduit de la définition 5.5.8 qu'il existe un et un seul $Sym^n(u)$-homomorphisme $\Gamma^n_{ext}(v)$, fonctoriel en (F, G, v),

$$(5.5.12.0) \qquad \Gamma^n_{ext}(v) : \Gamma^n_{ext}(F) \xrightarrow[Sym^n_S(u)]{} \Gamma^n_{ext}(G)$$

rendant commutatif le diagramme suivant (cf. (0.2) pour le sens (inhabituel) des flèches) :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma^n_{ext}(F) & \xrightarrow[\text{sur } Sym^n_S(u)]{\Gamma^n_{ext}(v)} & \Gamma^n_{ext}(G) \\ \alpha \uparrow \text{ sur Id} & & \alpha \uparrow \text{ sur Id} \\ TS^n_{ext}(F) & \xrightarrow[\text{sur } Sym^n_S(u)]{TS^n_{ext}(v)} & TS^n_{ext}(G) \end{array} \quad .$$

On utilisera cette flèche surtout comme "flèche de Künneth symétrique" : pour $G = u_*F$, et v la flèche canonique, la flèche $\Gamma^n_{ext}(v)$ s'identifie à un homomorphismes de Modules

$$(5.5.12.1) \qquad k^n : \Gamma^n_{ext}(u_*F) \longrightarrow Sym^n(u)_* \Gamma^n_{ext}(F) \quad .$$

5.5.13. Soit la condition :

(5.5.13.1). $K \in Ob\ K^{b,\geq 0}(X, \mathcal{A}_\bullet)$ et, pour tout point géométrique x de X, le complexe $K_x$ est homotope à un complexe de modules plats $L_x \in Ob\ C^{b,\geq 0}(\mathcal{A}_{\bullet x})$.

Lemme 5.5.13.2. La sous-catégorie $D^{b,tor\leq 0}(X,\mathcal{A}_b)$ de $D^b(X,\mathcal{A}_b)$ formée des complexes de Tor-dimension $\leq 0$ est équivalente à la catégorie qui se déduit de la catégorie des complexes $K \in Ob\ K^{b,\geq 0}(X,\mathcal{A}_b)$ vérifiant (5.5.13.1) en inversant les quasi-isomorphismes. Cette construction peut se faire indifféremment par calcul de fractions à gauche ou à droite.

Soit P la sous-catégorie de $K^-(X,\mathcal{A}_b)$ formée des complexes point par point homotopes à un complexe de modules plats. On sait (VERDIER [C.D.]) que $D^-(X,\mathcal{A}_b)$ se déduit de P en inversant les quasi-isomorphismes, par calcul de fractions à droite ou à gauche. On applique alors 5.5.4.1 à l'inclusion de $K^{b,\geq 0}(X,\mathcal{A}_b)\cap P$ dans P . En effet, si K est de Tor-dimension $\leq 0$, et point par point homotope à des complexes de modules plats $L_x$ , alors $\tau_{\geq 0}(K)$ est point par point homotope aux $\tau_{\geq 0}(L_x)$, et ceux-ci sont encore des complexes de modules plats, de sorte que $\tau_{\geq 0}(K)$ vérifie 5.5.13.1.

5.5.14. D'après 5.5.6.1, 5.5.7.2 ou 5.5.8.1 et 5.5.2.4, tout quasi-isomorphisme $v : K' \longrightarrow K$ entre complexes vérifiant (5.5.13.1) induit des quasi-isomorphismes

$$TS^k(v) : TS^k_{ext}(K') \xrightarrow{\approx} TS^k_{ext}(K)$$

$$\Gamma^k(v) : \Gamma^k_{ext}(K') \xrightarrow{\approx} \Gamma^k_{ext}(K) \quad .$$

Il en résulte que les foncteurs $\Gamma^k$ et $TS^k$ sont dérivables (5.5.5) sur la sous-catégorie $D^{b,tor\leq 0}(X,\mathcal{A}_b)$ de $D^b(X,\mathcal{A}_b)$, et que les complexes vérifiant (5.5.13.1) sont déployés à gauche pour ces foncteurs. D'après

5.5.2.4, $\Gamma^k$ et $TS^k$ induisent des foncteurs

(5.5.14.1) $\quad LTS^k : D^{b,tor\leq 0}(X,\mathcal{A}) \longrightarrow D^{b,tor\leq 0}(Sym_S^k(X),\mathcal{A})$

(5.5.14.2) $\quad L\Gamma^k : D^{b,tor\leq 0}(X,\mathcal{A}) \longrightarrow D^{b,tor\leq 0}(Sym_S^k(X),\mathcal{A})$ .

De plus, le morphisme canonique $\alpha$ (5.5.9) induit d'après 5.5.9 (i) un isomorphisme entre les foncteurs 5.5.14.1 et 5.5.14.2

(5.5.14.3) $\qquad \alpha : L\Gamma^k \xrightarrow{\sim} LTS^k$ .

5.5.14.4. Les isomorphismes de 5.5.9 (iv) (v) (vi) (vii) passent à la catégorie dérivée et définissent des isomorphismes :

(iv') Pour $\mathcal{A}'$ une $\mathcal{A}$-algèbre, on a

$$L\Gamma^k_{ext\,\mathcal{A}}(K) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathcal{A}' \simeq L\Gamma^k_{ext\,\mathcal{A}'}(K \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{A}') \quad .$$

(v') Pour tout changement de base $g : S' \longrightarrow S$, on a

$$Sym_g^k(g')^* L\Gamma^k_{ext} K \simeq L\Gamma^k_{ext}(g'^*K) \quad .$$

(vi') Pour tout morphisme <u>radiciel</u> $i : X' \longrightarrow X$, on a

$$Sym_S^k(i)^* L\Gamma^k_{ext} K \simeq L\Gamma^k_{ext}\, i^*K \quad .$$

(vii') Pour $j : X' \longrightarrow X$ une <u>immersion</u>, on a :

$$Sym_S^k(j)_!\, L\Gamma^k_{ext} \simeq L\Gamma^k_{ext}\, j_! \quad .$$

5.5.15. Soit une suite exacte de complexes plats de $C^{\geq 0}(X,\mathcal{A})$,

$$0 \longrightarrow K' \longrightarrow K \longrightarrow K'' \longrightarrow 0 \quad ,$$

et appliquons le foncteur $\Gamma^k_{ext}$ (5.5.3). On trouve (comme en 5.5.11) que le Module semi-simplicial $\Gamma^k_{ext}(N^{-1}K)$ sur $Sym_S^k(X)$ admet une filtration

dont les quotients successifs sont les Modules semi-simpliciaux $\Gamma^{k'}_{ext}(N^{-1}K') \vee \Gamma^{k''}_{ext}(N^{-1}K'')$ $(k'+k'' = k)$.

Passant à la catégorie dérivée on trouve que $L\Gamma^{k}_{ext}(K)$ est représenté par un complexe filtré dont les quotients successifs représentent les objets $L\Gamma^{i}_{ext}(K' \overset{\mathbb{L}}{\vee} L\Gamma^{k-i}_{ext}(K'')$ de la catégorie dérivée (appliquer 5.5.2.4 et le théorème de EILENBERG-ZILBER-CARTIER (isomorphisme dans $\mathcal{K}$ d'un objet semi-simplicial double et de sa diagonale : DOLD PUPPE[1.2.9 pg.213]).

Dans la catégorie dérivée, cette construction peut déjà se faire à partir d'une suite exacte de complexes vérifiant 5.5.13.1.

* En termes plus intrinsèques, soit $\Delta$ un "vrai triangle" d'objets de $D^{b,tor\leq 0}(X,\mathcal{A}_b)$, i.e. un objet de la "catégorie dérivée filtrée" avec $Gr^{i}(\Delta) = 0$ pour $i \neq 0,1$ et $Gr^{i}(\Delta) \in Ob\ D^{b,tor\leq 0}(X,\mathcal{A}_b)$ (DELIGNE, in Appendice à VERDIER [2], ou VI B n° 2.5.1, 2.5.2).

La construction précédente fournit alors un objet $L\Gamma^{k}_{ext}(\Delta)$ de la catégorie dérivée filtrée de $Sym^{k}_{S}(X)$, des isomorphismes

$$Gr^{i}(L\Gamma^{k}_{ext}(\Delta)) \simeq L\Gamma^{i}_{ext}(Gr^{1}(\Delta)) \overset{\mathbb{L}}{\vee} L\Gamma^{k-i}_{ext}(Gr^{0}(\Delta)$$

et, désignant par $|\ \ |$ le complexe sous-jacent à un complexe filtré, un isomorphisme

$$|\ L\Gamma^{k}_{ext}(\Delta))\ | \simeq L\Gamma^{k}_{ext}(|\Delta|) \quad . \quad *$$

Lemme 5.5.16. Soit N un entier. La catégorie $D^{b,tor\leq 0}(X,\mathcal{A}_b)$ se déduit de la catégorie des complexes $K \in Ob\ K^{b,\geq 0}(X,\mathcal{A}_b)$ vérifiant les conditions (i) et (ii) ci-dessous en inversant les quasi-isomorphismes :

(i) Condition (5.5.13.1).

(ii) Le complexe K est déployé pour tout foncteur image directe de dimension cohomologique $\leq N$, relatif à un isomorphisme de topos $f : \widetilde{X}_{et} \longrightarrow T$ .

Qu'il y ait un calcul des fractions à droite résulte de 5.5.13 et du fait que, via les résolutions flasques canoniques tronquées (4.2.9), tout complexe K vérifiant (i) s'envoie dans un complexe vérifiant (i) et (ii).

5.5.17. Soit un morphisme de S-schémas $u : X \longrightarrow Y$ . On suppose que $Sym^n_S(X)$ et $Sym^n_S(Y)$ existent, qu'il existe un entier N tel que le foncteur $u_*$ soit de dimension $\leq N$ sur la catégorie des $\mathcal{A}$-Modules, et que le foncteur $Ru_*$ transforme complexes bornés de Tor-dimension $\leq 0$ en complexes de Tor-dimension $\leq 0$ . Ces deux dernières conditions sont automatiques si u est propre, $\mathcal{A}$ de torsion et Y cohérent (i.e. quasi-compact, quasi-séparé) (5.2.8.1, 5.2.10).

Soit $K \in Ob\ K^{b,\geq 0}(X, \mathcal{A})$ un complexe vérifiant les conditions (i) et (ii) de 5.5.16, avec N comme ci-dessus. D'après 5.5.14, la flèche

$$\beta : L\Gamma^n_{ext}(K) \xrightarrow{\sim} \Gamma^n_{ext}(K)$$

est un quasi-isomorphisme. De même, la flèche

$$\gamma : u_*K \xrightarrow{\sim} Ru_*K$$

est un quasi-isomorphisme.

On définit la flèche de Künneth symétrique de $L\Gamma^n_{ext}\ Ru_*(K)$ dans $R\ Sym^n(u)_*\ L\Gamma^n_{ext}(K)$ comme le composé

(5.5.17.1) $$k^n : L\Gamma^n_{ext} Ru_*K \xleftarrow[\gamma]{\sim} L\Gamma^n u_*K \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \Gamma^n_{ext} u_*K \xrightarrow[(5.5.12.1)]{} Sym^n_S(u)_*\Gamma^n_{ext}(K) \longrightarrow R\ Sym^n_S(u)_*\Gamma^n_{ext}(K)$$

$$\xleftarrow[\beta]{\sim} R\ Sym^n_S(u)_*\ L\Gamma^n_{ext}(K) \quad .$$

Il résulte de 5.5.16 que les morphismes (5.5.17.1) définissent un morphisme entre foncteurs de $D^{b,tor\leq 0}(X,\mathcal{A})$ dans $D^+(Sym^n_S(Y),\mathcal{A})$

(5.5.17.2) $$k^n : L\Gamma^n_{ext}\ Ru_* \longrightarrow R\ Sym^n_S u_*\ L\Gamma^n_{ext} \quad ,$$

appelé encore morphisme de Künneth symétrique.

Ce morphisme est caractérisé par la propriété 5.5.18 ci-dessous.

5.5.17.3. Soient S, X, Y et u comme plus haut, $K \in Ob\ C^{b,\geq 0}(X,\mathcal{A})$ un complexe de Tor-dimension $\leq 0$, $K_1 \in Ob\ C^{b,\geq 0}(Y,\mathcal{A})$ et $K_2 \in Ob\ C^b(Sym^n_S(X),\mathcal{A})$. Soit v un u-homomorphisme (0.2) de K dans $K_1$, et soit t un homomorphisme (au sens oridnaire, comme tous ceux qui suivent) de $\Gamma^n_{ext}(K)$ dans $K_2$ . On dispose de morphismes

a) $\Gamma^n_{ext}(v) : \Gamma^n_{ext}(K_1) \longrightarrow Sym^n_S(u)_*\ \Gamma^n_{ext}(K)$ (5.5.12.0)

b) $Sym^n_S(u)_*(t) : Sym^n_S(u)_*\ \Gamma^n_{ext}(K) \longrightarrow Sym^n_S(u)_*\ K_2$ ,

de composé

$$\varphi' : \Gamma^n_{ext}(K_1) \longrightarrow Sym^n_S(u)_*\ K_2 \quad ,$$

définissant, par composition

$$\varphi : L\Gamma^n_{ext}(K_1) \longrightarrow R\,Sym^n(u)_*K_2 \quad .$$

De plus, v et t induisent :

$$\begin{cases} v' : K_1 \longrightarrow Ru_*K \\ t' : L\Gamma^n_{ext}K \longrightarrow K_2 \quad . \end{cases}$$

On a alors :

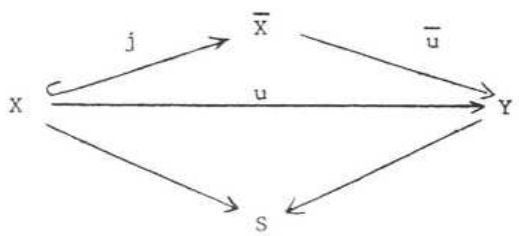
Proposition 5.5.18. Sous les hypothèses 5.5.17.3, le diagramme suivant est commutatif dans $D^+(Sym_S(Y), \mathcal{A})$ :

$$\begin{array}{ccc} L\Gamma^n_{ext}\,Ru_*K & \xrightarrow[\text{(Künneth symétrique)}]{k^n} & R\,Sym^n_S(u)_*\,L\Gamma^n_{ext}K \\ \uparrow{\scriptstyle L\Gamma^n_{ext}(v')} & & \downarrow{\scriptstyle R\,Sym^n_S(u)_*(t')} \\ L\Gamma^n_{ext}\,K_1 & \xrightarrow{\varphi} & R\,Sym^n_S(u)_*K_2 \end{array} \quad .$$

La démonstration est toute pareille à celle de 5.4.1.5 et laissée au lecteur.

5.5.19. On suppose dorénavant $\mathcal{A}$ de torsion.

Soit u : X ⟶ Y un morphisme compactifiable de S-schémas :




.

On suppose que $\mathrm{Sym}_S^n(X)$, $\mathrm{Sym}_S^n(\bar{X})$ et $\mathrm{Sym}_S^n(Y)$ existent. Pour tout Module F sur X, on a alors

(5.5.19.1) $$\Gamma^n_{ext}(j_!F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sym}^n_S(j)_!\, \Gamma^n_{ext}(F) \quad ,$$

et cet isomorphisme passe trivialement aux catégories dérivées.

On définit le <u>morphisme de Künneth symétrique</u> entre foncteurs de $D^{b,\mathrm{tor}\leq 0}(X,\mathcal{A})$ dans $D^{b,\mathrm{tor}\leq 0}(\mathrm{Sym}^n_S(Y),\mathcal{A})$

(5.5.19.2) $$k^n_u \text{ ou } k^n : L\Gamma^n_{ext} Ru_! \longrightarrow R\,\mathrm{Sym}_S(u)_! L\Gamma^n_{ext}$$

comme étant le composé

$$L\Gamma^n_{ext} Ru_! \overset{\text{dfn}}{\xrightarrow{\sim}} L\Gamma^n_{ext} R\bar{u}_* j_! \xrightarrow{(5.5.17.2)} R\,\mathrm{Sym}^n_S(\bar{u})_*\, L\Gamma^n_{ext\ j!}$$

$$\xrightarrow[\sim]{(5.5.19.1)} R\,\mathrm{Sym}^n_S(\bar{u})_*\, \mathrm{Sym}^n_S(j)_!\, L\Gamma^n_{ext}$$

$$\xrightarrow{(5.5.13.5\ (vii'))} R\,\mathrm{Sym}^n_S(u)_! L\Gamma^n_{ext}$$

5.5.20. On laisse au lecteur le soin de faire les vérifications suivantes, faciles en principe en utilisant 5.5.18.

5.5.20.1 (Caractère intrinsèque). Le morphisme (5.5.19.2) est indépendant du choix de la compactification $\bar{u}$ de u .

5.5.20.2 (Transitivité). Soit un diagramme de S-schémas

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \quad ,$$

avec u et v quasi-projectifs ; on suppose que $\mathrm{Sym}^n_S(Z)$ existe (donc aussi $\mathrm{Sym}^n_S(Y)$ et $\mathrm{Sym}^n_S(X)$ (SGA 1 V 1.7, EGA II 4.5.4)). Le diagramme de foncteurs suivant est alors commutatif

$$\begin{array}{ccc} L\Gamma^n_{ext}\, R(vu)_! & \xrightarrow{k^n_{vu}} & R\,\mathrm{Sym}^n_S(vu)_!\, L\Gamma^n_{ext} \\ \| & & \| \\ L\Gamma^n_{ext}\, Rv_!Ru_! & \xrightarrow{k^n_v} R\,\mathrm{Sym}^n_S(v)_!\, L\Gamma^n_{ext} Ru_! & \xrightarrow{k^n_u} R\,\mathrm{Sym}^n_S(v)_!\, R\,\mathrm{Sym}^n_S(u)_!\, L\Gamma^n_{ext} \end{array} .$$

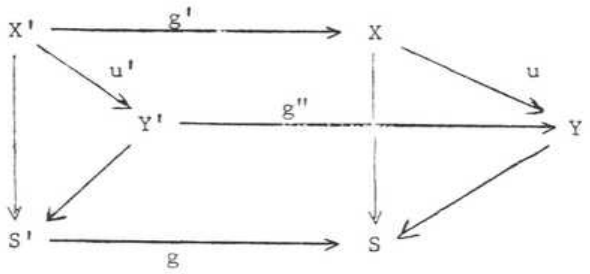
5.5.20.3. Le morphisme de Künneth symétrique est compatible aux changements de base ou d'espace du type 5.5.9 (iv) (v) (vi). De façon plus précise, on a les compatibilités suivantes avec les morphismes 5.5.13.5 (iv') (v') (vi').

(iv") Pour toute $\mathcal{A}$-algèbre $\mathcal{A}'$, et tout S-morphisme quasi-projectif $u : X \longrightarrow Y$ le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} L\Gamma^n_{ext}\, Ru_!(K) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{A}' & \simeq & L\Gamma^n_{ext}(Ru_!(K) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{A}') & \xrightarrow{\simeq} & L\Gamma^n_{ext} Ru_!(K \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{A}') \\ \downarrow k^n_u & & & & \downarrow k^n_u \\ R\,\mathrm{Sym}^n_S(u)_!\, L\Gamma^n_{ext}(K) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{A}' & \xrightarrow{\simeq} & R\,\mathrm{Sym}^n_S(u)_!(L\Gamma^n_{ext}(K) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{A}') & \simeq & R\,\mathrm{Sym}^n_S(u)_!\, L\Gamma^n_{ext}(K \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{A}') \end{array}$$

est commutatif.

(v") Pour tout changement de base $g : S' \longrightarrow S$, donnant lieu à un diagramme cartésien

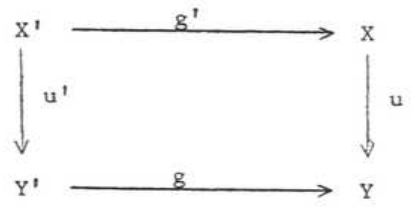



,

le diagramme de foncteurs, tout analogue à (iv"), est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Sym}_g^n(g'')^*L\Gamma^n_{ext}Ru_! & \xrightarrow{\sim} & L\Gamma^n_{ext}g''^*Ru_! & \xrightarrow{\sim} & L\Gamma^n_{ext}Ru'_!\,g'^* \\ \downarrow{\scriptstyle k^n_u} & & & & \downarrow{\scriptstyle k^n_{u'}} \\ \mathrm{Sym}_g^n(g'')^*R\,\mathrm{Sym}^n_S(u)_!L\Gamma^n_{ext} & \xrightarrow{\simeq} & R\,\mathrm{Sym}^n_S(u')_!\,\mathrm{Sym}_g^n(g')^*L\Gamma^n_{ext} & \xrightarrow{\simeq} & R\,\mathrm{Sym}^n_S(u')_!L\Gamma^n_{ext}g'^*. \end{array}$$

(vi") Pour tout changement de base <u>radiciel</u> $g : Y' \longrightarrow Y$, donnant lieu à un diagramme cartésien de S-schémas




,

le diagramme de foncteurs suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Sym}_S^n(g)^* L\Gamma^n_{ext}\, Ru_! & \simeq & L\Gamma^n_{ext} g^*\, Ru_! & \xrightarrow{\sim} & L\Gamma^n_{ext}\, Ru'_!\, g'^* \\ \downarrow k^n_u & & & & \downarrow k^n_{u'} \\ \mathrm{Sym}_S^n(g)^*\, R\,\mathrm{Sym}_S^n(u_!) & \Rightarrow & R\,\mathrm{Sym}_S^n(u')_! g'^* L\Gamma^n_{ext} & \simeq & R\,\mathrm{Sym}_S^n(u')_! L\Gamma^n_{ext} g'^* \end{array}$$

Théorème 5.5.21. (Formule de Künneth symétrique). Soient S un schéma cohérent (= quasi-compact quasi-séparé) annelé par un faisceau d'anneaux commutatifs de torsion $\mathcal{A}$, à fibres des anneaux noethériens. On annèle chaque S-schéma par l'image réciproque de $\mathcal{A}$. Soit $u : X \longrightarrow Y$ un morphisme de S-schémas quasi-projectifs. Quel que soient l'entier $n \geq 0$ et $K \in \mathrm{Ob}\, D^{b,tor\leq 0}(X, \mathcal{A}_b)$, la flèche de Künneth symétrique (5.5.17.2)

$$k^n : L\Gamma^n_{ext}\, Ru_! K \longrightarrow R\,\mathrm{Sym}_S^n(u)_!\, L\Gamma^n_{ext}\, K$$

est un isomorphisme dans $D^{b,tor\leq 0}(\mathrm{Sym}_S^n(Y), \mathcal{A})$.

La démonstration de ce théorème occupera toute la suite de 5.5.

Remarque 5.5.21.1. L'hypothèse de quasi-projectivité sert seulement à assurer que u admet une compactification $\bar{u}$

$$X \xrightarrow{j} \bar{X} \xrightarrow{\bar{u}} Y$$

telle que les schémas $\mathrm{Sym}_S^n(X)$, $\mathrm{Sym}_S^n(\bar{X})$ et $\mathrm{Sym}_S^n(Y)$ existent pour tout n. Le langage des espaces algébriques devrait permettre de remplacer cette hypothèse par la seule hypohtèses que u est compactifiable.

La première partie de la démonstration consiste à ramener par dévissage 5.5.21 à un cas "irréductible" :

Lemme 5.5.22. Le théorème 5.5.21 est impliqué par le cas particulier suivant :

(*) Pour tout corps algébriquement clos k, toute courbe projective et lisse X sur k et tout nombre premier $\ell$, les flèches de Künneth symétriques (obtenues pour Y = S = Spec(k), $\mathcal{A} = \mathbb{Z}/\ell$, $K = \mathbb{Z}/\ell$ ; voir explications ci-dessous)

$$(5.5.22.1) \qquad L\Gamma^n(R\Gamma(X, \mathbb{Z}/\ell)) \longrightarrow R\Gamma(\mathrm{Sym}^n_k(X), \mathbb{Z}/\ell)$$

sont des isomorphismes ($n \geq 0$).

Dans 5.5.22.1, le symbole $\Gamma$ a un malencontreux double usage : dans l'expression $R\Gamma$, il désigne le foncteur "sections globales" ; dans l'expression $L\Gamma^n$, il désigne le foncteur 5.5.2.3 . On utilise dans cette formule l'isomorphisme $\Gamma^n_{ext}(\mathbb{Z}/\ell) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/\ell$ .

Soient donnés S, X, Y, u et $\mathcal{A}$ comme en 5.5.21.

Lemme 5.5.22.2. Soit une suite exacte de complexes dans $C^{b,\geq 0}(X, \mathcal{A})$, de tor-dimension $\leq 0$ :

$$0 \longrightarrow K' \longrightarrow K \longrightarrow K'' \longrightarrow 0 \quad .$$

Si les flèches de Künneth $k^n$ ($n \geq 0$) relatives à deux des complexes K', K et K" sont toutes des isomorphismes, alors les flèches de Künneth relatives au troisième sont aussi des isomorphismes.

On se ramène au cas où u est projectif, et où les complexes K', K, K" vérifient les conditions (i) et (ii) de 5.5.16, pour N au moins égal au double de la dimension des flèches de u . Les flèches de Künneth symétriques sont alors données par 5.5.17.1.

Montrons par récurrence sur n que si pour $i \leq n$ et deux des complexes K', K, K", les flèches $k^i$ sont des isomorphismes, alors les flèches $k^i$ ($i \leq n$) sont des isomorphismes pour le troisième.

Pour le voir, on note que grâce à 5.5.14, le morphisme

$$(a) \qquad k^n : L\Gamma^n_{ext}\, Ru_*\, K \longrightarrow R\,Sym^n(u)_*\, L\Gamma^n_{ext}\, K$$

peut se représenter par un morphisme de complexes filtrés

$$k'^n : K_o \longrightarrow K_1$$

de filtration finie, ce morphisme induisant sur les quotients successifs des flèches isomorphes aux flèches composées

$$(b_i) \quad L\Gamma^i_{ext}\, Ru_*K' \overset{\mathbb{L}}{\vee} L\Gamma^{n-i}_{ext} Ru_*K'' \longrightarrow R\,Sym^n(u)_*(L\Gamma^i_{ext}K' \vee L\Gamma^{n-i}_{ext}K'')$$

suivantes :

$$L\Gamma^i_{ext}Ru_*K' \overset{\mathbb{L}}{\vee} L\Gamma^{n-i}_{ext}Ru_*K'' \xrightarrow{k^i \overset{\mathbb{L}}{\vee} k^{n-i}} R\,Sym^i(u)_*L\Gamma^i_{ext}K' \overset{\mathbb{L}}{\vee} R\,Sym^{n-i}(u)_*L\Gamma^{n-i}_{ext}(K'')$$

$$\underset{\text{defn}}{=\!=} \vee_{i,n-i_*}(R\,Sym^i(u)_*L\Gamma^i_{ext}K' \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} R\,Sym^{n-i}(u)_*L\Gamma^{n-i}_{ext}(K")) \xrightarrow{5.4.3,\ \sim}$$

$$\vee_{i,n-i_*}(R\,Sym^i(u)_* \times R\,Sym^{n-i}(u)_*)\,(L\Gamma^i_{ext}\,K' \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} L\Gamma^{n-i}_{ext}\,K")$$

$$=\!=\, R\,Sym^n(u)_* \vee_{i,n-i_*}(L\Gamma^i_{ext}K' \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} L\Gamma^{n-i}_{ext}\,K") \overset{\text{dfn}}{=\!=} R\,Sym^n(u)_*(L\Gamma^i_{ext}K' \overset{\mathbb{L}}{\vee} L\Gamma^{n-i}_{ext}K")$$

D'après l'hypothèse de récurrence (et la formule de Künneth), ces flèches sont des quasi-isomorphismes pour $i \neq 0,n$ . Deux quelconques des assertions suivantes impliquent donc la troisième : (a) est un quasi-isomorphisme ; $(b_o)$ est un quasi-isomorphisme ; $(b_n)$ est un quasi-isomorphisme. Il s'agit là des trois flèches qui étaient en question, cqfd.

5.5.22.3. Supposons vraie l'assertion (*) envisagée dans 5.5.22, et prouvons 5.5.21. Soient donc S, X, Y, $\mathcal{A}$ , K et u comme en 5.5.21. Le problème est local sur S, qu'on peut supposer affine. Tout complexe K est extension successive de complexes de la forme $i_!i^*K$ pour i inclusion dans X d'une partie affine localement fermée. Par dévissage (5.5.22.2), on peut donc supposer K de la forme $i_!K_1$ , pour une immersion $i : X_1 \longrightarrow X$ de source affine. La compatibilité 5.5.20.2 permet de remplacer X par $X_1$, K par $K_1$ et de supposer donc u affine. Factorisons u comme un composé $u = u_1 \ldots u_k$ de morphismes à fibres de dimension $\leq 1$ . La compatibilité 5.5.20.2 montre qu'il suffit de prouver que les flèches $k^n$ relatives aux $u_i$ et à un quelconque complexe K sont des isomorphismes. On est ainsi ramené au cas S affine, u de dimension relative $\leq 1$ .

5.5.22.4. Pour que $k^n$ soit un isomorphisme, il suffit que ses restrictions aux flèches géométriques de $Sym^n_S(Y)$ le soient ; la compatibilité 5.5.20.3 (v") nous ramène donc à supposer S spectre d'un corps algébriquement clos k .

5.5.22.5. Pour tout point rationnel y de $\mathrm{Sym}^n_k(Y)$, il existe une partie réduite finie Y' de Y telle que x soit dans l'image de $\mathrm{Sym}^n_k(Y')$. La compatibilité 5.5.20.3 (vi") nous permet donc de supposer que Y est somme d'un nombre fini de copies de Spec(k).

5.5.22.6. Si $Y = \coprod Y_i$ , alors tout complexe K sur X est somme de complexes concentrés sur l'un des schémas $X_i = u^{-1}(Y_i)$. Par dévissage (5.5.22.2) et d'après la compatibilité 5.5.20.3 (vi"), il suffit de prouver 5.5.21 pour chacun des morphismes $u_i : X_i \longrightarrow Y_i$ . Par 5.5.22.5, ceci nous ramène au cas où

$$Y = S = \mathrm{Spec}(k) \text{ , } k \text{ algébriquement clos, } \dim X \leq 1 \text{ .}$$

Le faisceau $\mathcal{A}_b$ se réduit maintenant à un anneau noethérien A . La proposition suivante permettra de se ramener au cas où A est un corps.

Proposition 5.5.23. Soient A un anneau noethérien (commutatif), $K \in \mathrm{Ob}\, D^-(A)$ un complexe borné supérieurement de A-modules et n un entier. Les conditions suivantes sont équivalentes

(i) K est de Tor-dimension $\leq n$

(ii) Pour tout $x \in \mathrm{Spec}(A)$ et tout $i < -n$, $H^i(K \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A k(x)) = 0$ .

On a (i) $\Longrightarrow$ (ii) trivialement, Supposons (ii). Pour prouver (i), nous prouverons par récurrence noethérienne sur le fermé F de Spec(A) que si un module N vérifie $N_x = 0$ pour $x \notin F$, alors $H^i(K \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A N) = 0$ pour $i < -n$ .

Soit I l'unique idéal qui définisse F tel que A/I soit réduit, et soit $N_k$ le sous-module de N annulé par $I^k$ . On a $N = \varinjlim N_k$ . Puisque les foncteurs Tor commutent aux limites inductives filtrantes, on se ramène au cas où il existe k tel que $N = N_k$ , de sorte que N est extension successive de modules tués par I , et la suite exacte longue de cohomologie nous ramène au cas où N est déjà un A/I-module.

Soit $\eta$ un point maximal de F, et définissons des A/I-modules $M_1$ et $M_2$ par la suite exacte

$$(5.5.23.1) \qquad 0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow N \xrightarrow{i} N \otimes k(\eta) \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0 \quad .$$

On a $(M_j)_\eta = 0$ $(j = 1,2)$. Si pour chaque fermé $G \subset F$ avec $\eta \notin G$ on désigne par $M_{j,G}$ le sous-module de $M_j$ formé des sections de $M_j$ à support dans G, on a

$$M_j = \varinjlim_{\eta \notin G} M_{j,G} \quad .$$

D'après l'hypothèse de récurrence et un passage à la limite, on a donc

$$H^i(K \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A M_j) = 0 \quad \text{pour } i < -n \quad .$$

Le module $N \otimes k(\eta)$ est un vectoriel sur $k(\eta)$, donc une somme de copies de $k(\eta)$. Par hypothèse , on a

$$H^i(K \overset{\mathbb{L}}{\otimes} (N \otimes k(\eta)) = 0 \quad \text{pour } i < -n \quad .$$

Si I est l'image de la flèche i de (5.5.23.1), on dispose de suites exactes

$$H^{i-1}(K \overset{\mathbb{L}}{\otimes} M_2) \longrightarrow H^i(K \overset{\mathbb{L}}{\otimes} I) \longrightarrow H^i(K \overset{\mathbb{L}}{\otimes} (N \otimes k(\eta)))$$

$$H^i(K \overset{\mathbb{L}}{\otimes} M_1) \longrightarrow H^i(K \overset{\mathbb{L}}{\otimes} N) \longrightarrow H^i(K \overset{\mathbb{L}}{\otimes} I),$$

dont on tire que $H^i(K \overset{\mathbb{L}}{\otimes} N) = 0$ pour $i < -n$, cqfd.

Corollaire 5.5.24. Pour qu'une flèche $u : K \longrightarrow L$ dans $D^-(A)$ soit un isomorphisme, il suffit que pour tout $x \in \mathrm{Spec}(A)$, la flèche

$$u_x : K \overset{\mathbb{L}}{\underset{A}{\otimes}} k(x) \longrightarrow L \overset{\mathbb{L}}{\underset{A}{\otimes}} k(x)$$

soit un isomorphisme dans $D^-(k(x))$.

Soit M le cône (mapping cylinder) de u . Par hypothèse, on a $M \overset{\mathbb{L}}{\underset{A}{\otimes}} k(x) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{Spec}(A)$. D'après 5.5.23, on a donc $M = 0$, et u est un isomorphisme.

5.5.25.1. Poursuivons la démonstration de 5.5.22, interrompue en 5.5.23. D'après la compatibilité 5.5.20.3 (iv") et 5.5.24, le morphisme $k^n$ relatif à $K \in \mathrm{Ob}\, D^{b,\mathrm{tor}\geq 0}(X,A)$ est un isomorphisme si et seulement si les morphismes $k^n$ relatifs aux $K \overset{\mathbb{L}}{\underset{A}{\otimes}} k(x) \in \mathrm{Ob}\, D^{b,\mathrm{tor}\geq 0}(X,k(x))$ sont des isomorphismes, pour $x \in \mathrm{Spec}(A)$. Ceci nous ramène au cas où A est un corps de caractéristique $\ell > 0$ .

5.5.25.2. La suite exacte (où C désigne un cône)

$$0 \longrightarrow K[-1] \longrightarrow C\,K[-1] \longrightarrow K \longrightarrow 0$$

montre que les flèches $k^n$ sont des isomorphismes pour K si et seulement si elles le sont pour $K[-1]$ (5.5.22.2).

5.5.25.3. Les suites exactes

$$0 \longrightarrow \sigma_{\geq n} K \longrightarrow K \longrightarrow \sigma_{\leq n} K \longrightarrow 0$$

montrent que pour les flèches de Künneth soient un isomorphisme, pour K complexe plat, il suffit qu'elles le soient pour les composantes de K , placées en degré 0 (5.5.22.2) et (5.5.25.2).

5.5.25.4. Soit donc F un faisceau de A-vectoriels. Ce faisceau est limite inductive de faisceaux constructibles (IX 2.7.2 ), automatiquement plats puisque A est un corps, et par passage à la limite, on se ramène au cas K constructible, réduit au degré zéro.

5.5.25.5. Si un complexe K est facteur direct d'un complexe L, le morphisme $k^n$ relatif à K est facteur direct du morphisme $k^n$ relatif à L, donc un isomorphisme si ce dernier en est un . La méthode de la trace (IX 5.8) s'applique donc et il suffit de traiter le cas où F est de la forme $j_! A_{X'}$ , pour $j : X' \longrightarrow X$ quasi-fini. La compatibilité 5.5.20.2 permet de remplacer X par X', d'où la réduction

$$X \text{ est de dimension} \leq 1 \text{ et } K = A_X \ .$$

5.5.25.6. On peut supposer X réduit. Si $j : U \longrightarrow X$ est l'ouvert de lissité de X, de complément $i : F \longrightarrow X$, la suite exacte

$$0 \longrightarrow j_! j^* A_X \longrightarrow A_X \longrightarrow i_! i^* A_X \longrightarrow 0$$

nous ramène par dévissage aux cas où X est soit une courbe lisse, soit un ensemble fini. De plus, la formule

$$A_X = A \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathbb{Z}/\ell} (\mathbb{Z}/\ell)_X$$

ramène par 5.5.20.3 (iv") au cas où $A_X = \mathbb{Z}/\ell$ .

Si X est une courbe, on plonge X dans la courbe projective et lisse correspondante, et un nouveau dévissage ramène à l'un des deux cas suivants

(i) X est une courbe projective et lisse, Y = S = Spec(k) avec k algébriquement clos, $\mathcal{A}_\ell = \mathbb{Z}/\ell$, K = $\mathbb{Z}/\ell$ .

(ii) X est une somme d'un nombre fini de copies de Spec(k), Y = S = Spec(k) (k algébriquement clos), $\mathcal{A}_\ell = \mathbb{Z}/\ell$, K = $\mathbb{Z}/\ell$ .

Un ultime dévissage de $\mathbb{Z}/\ell_X$ en les faisceaux $\mathbb{Z}/\ell_X$ , pour X' composante connexe de X, ramène dans (i) et (ii) à supposer X connexe. Le cas (ii) est alors trivial. Ceci prouve 5.5.22 .

Lemme 5.5.26. Le théorème 5.5.21 est conséquence des deux cas particuliers suivants de l'assertion (*) de 5.5.22 :

Cas 1 . On suppose que k = $\mathbb{C}$ .

Cas 2 . On suppose que k est de caractéristique p > 0 et que $\ell$ = p .

Avec les notations de 5.5.22, désignons par p la caractéristique de k . Si p = 0, le principe de Lefschetz (s'appuyant ici sur la compatibilité 5.5.20.3 (v"), et sur XII 5.4) permet de se ramener au cas où k = $\mathbb{C}$ .

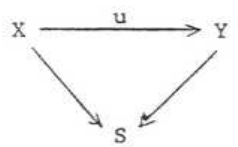
Reste à traiter le cas où p > 0 et où $\ell \neq$ p . La courbe X se remonte en une courbe X' sur l'anneau W(k) des vecteurs de Witt sur k (SGA 1 III 7.4). Posons S = Spec(W(k)), soit le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} X'_\eta & \longrightarrow & X' & \longleftarrow & X \\ \downarrow{\scriptstyle f_\eta} & & \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \eta & \longrightarrow & S & \longleftarrow & \mathrm{Spec}(k) \end{array} ,$$

et soient $f_n$ , $f'_n$ et $f_{\eta\, n}$ les projections respectives de $\mathrm{Sym}^n_k(X)$, $\mathrm{Sym}^n_S(X')$ et $\mathrm{Sym}^n_\eta(X'_\eta)$ sur Spec(k), S et $\eta$ . On sait que $f'_n$ est un morphisme projectif et lisse (la projectivité est évidente ; pour la lissité, le plus simple est de se ramener au cas où $X' = \mathbb{P}^1_S$ , auquel cas $\mathrm{Sym}^n_S(X') \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^n$ comme il résulte du théorème des fonctions symétriques élémentaires). D'après le théorème de spécialisation XVI 2.2, les faisceaux $R^i f'_{n*}(\mathbb{Z}/\ell)$ sont localement constants sur S . Il en est de même des faisceaux $L^i\Gamma^n(Rf'_*\,\mathbb{Z}/\ell)$. Pour vérifier que la flèche de (5.5.22.1) relative à X sur k est un isomorphisme, il suffit donc d'après 5.5.20.3 (v") de prouver l'énoncé analogue pour la fibre générique géométrique $X_{\overline{\eta}}$ de X sur S . Le corps $k(\overline{\eta})$ est de caractéristique 0, et, vu la première réduction, ceci prouve 5.5.26.

Pour prouver 5.5.21 dans les deux cas particuliers 5.5.26, on comparera le morphisme de KUnneth symétrique d'une part à son analogue transcendant (5.5.27 et 5.5.28) d'autre part à son analogue cohérent (5.5.29 à 5.5.37).

5.5.27. Si $p : X \longrightarrow S$ est une application continue entre espaces topologiques, avec S annelé par un faisceau d'anneaux commutatifs $\mathcal{A}$ , les constructions 5.5.7, 5.5.8 s'appliquent telles quelles pour définir un foncteur $\Gamma^n_{ext}$ des modules sur X dans les modules sur $\mathrm{Sym}^n_S(X) = X^n/\mathfrak{S}_n$ . Les sorites 5.5.7 à 5.5.18 se transposent. De même, si S, X et Y sont des espaces topologiques localement compacts séparés




,

et si les fibres de u sont de dimension cohomologique bornée, le sorite 5.5.19, 5.5.20 du morphisme de Künneth symétrique en cohomologie à support propre se transpose.

Si $p : X \longrightarrow S$ est un morphisme de schémas de type fini sur $\mathbb{C}$, les foncteurs $\Gamma^n$ et $L\Gamma^n$ commutent aux foncteurs "passage au transcendant". Enfin, si X, Y, S, $\mathcal{A}$, K sont comme en 5.5.21, avec S separé de type fini sur $\mathbb{C}$, et si on désigne génériquement par $\varepsilon$ les morphismes de sites de type $\varepsilon : X_{cl} \longrightarrow X_{et}$, le diagramme suivant est commutatif :

(5.5.27.1)
$$\begin{array}{ccc} \varepsilon^* L\Gamma^n_{ext} Ru_! K & \xrightarrow{k^k} & \varepsilon^* R Sym^n_S(u)_! L\Gamma^n_{ext} K \\ \downarrow & & \downarrow \\ L\Gamma^n_{ext} R u^{an}_! \varepsilon^* K & \xrightarrow{k^{n\ an}} & R Sym^n_S(u^{an})_! L\Gamma^n_{ext} \varepsilon^* K \end{array}$$

5.5.28. D'après la compatibilité 5.5.27.1, et un cas élémentaire du théorème de comparaison (XI 4.4 ou XVI 4.1), pour traiter le cas 1 de 5.5.26, il suffit de vérifier que si X est une courbe projective non singulière complexe, alors l'analogue topologique de 5.5.22.1 est un isomorphisme.

L'espace topologique $X^{an}$ est triangulable (ce fait est ici trivial, car X est un revêtement ramifié de la sphère de Riemann). L'analogue topologique du lemme de dévissage 5.5.22.2 nous ramène alors à prouver

(*) Si D est un simplexe fermé (de dimension 0, 1 ou 2), la flèche de Künneth symétrique topologique

(5.5.28.1) $\quad k^n : L\Gamma^n R\Gamma(D,\mathbb{Z}/\ell) \longrightarrow R\Gamma(\mathrm{Sym}^n(D, \mathbb{Z}/\ell)$

est un isomorphisme.

On a

$$R\Gamma(D,\mathbb{Z}/\ell) = \mathbb{Z}/\ell \text{ placé en degré } 0 \ ,$$

et donc

$$L\Gamma^n R\Gamma(D, \mathbb{Z}/\ell) = \mathbb{Z}/\ell \text{ placé en degré } 0 \ .$$

D'autre part, $\mathrm{Sym}^n(D)$ est contractible, et on a encore

$$R\Gamma(\mathrm{Sym}^n(D), \mathbb{Z}/\ell) = \mathbb{Z}/\ell \text{ placé en degré } 0 \ .$$

Les $H^i$ des deux membres de 5.5.28.1 sont donc nuls, et la flèche induite sur le $H^0$ s'identifie à l'identité de $\mathbb{Z}/\ell$ .

5.5.29. Pour l'application que nous avons en vue, il y a intérêt à regarder un faisceau quasi-cohérent sur un schéma X comme étant un faisceau quasi-cohérent de $\mathcal{O}$-modules sur le site étale de X .

Soit $p : X \longrightarrow X$ un morphisme quasi-projectif de schémas (cf. 5.5.21.1 (*)). Si $\underline{F}$ est un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules sur $X_{et}$ , alors

a) On désigne par $\overset{n}{\otimes}\underline{F}$ le faisceau de modules sur $(X/S)^n_{et}$ produit tensoriel des $\mathcal{O}_{(X/S)^n}$-modules images réciproques de $\underline{F}$ sur $(X/S)^n_{et}$ ;

b) le faisceau $\overset{n}{\otimes}\underline{F}$ est un faisceau $\mathfrak{S}_n$-équivariant. Par passage aux invariants, il définit un faisceau $TS^n_{ext}(\underline{F})$ sur $\mathrm{Sym}^n_S(X)$ : si $\sigma$ est la projection de $(X/S)^n$ sur $\mathrm{Sym}^n_S(X)$, on a

(*) Tout ce qui suit, y inclus 5.5.34, est valable en supposant seulement que X et Y admettent des faisceaux inversibles amples relativement à S (sans supposer X et Y de type fini sur S).

(5.5.29.1) $$TS^n_{ext}(\underline{F}) = (\sigma_* \overset{n}{\otimes} \underline{F})^{\mathfrak{S}_n} .$$

Supposons que p soit plat ; comme en 5.5.8, on définit alors le foncteur $\Gamma^n_{ext}$ come étantle 0.ème dérivé gauche du foncteur $TS^n_{ext}$ . Avec les notations de 5.5.2.5 et 5.5.8, si

$$P_1 \longrightarrow P_o \longrightarrow \underline{F} \longrightarrow 0$$

est une présentation plate de $\underline{F}$, alors la suite

$$TS^n_{ext}(P'_1) \underset{j_1}{\overset{j_o}{\rightrightarrows}} TS^n_{ext}(P_o) \longrightarrow \Gamma^n_{ext}(F)$$

est exacte. Si x est un point géométrique de $Sym^n_S(X)$ comme en 5.5.7.1, on a (cf. 5.5.8.1)

(5.5.29.2) $$\Gamma^n_{ext}(\underline{F})_x = \mathcal{O}_x \otimes_C (\overset{\ell}{\underset{1}{\otimes}} \Gamma_{\mathcal{O}_s}{}^{n_i}(F_{y_i})) ,$$

avec $$C = \overset{\ell}{\underset{1}{\otimes}} Sym^{n_i}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_{y_i}) .$$

Il suffit en effet de vérifier cette formule dans le cas trivial où les fibres de F sont libres. On notera que $\mathcal{O}_x$ est plat sur C, étant l'hensélisé strict de C au point fermé image de x .

5.5.30. Supposons X et S affines, p plat et $\underline{F}$ quasi-cohérent. Soient $S = Spec(A)$, $X = Spec(B)$ et soit $F = H^o(X,\underline{F})$, de sorte que $\underline{F}$ est le faisceau $F^\sim$ défini par le B-module F . On lit alors sur (5.5.29.1) que

$$TS^n_{ext}(\underline{F}) = TS^n_A(F)^\sim ,$$

et, par dérivation, on a donc

(5.5.30.1) $\qquad \Gamma^n_{ext}(\underline{F}) = \Gamma^n_A(F)^{\sim}$ .

Le foncteur $\Gamma^n_{ext}$ apparaît donc comme un foncteur $\Gamma^n$ "relatif à A ", ce que(5.5.29.2)exprimait déjà sous forme locale.

5.5.31. On désignera par $\mathbf{D}^{b,tor_S^{\leq 0}}(X,\mathcal{O}_X)$ la sous-catégorie de $D^b(X,\mathcal{O}_X)$ formé des complexes de $\mathcal{O}_X$-modules qui, en tant que complexes de $p^{-1}(\mathcal{O}_S)$-modules sont de Tor-dimension $\leq 0$ .

Soit la condition

(5.5.31.1) $\quad K \in Ob\ C^{b,\geq 0}(X,O_X)$ et, en chaque point géométrique x de X, $K_x$ est homotope à un complexe de $\mathcal{O}_{X,x}$-modules, à degrés positifs, plat sur $\mathcal{O}_{S,p(x)}$ .

Le morphisme p étant plat, de sorte qu'il y a "assez" de $\mathcal{O}_X$-modules plats sur S, on vérifie comme en 5.5.13.2 que $\mathbf{D}^{b,tor_S^{\leq 0}}(X,\mathcal{O}_X)$ se déduit de la catégorie des complexes $K \in Ob\ K^{b,\geq 0}(X,\mathcal{O}_X)$ vérifiant (5.5.31,1)en inversant les quasi-isomorphismes.

On lit sur (5.5.29.2) et 5.5.6.1 que si $u : K \longrightarrow L$ est un quasi-isomorphisme entre complexes vérifiant (5.5.31.1), alors $\Gamma^n_{ext}(u)$ (au sens de DOLD-PUPPE) est encore un quasi-isomorphisme. Le foncteur $\Gamma^n_{ext}$ se dérive dès lors en

(5.5.31.2) $\quad L\Gamma^n_{ext} : D^{b,tor_S^{\leq 0}}(X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow D^{b,tor_S^{\leq 0}}(Sym^n_S(X), \mathcal{O}_{Sym^n_S(X)})$

5.5.32. On désignera par $D^{b,tor_S^{\leq 0}}_{qcoh}(X,\mathcal{O}_X)$ la sous-catégorie de $D^{b,tor_S^{\leq 0}}(X,\mathcal{O}_X)$ formée des complexes à cohomologie quasi-cohérente.

Des arguments standards permettent, comme en 5.5.17, de définir une flèche de Künneth symétrique du type suivant:

Soit $u : X \longrightarrow Y$ un morphisme de S-schémas quasi-projectifs et plats sur S ; pour $K \in \mathrm{Ob}\, D^{b,tor_S\leq 0}_{qcoh}(X,\mathcal{O}_X)$, la flèche de Künneth symétrique $k^n$ dans $D^{b,tor_S\leq 0}_{qcoh}(\mathrm{Sym}^n_S(Y),\mathcal{O})$ est une flèche

$$(5.5.32.1) \qquad k^n : L\Gamma^n_{ext}\, Ru_*K \longrightarrow R\,\mathrm{Sym}^n_S\, u_*\, L\Gamma^n_{ext}\, K \quad .$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier les propriétés formelles de 5.5.32.1 qui seront utilisées, notamment la suivante :

Lemme 5.5.33. Si S est de caractéristique $p > 0$, et si $u : X \longrightarrow S$ est propre et plat, le diagramme de flèches de Künneth symétriques 5.5.17.2 et 5.5.32.1 est commutatif ($Y = S$, $K = \mathbb{Z}/p$ ou $\mathcal{O}_X$) :

$$\begin{array}{ccc} L\Gamma^n_{\mathbb{Z}/p}\, Ru_*(\mathbb{Z}/p) & \xrightarrow{k^n} & R\,\mathrm{Sym}^n_S(u)_*(\mathbb{Z}/p) \\ \downarrow & & \downarrow \\ L\Gamma^n_{\mathcal{O}}\, Ru_*(\mathcal{O}) & \xrightarrow{k^n} & R\,\mathrm{Sym}^n_S(u)_*\mathcal{O} \end{array} \quad .$$

Proposition 5.5.34. Sous les hypothèses de 5.5.32, la flèche de Künneth symétrique (5.5.32.1) est un isomorphisme.

a) La question est locale sur S, qu'on peut supposer affine.

b) Pour tout point x de $\mathrm{Sym}^n_S(Y)$, il existe un ouvert affine $Y_1$ de Y tel que x soit dans $\mathrm{Sym}^n_S(Y_1)$. Par localisation, on peut donc supposer Y affine.

c) Tout complexe K du type considéré peut se représenter par un complexe $K_o$ de modules quasi-cohérents sur S, nul en degrés $i < 0$. Si $\mathcal{U}$ est un recouvrement affine de X, alors K admet une résolution finie par des sommes de complexes de la forme $j_*j^*K$ pour j inclusion d'un ouvert affine (complexe de Čech alterné). Utilisant l'analogue quasi-cohérent du lemme de dévissage 5.5.22.2, ceci nous ramène au cas où il existe un ouvert affine $j : X_1 \hookrightarrow X$ de X et $K_1 \in D^{b,tor_S\leq 0}_{qcoh}(X_1,\mathcal{O})$ tel que $K = Rj_* K_1$.

d) Vu l'analogue quasi-cohérent de la transitivité 5.5.20.2, il suffit de prouver 5.5.34 pour uj et j. La réduction b), appliquée à j, nous ramène enfin au cas où X, Y et S sont affines. On peut alors représenter K par un complexe $K_2 \in C^{b,\geq 0}(X,\mathcal{O}_X)$ à composantes plates et quasi-cohérentes ( ). Les foncteurs $Ru_*$ et $L\Gamma^n$ se calculent alors sans plus devoir résoudre $K_2$, et il reste à noter que, d'après 5.5.30.1, pour $\underline{F}$ quasi-cohérent sur X, on a

$$\Gamma^n_{ext}\, u_*\, \underline{F} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sym}^n_S(u)_*\, \Gamma^n_{ext}\, \underline{F} \quad ,$$

les deux membres s'identifiant à

$$\Gamma^n_A(F)^\sim \quad \text{pour } \underline{F} = F^\sim \quad ,$$

cqfd.

5.5.35. Traitons le cas 2 de 5.5.26. Avec les notations de 5.5.22, le diagramme suivant est commutatif (5.5.33) :

(5.5.35.1)

$$\begin{array}{ccc} L\Gamma^n(R\Gamma(\bar{X},\mathbb{Z}/p)) & \xrightarrow[①]{k^n} & R\Gamma(Sym_k^n(X),\mathbb{Z}/p) \\ \downarrow & & \downarrow \\ L\Gamma^n(R\Gamma(X,\mathcal{O})) & \xrightarrow[②]{k^n} & R\Gamma(Sym_k^n(X),\mathcal{O}) \end{array} ,$$

et d'après 5.5.34, la flèche ② est un isomorphisme. L'endomorphisme de Frobenius $F : x \longrightarrow x^p$ de $\mathcal{O}$ agit p-linéairement sur $R\Gamma(X,\mathcal{O})$ et sur $R\Gamma(Sym_k^n(X),\mathcal{O})$. Il agit donc aussi p-linéairement sur $L\Gamma^n(R\Gamma(X,\mathcal{O}))$. On vérifie que $k^n$ et F commutent.

La théorie d'Artin-Scheier nous fournit des suites exactes

$$0 \longrightarrow H^i(X,\mathbb{Z}/p) \longrightarrow H^i(X,\mathcal{O}) \xrightarrow{F-I} H^i(X,\mathcal{O}) \longrightarrow \mathcal{O} ,$$

et de même pour $Sym_S^n(X)$. Pour déduire que ① est un isomorphisme du fait que ② en soit un, il nous reste à vérifier le

Lemme 5.5.36. Soient k un corps parfait de caractéristique $p > 0$, $K \in C^{\geq 0}(\mathbb{Z}/p)$ un complexe de $\mathbb{Z}/p$-vectoriels de dimension finie, $L \in C^{\geq 0}(k)$ un complexe de k-vectoriels de dimension finie, F un endomorphisme p-linéaire de L et $u : K \longrightarrow L$ un morphisme. On suppose que $H^*(Fu) = H^*(u)$, et que les suites

$$0 \longrightarrow H^i(K) \longrightarrow H^i(L) \xrightarrow{F-I} H^i(L) \longrightarrow 0$$

sont exactes.

Alors, les suites

$$0 \longrightarrow H^i(\Gamma^n K) \longrightarrow H^i(\Gamma^n L) \xrightarrow{F-I} H^i(\Gamma^n L) \longrightarrow 0$$

sont exactes.

Puisque $H^*(Fu) = H^*(u)$ et que $\mathbb{Z}/p$ est un corps, il existe une homotopie

$$Fu - u = dH + Hd \quad .$$

Le corps k étant parfait, on peut écrire

$$F H_o - H_o = H \quad .$$

Remplaçant u par $u - (dH_o + H_o d)$, on peut supposer que $Fu = u$ .

Le foncteur S qui à chaque k-vectoriel V muni d'un endomorphisme p-linéaire F associe le $\mathbb{Z}/p$-vectoriel $V^S$ des $v \in V$ tels que $Fv = v$ est un foncteur exact. L'hypothèse signifie donc que morphisme

$$K \longrightarrow L^S$$

est un quasi-isomorphisme. Reste à prouver que le foncteur S commute au foncteur $\Gamma^n$ . Ce point résulte aisément du lemme bien connu suivant, dont la démonstration est laissée au lecteur :

Lemme 5.5.37. Un vectoriel de dimension finie V sur un corps parfait k, muni d'un endomorphisme p-linéaire F, admet une et une seule décomposition

$$V = V_o + V_n$$

avec $V^S \otimes k \xrightarrow{\sim} V_o$, $F(V_n) \subset V_n$ et $F|V_n$ nilpotent.

Ceci achève la démonstration de 5.5.21.

6. Le foncteur $f_!$ .

On se propose de donner une construction directe du foncteur $f_!$ de 5.1.11. On utilisera ensuite cette construction pour définir le "morphisme trace" (6.2.3 ) pour les morphismes plats quasi-finis de présentation finie.

6.1. Nouvelle construction du foncteur $f_!$ .

Soit $f : X \longrightarrow S$ un morphisme localement de type fini. Une partie P de X est dite propre sur S si elle est l'image d'un sous-schéma de X propre sur S .

Proposition 6.1.1. Soit $f : X \longrightarrow S$ un morphisme localement de type fini et quasi-séparé.

(i) Une partie de X propre sur S est localement fermée, et est fermée si f est séparé.

(ii) Si f est séparé, la réunion de deux parties de X propres sur S est propre sur S.

(iii) Pour tout S-schéma U , désignons par $\phi_X(U)$ l'ensemble des parties de $U \times_S X$ propres sur U . Le foncteur $\phi_X$ est un faisceau pour la topologie fpqc. Si f est séparé, $\phi$ est un faisceau d'ensembles ordonnés filtrants pour la relation d'inclusion.

Les assertions (i) et (ii) sont triviales, et la seconde assertion de (iii) résulte de (ii). Le foncteur $U \longmapsto \mathcal{P}(U \times_S X)$ est un faisceau pour toute topologie pour laquelle les recouvrements soient surjectifs. Il résulte de EGA IV 2.3.14 et EGA IV 2.7.1 (vii) que $\phi_X$ en est un sous-faisceau.

Si $\mathfrak{F}$ est un faisceau étale d'ensembles pointés sur un schéma X, rappelons (IV 8.5.2) que le support d'une section s de $\mathfrak{F}$ est le complémentaire du plus grand ouvert où s = O, O désignant la section marquée.

Définition 6.1.2. Soient $f : X \longrightarrow S$ un morphisme localement de type fini et séparé, et $\mathfrak{F}$ un faisceau d'ensembles pointés sur X. On désigne par $f_! \mathfrak{F}$ le sous-faisceau de $f_* \mathfrak{F}$ dont les sections sur U (étale sur S) sont les sections de $\mathfrak{F}$ sur $U \times_S X$ à support propre sur U.

Il résulte de 6.1.1 que $f_! \mathfrak{F}$ est effectivement un faisceau.

On vérifie aisément que :

Lemme 6.1.3. Si f est le composé g h de deux morphismes séparés localement de type fini, il existe un et un seul isomorphisme de foncteur $f_! \xrightarrow{\sim} g_! h_!$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} f_! & \xrightarrow{\sim} & g_! h_! \\ \downarrow & & \downarrow \\ f_* & = & g_* h_* \end{array} .$$

Si f est une immersion ouverte (resp. un morphisme propre) le foncteur $f_!$ est le foncteur de prolongement par zéro (resp. le foncteur $f_*$). D'après 6.1.3, les définitions 6.1.2 et 5.1.11 coïncident donc dans leur domaine commun de validité.

Les propriétés du foncteur $f_!$ vérifiées dans le § 5 restent valable dans le cas plus général 6.1.2 .

Proposition 6.1.4. Soit $f : X \longrightarrow S$ un morphisme séparé localement de type fini.

(i) Le foncteur $f_!$ est exact à gauche (i.e. commute aux limites projectives finies) et commute aux limites inductives filtrantes.

(ii) Si f est quasi-fini, le foncteur $f_!$ est un foncteur exact de la catégorie des faisceaux abéliens sur X dans celle des faisceaux abéliens sur S .

(iii) Pour tout diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S' & \xrightarrow{g} & S \end{array}$$

il existe un isomorphisme de changement de base rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} g^* f_! & = & f'_! g'^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ g^* f_* & \longrightarrow & f'_* g'^* \end{array} ,$$

dans lequel la seconde flèche horizontale est la flèche de changement de base XII 4.1.

Preuve. Quel que soit $U \in \mathrm{Ob}\, S_{et}$, on a

$$f_! \mathfrak{F}(U) = \varinjlim_{P \in \Phi(U)} \Gamma_P(\mathfrak{F}) ,$$

et pour U quasi-compact quasi-séparé, le foncteur $\mathfrak{F} \longmapsto f_!\mathfrak{F}(U)$ commute aux limites projectives finies et aux limites inductives filtrantes, comme limite inductive filtrante (6.1.1) (iii) de foncteurs ayant ces propriétés.

Ceci prouve (i). L'assertion (ii) résulte aussitôt de (iii) (prendre comme changements de bases les points géométriques de S).

L'assertion (iii) est de nature locale sur S, qu'on peut supposer affine. Soit I l'ensemble ordonné filtrant des ouverts de X de type fini sur S. Si $U \xhookrightarrow{j} X$ est un ouvert de X, $(fj)_!(\mathfrak{F}|U) = f_!(j_!(\mathfrak{F}|U))$ s'envoie dans $f_!(\mathfrak{F}|U)$. De plus

$$f_!(\mathfrak{F}) = \varinjlim_{U \in I} (fj_!(\mathfrak{F}|U) \quad .$$

Ceci permet de supposer X de type fini sur S et d'appliquer le lemme de Chow (EGA II 2è éd. ) pour trouver un morphisme projectif et surjectif : $p^o : X^o \longrightarrow X$ tel que $fp_o$ soit compactifiable. Soit $X^1 = X^o \underset{X}{\times} X^o$ et $p^1$ la flèche naturelle de $X^1$ dans X. La suite

$$0 \longrightarrow \mathfrak{F} \longrightarrow p^o_* p^{o*}\mathfrak{F} \rightrightarrows p^1_* p^{1*}\mathfrak{F}$$

est exacte (VII 9.2).

Compte tenu de la fonctorialité de la flèche de changement de base, et de (i), il suffit de vérifier (iii) pour les faisceaux $p^o_* p^{o*}\mathfrak{F}$ et $p^1_* p^{1*}\mathfrak{F}$. Par le changement de notations ($p^1 \longmapsto p^o$)

on se ramène donc à supposer $\mathfrak{F}$ de la forme $p^{\circ}_{*}\,\mathcal{G}$ . L'assertion (iii) pour le couple $(f, p^{\circ}_{*}\,\mathcal{G})$ équivaut à l'assertion (iii) pour les couples $(p^{\circ}_{*}\,\mathcal{G})$ et $(f\,p^{\circ}_{*},\ \mathcal{G})$. On conclut par 5.2.7 (i), applicable car $p^{\circ}$ et $fp^{\circ}$ sont compactifiables.

Contre-exemple 6.1.6. Le foncteur $Rf_!$ ne coïncide en général pas avec le foncteur dérivé du foncteur $f_!$ . Si X est affine sur un corps algébriquement clos k, on a en effet

$$f_!\,\mathfrak{F} = \sum_{x\in X(k)} H^{\circ}_{x}(\mathfrak{F}) \quad ,$$

et le $i^{\text{ème}}$ foncteur dérivé de $f_!$ vaut donc en $\mathfrak{F}$

$$\sum_{x\in X(k)} H^{i}_{x}(\mathfrak{F}) \quad .$$

Par contre, si X est lisse et irréductible, et de dimension 1,

$$H^{2}_{c}\,(X, \mu_{\ell^n}) \simeq \mathbb{Z}/_{\ell^n}$$

pour $\ell$ premier à la caractéristique de k .

6.2. Le morphisme trace en dimension relative 0 .

Le résultat principal de ce n° est le théorème 6.2.3. Il est recommandé au lecteur de ne pas lire les préliminaires techniques 6.2.1, 6.2.2. Ceux-ci permettent, dans la démonstration de 6.2.3, de ne considérer que des morphismes f finis, réduction qui, via EGA IV 18.12. est de toute façon assez évidente .

6.2.1. Soit $f : X \longrightarrow S$ un morphisme quasi-fini séparé. Quel que soit $U \in \mathrm{Ob}\, S_{et}$, désignons par $\Psi_f(U)$ la catégorie des couples formés d'un ensemble pointé fini I, de point marqué noté 0, et d'une décomposition de $f^*U$ en parties ouvertes et fermées $f^*U = \coprod_{i\in I} V_i$, avec $V_i$ fini sur U pour $i \neq 0$. Un morphisme de $\varphi = (V_i)_{i\in I}$ dans $\varphi' = (V'_i)_{i\in I'}$ est un morphisme $\sigma$ de I' dans I tel que pour $i \in I$, on ait $V_i = \bigcup_{j\in\sigma^{-1}(i)} V'_j$. On dit que $\varphi'$ raffine $\varphi$ s'il existe un morphisme de $\varphi$ dans $\varphi'$.

Soient $\mathfrak{F}$ un faisceau de groupes abéliens sur S, $U \in \mathrm{Ob}\, S_{et}$, $\varphi = (V_i)_{i\in I} \in \mathrm{Ob}\, \Psi_f(U)$, $I^* = I \smallsetminus \{0\}$, et $f_i$ la projection de $V_i$ sur U. On a

$$f_! f^* \mathfrak{F}|U = f_{0!} f_0^*(\mathfrak{F}|U) \oplus \bigoplus_{i\neq 0} f_{i*} f_i^*(\mathfrak{F}|U),$$

d'où une flèche composée

$$\tau_\varphi : \mathfrak{F}^{I^*}|U \longrightarrow \bigoplus_{i\neq 0} f_{i*} f_i^*(\mathfrak{F}|U) \longrightarrow f_! f^* \mathfrak{F}|U \qquad (6.2.1.1)$$

Si $\sigma : I \longrightarrow J$ est un morphisme d'ensembles pointés, on désigne par ${}^t\sigma : \mathfrak{F}^{J^*} \longrightarrow \mathfrak{F}^{I^*}$ la flèche de coordonnées ${}^t\sigma^i_j = \mathrm{Id}$ si $\sigma(i) = j$, et ${}^t\sigma^i_j = 0$ si $\sigma(i) \neq j$. Si $\sigma : I' \longrightarrow I$ est un morphisme de $\varphi$ dans $\varphi'$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{F}^{I^*}|U & \xrightarrow{\ {}^t\sigma\ } & \mathfrak{F}^{I'^*}|U \\ & {\scriptstyle \tau_\varphi} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \tau_{\varphi'}} & \\ & f_! f^* \mathfrak{F}|U & \end{array} \qquad (6.2.1.2)$$

est commutatif. De plus, ${}^t(\sigma\rho) = {}^t\rho\,{}^t\sigma$ . Les $\Psi_f(U)$ forment une catégorie fibrée $\Psi_f$ sur $S_{et}$ ; les constructions précédentes commutent à la localisation et définissent donc un $S_{et}$-foncteur $\varphi = (V_i)_{i \in I} \in \Psi_f(U) \longmapsto \mathfrak{F}^{I*}|U$ de $\Psi$ dans la $S_{et}$-catégorie des faisceaux sur des ouverts étales de S, et un morphisme de foncteurs $\tau_\varphi : \mathfrak{F}^{I*}|U \longrightarrow f_! f^* \mathfrak{F}|U$ .

Proposition 6.2.2. (i) La catégorie $\Psi_f$ est localement filtrante à droite (IV 14 ) sur $S_{et}$ .

(ii) Les flèches (6.2.1.1) définissent un isomorphismes

$$\tau : \varinjlim_{\varphi=(V_i)_{i\in I} \in \Psi_f(U)} \mathfrak{F}^{I*}|U \xrightarrow{\sim} f_! f^* \mathfrak{F} \quad .$$

Si S est strictement local de point fermé s, le S-schéma X admet une décomposition $\varphi \in \Psi_f(S)$ en parties ouvertes et fermées $X = \coprod_{i\in I} X_i$ indexée par un ensemble pointé I telle que la fibre de $X_o$ en s soit vide, que les $X_i (i \neq 0)$ soient finis sur S et que la fibre de $X_i (i \neq 0)$ en s soit réduite à un point (EGA IV 18.12.1). Une telle décomposition est un élément final de $\Psi(S)$. De plus, en vertu de 6.1.4 (iii) (ou parce que c'est évident) la fibre en s de la flèche $\tau_\varphi$ (6.2.1.1) est un isomorphisme.

Dans le cas général, soit x un point géométrique de S et $\Psi_x$ la fibre de $\Psi_f$ en x ,

$$\Psi_x = \varinjlim_{U(x)} \Psi_f(U) \quad ,$$

pour U voisinage étale de x . Soit $S_x$ le localisé strict de S en x , $X_x = X \times_S S_x$ et $f_x : X_x \longrightarrow S_x$ . Les sorites de passage à la limite

montrent que la catégorie $\Psi_x$ est équivalente à la catégorie $\Psi_{f_x}(S_x)$, donc filtrante à droite. Il en résulte que $\Psi$ est localement filtrante à droite. De plus, la fibre en x de $\tau$ s'identifie à la flèche

$$\tau_x : \varinjlim_{\Psi_x} \mathfrak{F}_x^{I_x} \longrightarrow (f_! f^* \mathfrak{F})_x$$

et, d'après ce qui précède, cette flèche est un isomorphisme.

Théorème 6.2.3. On peut d'une et d'une seule façon définir, pour tout morphisme $f : X \longrightarrow S$, séparé, plat de présentation finie et quasi-fini, et tout faisceau abélien $\mathfrak{F}$ sur S, un morphisme trace

$$Tr_f : f_! f^* \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{F}$$

de sorte que les conditions suivantes soient vérifiées :

(Var 1) $Tr_f$ est fonctoriel en $\mathfrak{F}$ .

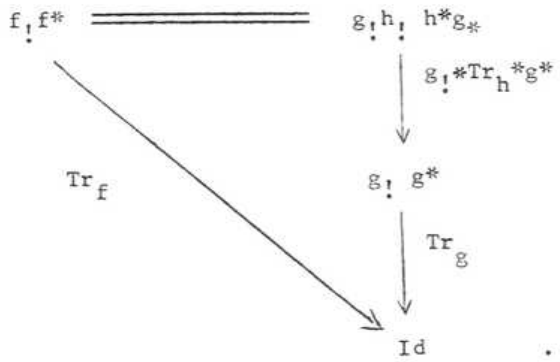
(Var 2) $Tr_f$ est compatible à tout changement de base, i.e. pour tout diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S' & \xrightarrow{g} & S \end{array}$$

le diagramme de foncteurs suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} f'_! f'^* g^* & = & f'_! g'^* f^* & = & g^* f_! f^* \\ \downarrow{\scriptstyle Tr_{f'} * g^*} & & & & \downarrow{\scriptstyle g^* * Tr_f} \\ g^* & = & = & = & g^* \end{array}$$

(Var 3) $Tr_f$ est compatible avec la composition, i.e. si f est le composé f = gh de deux morphismes séparés, plats, de présentation finie et quasi-finis, le diagramme suivant est commutatif :




(Var 4) (Normalisation). Si f est fini de rang constant n , l'homomorphisme composé

$$\mathcal{F} \longrightarrow f_* f^* \mathcal{F} = f_! f^* \mathcal{F} \xrightarrow{Tr_f} \mathcal{F}$$

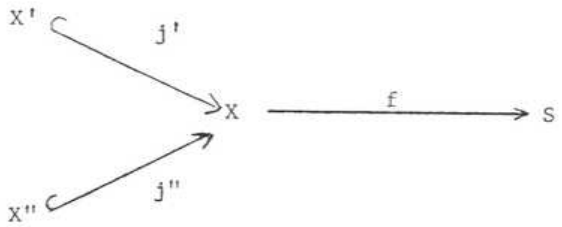
est la multiplication par n .

Notons tout d'abord que les conditions (Var 2) à (Var 4) impliquent que

Lemme 6.2.3.1. Si $X = X' \amalg X''$ alors, posant $f' = f|X'$ et $f'' = f|X''$, le morphisme $Tr_f$ :

$$f_! f^* \mathcal{F} = f'_! f'^* \mathcal{F} \oplus f''_! f''^* \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$$

est somme de $Tr_{f'}$ et $Tr_{f''}$ .



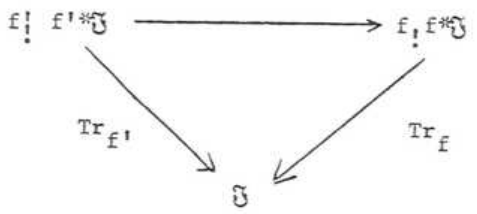

Si on applique (Var 2) à j', pour le changement de base par j', et (Var 4) pour l'application identique, on voit que

$$Tr_{j'} : j'_! j'^* f^* \mathfrak{F} \longrightarrow f^* \mathfrak{F}$$

est l'application canonique définie par la décomposition de $f^*\mathfrak{F}$ en somme directe

$$f^*\mathfrak{F} = j'_! j'^* f^* \mathfrak{F} \oplus j''_! j''^* f^* \mathfrak{F} \quad .$$

Si on applique (Var 3) à $f' = f \circ j'$, on voit que le diagramme suivant est commutatif




ce qui, joint à l'énoncé analogue pour f", n'est autre que 6.2.3.1 .

Soit $f : X \longrightarrow S$ un morphisme quasi-fini séparé plat de présentation finie. Quel que soit $U \in \mathrm{Ob}\ S_{et}$, soit $\psi'_f(U)$ la sous-catégorie pleine de $\psi_f(U)$ (6.1.1) formée des décompositions $(V_i)_{i \in I}$ telle que, pour $i \neq 0$, $V_i$ soit localement libre de rang constant sur U . Les

catégories $\Psi_f^!(U)$ forment une sous-catégorie fibrée de $\Psi_f$, cofinale dans $\Psi_f$.

Soient $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{G}$ des faisceaux abéliens sur S. D'après 6.2.2 (ii), il revient au même de se donner un morphisme $g : f_! f^* \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{G}$ ou de se donner, pour chaque décomposition $\varphi = (V_i)_{i \in I} \in \Psi_f^!(U)$, un morphisme $g_\varphi : \mathfrak{F}^{I*}|U \longrightarrow \mathfrak{G}|U$, compatible aux morphismes ${}^t\sigma$ de (6.2.1.2). Si $f_i$ est la projection de $V_i$ sur U, $g_\varphi$ est la flèche de coordonnées les flèches composées :

$$g_\varphi^i : \mathfrak{F}|U \longrightarrow f_{i*} f_i^* \mathfrak{F}|U \longrightarrow f_! f^* \mathfrak{F}|U \xrightarrow{g} \mathfrak{G}|U .$$

On en déduit qu'il existe une et une seule flèche $Tr_f$, compatible à la localisation étale et vérifiant (Var 4) et 6.2.3.1. Il est clair que cette flèche vérifie (Var 1) et (Var 2).

Pour vérifier (Var 3), on se ramène par changement de base au cas facile où S est le spectre d'un corps algébriquement clos.

6.2.4. Une pondération d'un morphisme quasi-fini séparé $f : X \longrightarrow S$ est la donnée, pour chaque point géométrique x de X d'un entier n(x), ne dépendant que du point de X image de x, cette donnée vérifiant :

(*) Quels que soient $U \in \mathrm{Ob}\, S_{et}$ et la partie ouverte et fermée $X_1$ de $f^{-1}(U)$, finie sur U, la fonction qui à chaque point géométrie s de U associe le nombre $\sum_{x \in X_1(s)} n(x)$ est localement constante.

Si $f = g\,h$ est le composé de deux morphismes pondérés, on pondère f en posant $n_f(x) = n_h(x).n_g(h(x))$.

Si le morphisme f' se déduit par un changement de base g d'un morphisme pondéré f, on pondère f' en posant $n_{f'}(x) = n_f(g'(x))$.

Les arguments qui précèdent prouvent en fait :

Proposition 6.2.5. On peut d'une et d'une seule façon définir, pour tout morphisme quasi-fini séparé pondéré $f : X \longrightarrow S$ et tout faisceau abélien $\mathfrak{F}$ sur S, un morphisme trace $Tr_f : f_! f^*\mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{F}$, qui soit fonctoriel en $\mathfrak{F}$, compatible aux changements de base et à la composition, et vérifie :

(Var'4) Si f est fini et s'il existe un entier n tel que, pour tout point géométrique s de S, on ait $\sum_{x \in X(s)} n(x) = n$, alors la flèche composée

$$\mathfrak{F} \longrightarrow f_* f^*\mathfrak{F} = = = f_! f^*\mathfrak{F} \xrightarrow{Tr_f} \mathfrak{F}$$

est la multiplication par n .

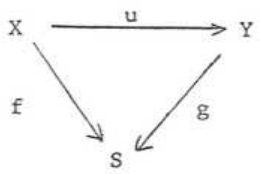
Exemple 6.2.6. Soient S un schéma noethérien géométriquement unibranche (par exemple normal), et $f : X \longrightarrow S$ un morphisme quasi-fini séparé. Pour tout point géométrique x de X d'image s dans S, soit $\mathcal{O}_x$ (resp. $\mathcal{O}_s$) l'anneau strictement local de X en x (resp. de S en s). Le schéma $\mathbf{S}pec(\mathcal{O}_s)$ est réduit et a un unique point maximal $\eta$ . De plus, $\mathcal{O}_x$ est fini sur $\mathcal{O}_s$ . On pose $n(x) = rg_\eta(\mathcal{O}_x)$. On vérifie que n(x) est une pondération de f, d'où un morphisme trace $Tr_f$ .

6.2.7. Soit $u : X \longrightarrow Y$ un morphisme séparé quasi-fini plat de présentation finie. Le morphisme trace (6.2.3) étant fonctoriel, il définit, pour tout complexe de faisceaux abéliens K sur Y, un morphisme de complexes

(6.2.7.1) $\qquad Tr_u : u_! u^* K \longrightarrow K \quad .$

On appellera encore, au choix, <u>morphisme trace</u>, <u>morphisme de Gysin</u> ou <u>morphisme</u> $u_*$ tout morphisme déduit de (6.2.7.1) ou 6.2.3 par application d'un foncteur. Par exemple les suivants.

Soit un diagramme commutatif




avec g séparé localement de type fini. Pour tout faisceau abélien $\mathfrak{F}$ sur Y, le morphisme trace définit un morphisme

(6.2.7.2) $\qquad Tr_u \text{ ou } u_* : f_! u^* \mathfrak{F} \simeq g_! u_! u^* \mathfrak{F} \xrightarrow{g_!(Tr_u)} g_! \mathfrak{F} \quad .$

Si g est compactifiable, et si K est un complexe borné inférieurement à cohomologie de torsion, ou un complexe de $g^* \mathcal{A}$-modules pour $\mathcal{A}$ faisceau d'anneaux de torsion sur S, le morphisme trace (6.2.7.1) induit de même

(6.2.7.3) $\qquad Tr_u \text{ ou } u_* : Rf_! u^*K \simeq Rg_! u_! u^*K \xrightarrow{Rg_!(Tr_u)} Rg_! K \ ,$

(6.2.7.4) $\qquad Tr_u \text{ ou } u_* : R^q f_! u^*K \simeq R^q g_! u_! u^*K \xrightarrow{R^q g_!(Tr_u)} R^q g_! K \quad .$

Pour S spectre d'un corps algébriquement clos,(6.2.7.4) est un morphisme

(6.2.7.5) $$u_* : \mathbf{H}^q_c(X, u^*K) \longrightarrow \mathbf{H}^q_c(Y, K) \quad .$$

On voit donc que la cohomologie à supports propres présente un caractère covariant vis-à-vis des morphismes quasi-finis.

6.2.8. Soient $u : X \longrightarrow Y$ comme en 6.2.7, $\Delta_n = [0,n]$ l'ensemble type à $n+1$-éléments et $X_n$ le produit fibré itéré $(n+1)^{\text{uple}}$ de X au-dessus de Y . Les $X_n$ forment un schéma simplicial augmenté vers Y (cf. $VI_B$). On désignera par $u_n : X_n \longrightarrow Y$ le morphisme d'augmentation. Si $\mathfrak{F}$ est un faisceau abélien sur Y, les faisceaux $\mathfrak{F}_n = u_{n!}\, u_n^*\mathfrak{F}$ forment, en vertu(6.2.7.2)(appliqué après le changement de langage $S \longrightarrow Y$, $X \longrightarrow X_n$, $Y \longrightarrow Y$ ou $X_m$), un faisceau simplicial augmenté vers $\mathfrak{F}$ . Le faisceau différentiel des "chaînes non dégénérées" de ce faisceau simplicial a par définition pour $n^{\text{ième}}$ composante le quotient de $\mathfrak{F}_n$, conoyau de la somme directe des opérateurs de dégénérescence de but $\mathfrak{F}_n$ et des morphismes $\sigma - \varepsilon(\sigma)$ pour $\sigma$ opérateur de symétrie.

Proposition 6.2.9. Sous les hypothèses précédentes, pour u étale séparé de type fini surjectif et pour tout faisceau abélien $\mathfrak{F}$ sur Y, on a

(i) Les faisceaux $\mathfrak{F}_n$ forment une résolution (gauche) de $\mathfrak{F}$ .

(ii) Le complexe différentiel des chaînes non dégénérées du faisceau simplicial $(\mathfrak{F}_n)$ est une résolution (gauche) de $\mathfrak{F}$ . Si les fibres géométriques de u ont toutes au plus d points, cette résolution est de longueur $\leq d$ .

Par changement de base, il suffit de vérifier cet énoncé pour Y le spectre d'un corps algébriquement clos, auquel cas 6.2.8 se ramène au calcul de l'homologie simplicial d'un simplexe.

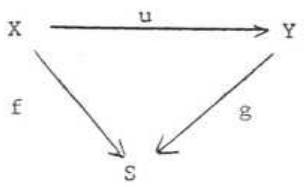
Soient $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert fini du schéma Y, $\mathfrak{F}$ un faisceau abélien sur Y et, pour chaque partie P de I, soit $j_P$ l'inclusion de $U_P = \bigcap_{i\in P} U_i$ dans X. Supposons choisi un ordre total sur I. Si $X = \coprod_{i\in I} U_i$ et si u est la projection de X sur Y, la résolution 6.2.9 (ii) de $\mathfrak{F}$ est donnée par

$$(6.2.9.1) \qquad (\mathfrak{F}_n)_{n \text{ dég}} = \bigoplus_{|P|=n+1} j_{P!}\, j_P^*\, \mathfrak{F} \quad .$$

Cette résolution garde un sens pour I infini.

6.2.10. Sous les hypothèses de 6.2.9, soient $\mathcal{A}$ un faisceau d'anneaux de torsion sur Y et $K \in Ob^-(Y,\mathcal{A})$. On annèle X par $u^*\mathcal{A}$. La résolution 6.2.9 (i) (resp. 6.2.9 (ii)), étant fonctorielles en $\mathfrak{F}$, définit une résolution de K par un double complexe $K_1$. Cette résolution s'appelle <u>la résolution de Cech extraordinaire</u> (resp. <u>extraordinaire alternée</u>) de K.

Soit un diagramme commutatif




,

avec g compactifiable. Avec les notations de 6.2.8, si $f_n$ est la projection de $X_n$ sur S, on a $Rf_{n!} = Rg_!\, U_{n!}$. Le complexe $K_1$, filtré

par le degré semi-simplicial, définit donc une suite spectrale

$$(6.2.10.1) \qquad E_1^{-p,q} = R^q f_{p!}\,(u_p^*\,K) \Longrightarrow R^{-p+q}\,g_!\,K\ ,$$

Les différentielles $d_1$ proviennent des flèches simpliciales, de sorte que

$$(6.2.10.2) \qquad E_2^{-p,q} = \check{\mathcal{H}}^p\,(R^q f_{p!}\,(u_p^*\,K)) \Longrightarrow R^{-p+q}\,g_!\,K\ .$$

Sous les hypothèses de (6.2.9.1), on trouve de même une suite spectrale

$$(6.2.10.3) \qquad E_1^{-p,q} = \bigoplus_{|P|=p+1} R^q f_{p!}\,(j_P^*\,K) \Longrightarrow R^{-p+q}\,g_!\,K\ .$$

Les suites spectrales (6.2.10.1) et (6.2.10.3) s'appellent les <u>suites spectrales de localisation en haut</u>.

<u>Proposition</u> 6.2.11. <u>Si</u> f <u>est un morphisme étale, séparé de type fini, le foncteur</u> $f_!$ <u>est un adjoint à gauche du foncteur</u> f*, <u>et admet le morphisme trace pour flèche d'adjonction</u>.

On sait que si X est un objet d'un site S, le foncteur f* de restriction des faisceaux abéliens à X admet un adjoint à gauche $f_!$. Si F est un faisceau abélien sur X, $f_!$ F est le faisceau engendré par le préfaisceau

$$V \longrightarrow \bigoplus_{\xi \in \mathrm{Hom}(V,X)} F(\xi)\ .$$

Dans le cas étale, notons provisoirement ce foncteur $f_!''$. De sa propriété d'adjonction résulte aussitôt que sa formation commute à tout changement de base. Le morphisme trace définit un morphisme t de $f_!\,\mathfrak{F}$ dans $f_!^0\,\mathfrak{F}$,

compatible à tout changement de base. Il suffit de voir que t est un isomorphisme fibre par fibre, i.e. pour S spectre d'un corps séparablement clos, où cela est trivial.

6.2.11.1. On prendra garde que cette interprétation de $f_!^o$ est specifique au cas du site étale et ne s'étend pas au site fpqf d'un préschéma, par exemple.

6.3. Variante de la trace pour des coefficients continus.

On démontre dans ce n° les assertions de GROTHENDIECK [1, n°6], et on applique ces résultats à la définition d'un "morphisme trace" pour des faisceaux fppf convenables.

6.3.1. Soit A un anneau commutatif. Si L et M sont deux A-modules projectifs de type fini, l'application $u \longmapsto \overset{m}{\wedge} u$, de Hom(L,M) dans $\mathrm{Hom}(\overset{m}{\wedge} L, \overset{m}{\wedge} M)$, est compatible à tout changement de base et m-ique (5.5.2). D'après 5.5.2 , elle définit un morphisme

$$(6.3.1.1) \qquad \overset{m}{\wedge} : \Gamma^m \mathrm{Hom}(L,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\overset{m}{\wedge} L, \overset{m}{\wedge} M)$$

tel que, après tout changement de base, pour $u \in \mathrm{Hom}(L,M)$, on ait $\overset{m}{\wedge}(\gamma^m(u)) = \overset{m}{\wedge} u$ . Puisque Hom(L,M) est plat, ce morphisme s'identifie (5.5.2) à un morphisme

$$(6.3.1.2) \qquad \overset{m}{\wedge} : TS^m \mathrm{Hom}(L,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\overset{m}{\wedge} L, \overset{m}{\wedge} M) \quad .$$

N.B. On peut aussi définir un tel homomorphisme dès que 2 est inversible dans A : un élément symétrique de $\overset{m}{\otimes} \mathrm{Hom}(L,M)$ définit un homomorphisme symétrique de $\overset{m}{\otimes} L$ dans $\overset{m}{\otimes} M$, et celui-ci passe au quotient pour définir un homomorphisme de $\overset{m}{\wedge} L$ dans $\overset{m}{\wedge} M$ .

Etant donnés trois A-modules projectifs de type fini, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Gamma^m \mathrm{Hom}(L,M) \otimes \Gamma^m \mathrm{Hom}(M,N) & \longrightarrow & \Gamma^m \mathrm{Hom}(L,N) \\ \downarrow {\scriptstyle \wedge^m \otimes \wedge^m} & & \downarrow {\scriptstyle \wedge^m} \\ \mathrm{Hom}(\wedge^m L, \wedge^m M) \otimes \mathrm{Hom}(\wedge^m M, \wedge^m N) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\wedge^m L, \wedge^m N) \end{array} \qquad (6.3.1.3)$$

dans lequel les flèches horizontales sont déduites des flèches de composition (et, pour la première, de (5.5.2.8 )), est commutatif. Ceci traduit la formule $\wedge^m(vu) = \wedge^m v \circ \wedge^m u$ .

Si L est un A-module libre de rang n, (6.3.1.2) définit un morphisme canonique

$$\det : \Gamma^n \mathrm{End}_A(L) = TS^n \mathrm{End}_A(L) \longrightarrow A \quad , \qquad (6.3.1.4)$$

qui est un homomorphisme d'algèbres d'après 6.3.1.3. Par définition, on a

$$\det(u^{\otimes n}) = \det(u ; L) \quad . \qquad (6.3.1.5)$$

Si L est de plus un module sur une A-algèbre B, (6.3.1.4) définit par composition un homomorphisme d'algèbres

$$\det_L : TS^n_A(B) \longrightarrow A \quad . \qquad (6.3.1.6)$$

Lemme 6.3.2. Supposons que L s'insère dans une suite exacte

$$F : 0 \longrightarrow L' \longrightarrow L \longrightarrow L'' \longrightarrow 0$$

avec L' (resp. L") localement libre de rang $n_1$ (resp. $n_2$). Soient $n = n_1 + n_2$ , $\alpha$ le morphisme "gradué associé" du groupe End(E) des

endomorphismes de l'extension E dans $\mathrm{End}(L') \oplus \mathrm{End}(L'')$ et, pour X et Y deux A-modules plats, soit $\beta$ le morphisme de $TS^n(X \oplus Y)$ dans $TS^{n_1}(X) \otimes TS^{n_2}(Y)$ déduit de l'isomorphisme (5.5.2.6)

$$TS^n(X \oplus Y) \simeq \sum_{n'+n''=n} TS^{n'_1}(X) \otimes TS^{n''}(Y) \quad .$$

Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} TS^n(\mathrm{End})(E)) & \xrightarrow{TS^n(\alpha)} & TS^n(\mathrm{End}(L') \oplus \mathrm{End}(L'')) & \xrightarrow{\beta} & TS^{n_1}(\mathrm{End}(L')) \otimes TS^{n_2}(\mathrm{End}(L'') \\ \downarrow & & & & \downarrow \det \otimes \det \\ TS^n(L) & & \xrightarrow{\qquad\qquad \det \qquad\qquad} & & A \end{array} \quad .$$

D'après la propriété universelle 5.5.2 de $TS^n$, il suffit de vérifier que pour $u \in \mathrm{End}(E)$ les deux images de $u^{\otimes n}$ coïncident. Si $\alpha(u) = (u', u'')$, ces images sont respectivement $\det(u)$ et $\det(u').\det(u'')$, d'où la conclusion.

Lemme 6.3.3. Soient A un anneau, B une A-algèbre, C une B-algèbre non nécessairement commutative, E un B-module libre de rang n sur A, et F un C-module libre de rang m sur B . On suppose C plat sur A . D'après la propriété universelle 5.5.2.2 de $\Gamma^{nm}$ et 5.5.2.3, il existe une unique flèche $\sigma : TS^{nm}_A(C) \longrightarrow TS^n_A\, TS^n_B(C)$ telle qu'après tout changement d'anneaux $A \longrightarrow A'$, on ait $\sigma(c^{\otimes nm}) = (c^{\otimes m})^{\otimes n}$ . Le diagramme suivant est alors commutatif :

$$\begin{array}{ccc} TS_A^n(B) & \xleftarrow{TS_A^n(\det_F)} & TS_A^n\, TS_B^m(C) \\ \downarrow{\scriptstyle \det_E} & & \uparrow{\scriptstyle \sigma} \\ A & \xleftarrow{\det_E \otimes_B F} & TS_A^{nm}(C) \end{array} .$$

Preuve. D'après 5.5.2.2 et 5.5.2.3, il suffit de montrer que les deux images d'un élément $u^{\otimes nm}$ de $TS_A^{nm}(C)$ coïncident. Ces images sont $\det_E(\det_F(u))$ et $\det_{E \otimes_B F}(u)$ ; elles s'expriment en termes de A, B, E, F et $u \in End_B(F)$ et, pour vérifier qu'elles coïncident, on peut au préalable remplacer B par son image (commutative) $B_1$ dans End(E), et F par $F \otimes_B B_1$ . La formule à prouver est alors la formule de calcul par bloc des déterminants (BOURBAKI, Alg. Ch. 8 § 12 lemme 2 p.140).

Lorsque C n'est plus nécessairement plat sur A, la même démonstration fournit plus généralement un diagramme commutatif d'algèbres

(6.3.3.1)
$$\begin{array}{ccc} \Gamma_A^n(B) & \xleftarrow{\Gamma_A^n(\det_F)} & \Gamma_A^n\, \Gamma_B^n(C) \\ \downarrow{\scriptstyle \det_E} & & \uparrow{\scriptstyle \sigma} \\ A & \xleftarrow{\det_E \otimes_B F} & \Gamma_A^{nm}(C) \end{array} .$$

6.3.4. Si B est une A-algèbre commutative, $Spec(TS^n(B))$ n'est autre que la puissance symétrique $n^{ième}$ de Spec(B) sur Spec(A), i.e. le quotient de $(Spec(B)/\ Spec(A))^n$ par le groupe symétrique (SGA 1 IV 3).

Si X est un S-schéma séparé, on dira qu'un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent $\mathfrak{F}$ sur X est fini localement libre (resp. et de rang n) sur S si son support est fini sur S et si son image directe est localement libre de rang fini (resp. de rang n) sur S . Par support de $\mathfrak{F}$ , on entendra encore le sous-schéma de X défini par l'annulation de $\mathfrak{F}$ (qui est un Idéal quasi-cohérent, $\mathfrak{F}$ étant quasi-cohérent de type fini).

Si $\mathfrak{F}$ est fini localement libre sur S, de rang n et de support E, le schéma E est affine sur S ; par globalisation sur S, $\mathfrak{F}$ définit, via (6.3.1.6), une section $\sigma_E(\mathfrak{F})$ de $\mathrm{Sym}^n_S(E)$, d'où, par fonctorialité, une section $\sigma(\mathfrak{F})$ de l'espace algébrique (*) $\mathrm{Sym}^n_S(X)$,

(6.3.4.1) $$\sigma(\mathfrak{F}) \in \Gamma(\mathrm{Sym}^n_S(X)/S) \quad .$$

En particulier, si $f : S' \longrightarrow S$ est fini localement libre de rang n, on obtient, pour $\mathfrak{F} = \mathcal{O}_{S'}$ , une section canonique

(6.3.4.2) $$t \in \Gamma(\mathrm{Sym}^n_S(S')/S) \quad .$$

Proposition 6.3.5. Soient X un schéma séparé sur S et $\mathfrak{F}_1$ , $\mathfrak{F}_2$ deux $\mathcal{O}_X$-modules finis localement libres de rang $n_1$ et $n_2$ sur S . On pose $n = n_1 + n_2$ . Soit d la flèche canonique $d : \mathrm{Sym}^{n_1}_S(X) \times \mathrm{Sym}^{n_2}_S(X) \longrightarrow \mathrm{Sym}^n_S(X)$. Si $\mathfrak{F}$ est une extension de $\mathfrak{F}_1$ par $\mathfrak{F}_2$ , on a

$$\sigma(\mathfrak{F}) = d(\sigma(\mathfrak{F}_1), \sigma(\mathfrak{F}_2)) \quad .$$

---

(*) M. ARTIN, Algebraization of formal moduli I . On n'aura à utiliser la construction précédente que lorsque $\mathrm{Sym}^n_S(X)$ existe en tant que schéma, ce qui est le cas pour X quasi-projectif sur S .

On peut remplacer X par le support (fini sur S) de $\mathfrak{F}_1 \oplus \mathfrak{F}_2$ et supposer S affine. Traduite en terme d'anneaux, la proposition résulte alors de 6.3.2.

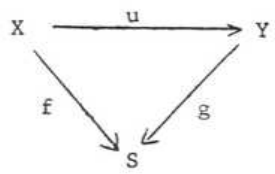
Lemme 6.3.6. Si X est un schéma séparé sur S, $\mathfrak{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module fini localement libre de rang n sur S et si $\mathfrak{L}$ est un faisceau inversible sur X, on a

$$\sigma(\mathfrak{F}) = \sigma(\mathfrak{F} \otimes \mathfrak{L}) \quad .$$

Remplaçons X par le support (6.3.4) de $\mathfrak{F}$ localement sur S, $\mathfrak{L}$ est alors isomorphe à $\mathcal{O}_X$, et l'assertion devient triviale.

Le lecteur vérifiera :

Proposition 6.3.7. Pour tout diagramme de S-schémas séparés sur S




,

et tout $\mathcal{O}_X$-module $\mathfrak{F}$ fini localement libre de rang n sur S, le $\mathcal{O}_Y$-module $u_* \mathfrak{F}$ est fini localement libre de rang n sur S, et

$$u(\sigma(\mathfrak{F})) = \sigma(u_* \mathfrak{F}) \quad .$$

6.3.7.1. Notons enfin que la construction des morphismes $\sigma$ (6.3.4.1) et t (6.3.4.2) est compatible à tout changement de base, ce qui a un sens d'après 5.5.2.7.

Application 1. Le cas des courbes lisses.

6.3.8. Soit $f : X \longrightarrow S$ une courbe lisse et quasi-projective sur S, i.e. un morphisme lisse quasi-projectif purement de dimension relative 1 . La théorie des schémas de Hilbert [GROTHENDIECK [1]) montre que le faisceau fpqc $\underline{\mathrm{Div}}^n_{X/S}$ qui, à chaque S-schéma S', associe l'ensemble des diviseurs relatifs sur $X' = X \times_S S'$ qui sont finis sur S et de degré n, est un faisceau représentable.

Pour chaque diviseur relatif E sur X, fini de degré n sur S, on dispose d'un élément canonique (6.3.4.3) $t(E) \in \mathrm{Sym}^n_S(E)$, d'image $\sigma(E)$ dans $\mathrm{Sym}^n_S(X)$. Cette construction, étant compatible à tout changement de base, définit

(6.3.8.1) $\quad \sigma : \underline{\mathrm{Div}}^n_{X/S} \longrightarrow \mathrm{Sym}^n_S(X) : E \longrightarrow \sigma(\mathcal{O}_E)$ .

Chaque section s de f définit un diviseur relatif fini sur S de degré 1, le diviseur s(S). Le morphisme

$$(X/S)^n \longrightarrow \underline{\mathrm{Div}}^n_{X/S} \; : \; (s_i)_{0<i\leq n} \longmapsto \Sigma\, s_i(S)$$

est symétrique, et induit donc un morphisme

(6.3.8.2) $\quad \alpha \; : \; \mathrm{Sym}^n_S(X) \longrightarrow \underline{\mathrm{Div}}^n_{X/S}$ .

Proposition 6.3.9. Les morphismes $\sigma$ et $\alpha$ de 6.3.8 sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre.

Preuve. a) $\sigma\,\alpha = \mathrm{Id}$ . Il suffit de prouver que la flèche composée

$$(X/S)^n \xrightarrow{\pi} \mathrm{Sym}^n_S(X) \xrightarrow{\alpha} \underline{\mathrm{Div}}^n_{X/S} \xrightarrow{\sigma} \mathrm{Sym}^n_S(X)$$

est $\pi$ . Pour n = 1, l'assertion est claire ; le cas général s'en déduit via le

Lemme 6.3.9.1. Avec les notations de 6.3.5 et (6.3.8.1), on a

$$\sigma (E + F) = d(\sigma(E), \sigma(F)) \quad .$$

Ce lemme résulte de 6.3.5, 6.3.6 et de la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-F) \otimes \mathcal{O}_E \longrightarrow \mathcal{O}_{E+F} \longrightarrow \mathcal{O}_F \longrightarrow 0 \quad .$$

b) On sait que $\underline{Div}^n_{X/S}$ est lisse sur S (il n'y a pas d'obstruction à relever infinitésimalement des diviseurs sur une courbe (cf. SGA 3 XI 1)). Le morphisme $\alpha \pi : (X/S)^n \longrightarrow \underline{Div}^n_{X/S}$ est un morphisme quasi-fini surjectif entre schéma lisses sur S de source à fibres équidimensionnelles. Il est donc plat (EGA $O_{IV}$ 17.3.5), donc $\alpha \pi$ est un épimorphisme de faisceaux fppf, donc $\alpha$ l'est aussi. Compte tenu de a), ceci achève la démonstration de 6.3.9.

Lemme 6.3.10. Soient k un anneau commutatif, M un k-module libre et u un endomorphisme de M . Désignons par $N_{\det(u-T)=0}$ la norme de $k[T]/\det(u-T)$ à k . Pour $P \in k[T]$, on a alors

$$N_{\det(u-T)=0} (P(T)) = \det(P(u), M) \quad .$$

Il s'agit de vérifier une identité algébrique entre les coefficients de la matrice de u et les coefficients de P . Pour prouver 6.3.10, il suffit donc (grâce à des arguments familiers) de traiter le cas où k est un corps algébriquement clos et où u est semi-simple, de valeurs propres $a_i$ .

On a alors

$$\det(u - T) = \prod (a_i - T)$$

$$N_{\det(u - T) = 0}(P(T)) = \prod P(a_i) \quad \text{et}$$

$$\det(P(u), M) = \prod P(a_i) \quad .$$

6.3.11.0. Soient $f: X \longrightarrow S$ un morphisme quasi-projectif, de présentation finie, plat à fibres purement de dimension 1 et Cohen-Macaulay ; ces conditions sont donc vérifiées si X est une courbe lisse quasi-projective sur S . Soit $\mathfrak{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module, fini localement libre sur S . Le module $\mathfrak{F}$ étant nul sur un ouvert dense fibre par fibre de X, on dispose d'une flèche canonique $\psi : \mathcal{O}_X \longrightarrow \det^*(\mathfrak{F})$ (SGA 6 XI ou MUMFORD [1 Ch. 5 § 3]). On désignera par $\delta(\mathfrak{F})$ le diviseur défini par l'idéal annulateur de coker $(\psi)$ (Ibidem) ; ce diviseur est fini sur S .

Proposition 6.3.11.1. Sous les hypothèses 6.3.11.0 et avec les notations de 6.3.8 et(6.3.4.1), si $\mathfrak{F}$ est de rang n, alors $\delta(\mathfrak{F})$ est de degré n et

$$\sigma(\mathfrak{F}) = \sigma(\delta(\mathfrak{F})) \quad .$$

Démonstration. a) Cas f lisse. On se ramène de façon standard au cas S local artinien à corps résiduel algébriquement clos. L'additivité (6.3.5) de $\sigma$ permet de supposer le support de $\mathfrak{F}$ concentré en un point rationnel x de X . On vérifie aussitôt que si T est une uniformisante en x, définissant $p : X \longrightarrow A^1_S$ , alors $p_*(\mathcal{O}_{S(\mathfrak{F})}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\delta(p_*\mathfrak{F})}$ (car les constructions effectuées commutent au passage au complété). On se ramène par là et 6.3.7 au cas où $X = A^1_S$ .

Si $X = \mathbb{A}^1_S$ et si S est affine, S = Spec(k), alors $\mathfrak{F}$ s'identifie à un k-module localement libre M, muni d'un endomorphisme u (l'action de T). Le module M, en tant que k[T]-module, admet la résolution

$$0 \longrightarrow k[T] \otimes_k M \xrightarrow{\varphi} k[T] \otimes_k M \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0 ,$$

où $\varepsilon(P \otimes m) = P(u)(m)$ et où $\varphi(1 \otimes m) = 1 \otimes um - T \otimes m$. De la formule $\varphi = u - T$, on déduit que le diviseur $\delta(\mathfrak{F})$ admet pour équation $\det(u - T, M) = 0$ .

Pour vérifier 6.3.11, il suffit de montrer que, après tout changement de base et pour toute $\varphi$ section de $\mathcal{O}_X$ , on a

$$\det_k(\varphi, M) = \det_k(\varphi, \mathcal{O}_{\delta(\mathfrak{F})}) \quad (= N_{\delta(\mathfrak{F})/S}(\varphi)) .$$

Pour f = P(T), c'est ce qu'affirme 6.3.10.

b) Cas général. Explicitons d'abord l'énoncé à prouver sous la forme plus concrète suivante :

Corollaire 6.3.11.2. Sous les hypothèses 6.3.11.0 sur f: X ⟶ S , soient M un module localement libre de type fini sur X, et u un endomorphisme de M tel que det u soit une section de $\underline{O}_X$ régulière sur chaque fibre $X_s$ (d'où résulte que Coker u = M/u(M) et Coker det u = $\underline{O}_X$/det u sont tous deux plats de présentation finie sur S et à fibres quasi-finies). Supposons que le support commun de ces faisceaux soit fini sur S, de sorte qu'ils définissent des faisceaux localement libres de type fini sur S. Alors pour toute section $\varphi$ de $\underline{O}_X$ , les déterminants par rapports à $\underline{O}_S$ de $\varphi$ opérant sur Coker u et sur Coker det u sont égaux :

(6.3.11.3) $$\det_S(\varphi, M/u(M)) = \det_S(\varphi, \underline{O}_X/\det u) .$$

On notera que cet énoncé implique l'égalité des rangs des deux Modules localement libres envisagés sur S, par raison d'homogénéité (lorsqu'on y remplace $\varphi$ par $T\varphi$ , T une section "indéterminée" de $\underline{O}_S$). D'ailleurs, remplaçant $\varphi$ par $1 + T\varphi$ , où j est une telle indéterminée (de façon précise, on fait un changement de base $S'=S[T] \longrightarrow S$), on déduit de(6.3.11.3) la formule en apparence plus générale

(6.3.11.4) $$\mathrm{Pol}_S(\varphi, M/uM)(T) = \mathrm{Pol}_S(\varphi, \underline{O}_X/\det u)(T)$$

sur les polynômes caractéristiques.

Pour prouver 6.3.11.3, nous allons nous ramener au cas lisse déjà prouvé. Par localisation étale sur S, on se ramène au cas où S est strictement local de point fermé s, puis par additivité on se ramène au cas où le support de M/u(M) a un seul point sur $X_s$ , soit x . Quitte à faire une extension plate de la base, on peut supposer l'extension résiduelle k(x)/k(s) triviale, et quitte à remplacer X par un voisinage assez petit de x, et à ajouter à $\varphi$ une fonction qui induise l'opération nulle sur M/u(M) et sur $\underline{O}_X/\det u$ (ce qui ne modifie pas la formule à prouver), on voit aisément qu'on peut supposer que $\varphi$ induit une section de $\underline{O}_{X_s}$ régulière en x, donc (quitte à rapetisser X) définitun morphisme quasi-fini et plat

$$p : X \longrightarrow X' = S[T] \quad .$$

Par localisation étale sur X et sur X', on peut donc supposer qu'on a un morphisme <u>fini</u> et <u>plat</u> p comme dessus, avec X' lisse sur S, et $\varphi = p^*(\varphi')$, où $\varphi'$ est une section de $\underline{O}_{X'}$ . Posons alors

...

$$M' = p_*(M) \quad , \quad u' = p_*(u) \ ,$$

$$P=\mathrm{Coker}\ u,\ Q = \mathrm{Coker}\ \det u \ ,$$

$$P'=\mathrm{Coker}\ u',\ Q'=\mathrm{Coker}\ \det u' \quad .$$

On sait qu'on a

$$\det u' = N_{X'/X} \det u, \text{ donc } Q' = \mathrm{Coker}\ N_{X'/X}(\det u) \quad .$$

On a trivialement

$$\det_S(\varphi,P) = \det_S(\varphi',P) \quad ,$$

et d'après la formule (6.3.11.3) prouvée dans le cas lisse,

$$\det_S(\varphi',P') = \det_S(\varphi',Q') \quad ,$$

de sorte qu'il reste à prouver la formule

$$\det_S(\varphi',Q') = \det_S(\varphi,Q) \quad ,$$

qui <u>équivaut</u> à la formule (6.3.11.3) à établir. On voit donc que la validité de celle-ci ne dépend que de la section $\det u$ de $\underline{O}_X$ , ou encore qu'elle équivaut à la même formule dans le cas où M est remplacé par $\underline{O}_X$ , et $\varphi$ par $\det u$ . Mais dans le cas $M=\underline{O}_X$ la formule (6.3.11.3) est tautologique ! Cela achève la démonstration.

Remarque 6.3.11.5. Dans le cas où S est artinien, l'égalité des rangs sur S de Coker u et Coker det u (notations de 6.3.11.2) est un cas particulier de EGA IV 21.10.17.3, dont (6.3.11.3) peut être considéré comme une version "relative".

Proposition 6.3.12. Soient X et Y deux courbes quasi-projectives de présentation finie, plates à fibres Cohen Macaulay sur S, et $u : X \to Y$ un morphisme quasi-fini et plat.

Le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{Div}}^n_{X/S} & \xrightarrow{u_*} & \underline{\mathrm{Div}}^n_{Y/S} \\ \downarrow{\scriptstyle \sigma_X} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_Y} \\ \mathrm{Sym}^n_S(X) & \xrightarrow{\mathrm{Sym}^n(u)} & \mathrm{Sym}^n_S(Y) \end{array}$$

est alors commutatif (*).

Puisque $u_*(D) = \delta(u_* \mathcal{O}_D)$, 6.3.12 réuslte de 6.3.7 et 6.3.11.1.

Application 2. Le morphisme trace.

6.3.13. Soit G un faisceau abélien sur le grand site fppf d'un schéma S (0.10). Supposons que G vérifie la condition suivante.

(6.3.13.1). Pour tout morphisme affine plat de présentation finie $f : X \longrightarrow Y$ de S-schémas, et pour tout entier $n \geq 1$, le morphisme

$$\mathrm{Hom}_S(\mathrm{Sym}^n_Y(X), G) \longrightarrow \mathrm{Hom}_S((X/Y)^n, G)$$

(*) Le morphisme $u_*$ est défini parce qu'on se limite aux diviseurs finis sur S. On prend par exemple pour définition $u_*(D) = \delta(u_* \mathcal{O}_D)$, formule qui coïncide avec EGA IV 21.5.5 pour u fini.

est injectif et a pour image l'ensemble des morphismes symétriques de $(X/Y)^n$ dans G.

Cette condition est stable par changement de base.

Soit $f : T \longrightarrow S$ un morphisme fini localement libre de rang n. Soit $pr_i$ la $i^{ème}$ projection de $(T/S)^n$ dans T, et t la section (6.3.4.3) de $Sym^n_S(T)$. Si $u \in G(T)$, alors $\Sigma\, pr_i^*(u)$ est un élément symétrique de $G(T/S)^n)$ et définit donc

$$u_n \in Sym^n_S(T) \quad .$$

On pose

$$Tr_f(u) = t^*(u_n) \quad .$$

Lorsque f est fini localement libre, on définit $Tr_f(u)$, localement sur S, par la formule précédente. Cette construction est compatible à tout changement de base et définit donc un morphisme trace

(6.3.13.2) $$Tr_f : f_* f^*G \longrightarrow G \quad .$$

6.3.14. La condition (6.3.13.1) est vérifiée dans les cas suivants

a) Si G est représentable, par définition des puissances symétriques.

b) Pour G l'image réciproque sur $S_{fppf}$ d'un faisceau sur le petit site étale de S (0.10).

c) Pour G défini par un $\mathcal{O}_S$-module quasi-cohérent $G_o$.

L'énoncé c) se ramène à (5.5.2.7).

Proposition 6.3.15. Pour G vérifiant (6.3.13.1), on a :

(i) Le morphisme $Tr_f$ est fonctoriel en G, donc additif.

(ii) Sa formation est compatible à tout changement de base $S' \longrightarrow S$ .

(iii) Si $T = \coprod_i T_i$ , de sorte que $f_*G \xrightarrow{\sim} \Sigma\, f_{i*}\, G$, on a $Tr_f = \Sigma\, Tr_{f_i}$ .

(iv) Si T est de rang constant n sur S, le morphisme composé

$$G \longrightarrow f_*f^*G \xrightarrow{Tr_f} G$$

est la multiplication par n .

(v) Le morphisme trace est compatible à la composition (cf. 6.2.3 Var 3).

Les assertions (i) et (ii) sont claires, et (iii) est conséquence facile de 6.3.5. Avec les notations de 6.3.13, si $u \in G(S)$, alors $u_n$ est n fois l'image réciproque de u, de sorte que $Tr_f(f^*u) = t^*(u_n) = n\,u$ .

Pour prouver (v), on se ramène, par localisation étale sur S et utilisant (iii), à prouver que pour

$$f = gh \ : \ S'' \xrightarrow{h} S' \xrightarrow{g} S \ ,$$

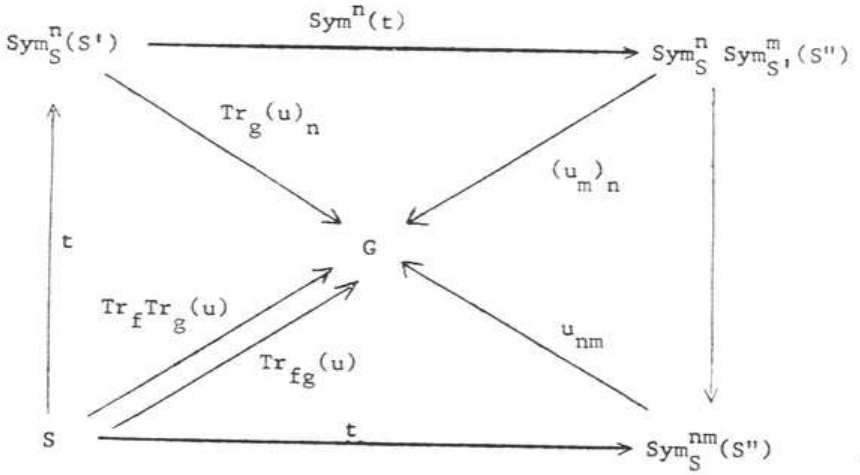
avec f et g finis localement libres de rangs constants n et m, le diagramme

(6.3.15.1)

$$\begin{array}{ccc} G(S'') & \xrightarrow{Tr_h} & G(S') \\ & {\scriptstyle Tr_f}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle Tr_g} & \\ & G(S) & \end{array}$$

est commutatif. Pour $u \in G(S'')$, considérons le diagramme

(6.3.15.2)




La flèche verticale de droite est définie car S' est plat sur S ; chaque triangle est commutatif et (v) sera donc conséquence de la commutativité du bord extérieur.

Traduisant en terme d'anneaux, c'est une conséquence du cas particulier B = E et C = F de 6.3.3.

6.3.16. Soit maintenant $f : T \longrightarrow S$ un morphisme quasi-fini plat de présentation finie. Si $\underline{F}$ est un faisceau fppf sur T, on définit son image directe à support propre $f_!T$ sur S comme le préfaisceau qui à S'/S associe l'ensemble des sections de F sur T' dont le support est propre sur S' . Ce préfaisceau est un faisceau d'après 6.1.1. Avec la notation de 6.1.1, on peut aussi l'exprimer comme limite inductive locale (IV 14. ).

$$f_!\ F \;=\; \varinjlim_{V \in \Phi(U)} f_*(F|V) \quad ,$$

formule qui rend compte du fait assez évident que les propriétés de $f_!$ se ramène à celles de $f'_*$ pour $f'$ fini. On trouve ainsi :

Proposition 6.3.17. On peut d'une et d'une seule façon définir, pour tout morphisme $f : T \longrightarrow S$ quasi-fini plat de présentation finie et pour tout faisceau fppf $G$ sur $S$ vérifiant (6.3.13.1), un morphisme trace

$$Tr_f : f_! f^*G \longrightarrow G$$

vérifiant :

(i) Pour $f$ fini on retrouve le morphisme (6.3.13.2).

(ii) Les conditions (Var 1) à (Var 4) de 6.2.3 sont remplies, mutadis mutandis.

Le morphisme quasi-fini $f$ induit un diagramme commutatif (cf. (0.11)) de sites (dans lequel $\alpha_*$ est le foncteur "restriction") :

$$\begin{array}{ccc} T_{fppf} & \xrightarrow{\alpha} & T_{et} \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f_{et}} \\ S_{fppf} & \xrightarrow{\alpha} & S_{et} \end{array} .$$

On a, pour $G$ sur $T_{fppf}$,

$$f_! \alpha_* \simeq \alpha_* f_! .$$

On dispose aussi d'un morphisme "de changement de base"

$$c \ : \ f^*_{et}\,\alpha_* \longrightarrow \alpha_* f^* \qquad .$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier la compatibilité suivante entre les morphisme traces 6.2.3 et 6.3.17 . Pour G sur $S_{fppf}$ vérifiant (6.3.13.1), le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
f_{et!}f^*_{et}\alpha_* G \arrow[r, "f_!ch"] \arrow[d, "Tr_f"', "(6.2.3)"] & f_{et!}\alpha_* f^* G \arrow[r, leftrightarrow, "\sim"] & \alpha_* f_! f^* G \arrow[d, "\alpha_* Tr_f"', "(6.3.17)"] \\
\alpha_* G \arrow[rr, equal] & & \alpha_* G
\end{tikzcd} \qquad (6.3.17.1) \quad .$$

En termes plus concrets, ceci signifie que si G est un faisceau fppf sur S, qui par restriction au site étale définit un faisceau étale $\alpha_* G$, et si u est une section à support propre de l'image réciproque $f^*_{et}(\alpha_* G)$, d'image $u_1$ dans $f^*G$, les éléments $Tr_f(u)$ (au sens 6.2.3) et $Tr_f(u_1)$ (au sens 6.2.17) coïncident dans G(S).

<u>Exemple</u> 6.3.18. Soit $f : S' \longrightarrow S$ un morphisme fini localement libre de rang n et $u \in \Gamma(S', \mathcal{O}_{S'}) = \mathrm{Hom}_S(S', \mathbb{E}^1_S)$. Le morphisme u définit un morphisme

$$\mathrm{Sym}(u) \ : \ \mathrm{Sym}^n_S(S') \longrightarrow \mathrm{Sym}^n_S(\mathbb{E}^1_S) = \mathrm{Spec}(S[\sigma_1 \ \dots \ \sigma_n] \quad ,$$

où les $\sigma_i$ sont des fonctions symétriques élémentaires (cf. BOURBAKI, Alg. 5, App. I n°2). On a alors (par un calcul facile laissé au lecteur) :

(6.3.18.1) $\quad [\mathrm{Sym}(u) \circ t]^*(\sigma_i) = \sigma_i(u)$ ,

où $t \in \Gamma(\mathrm{Sym}^n_S(S')/S)$ est l'élément canonique (6.3.4.3), et où on désigne par $\sigma_i(u)$ le $i^{\text{ième}}$ coefficient du polynôme caractéristique de la multiplication par u dans $f_*\mathcal{O}_{S'}$ . On en déduit que les applications "trace"

$$\begin{cases} \mathbb{G}_a(S') \longrightarrow \mathbb{G}_a(S) \\ \mathbb{G}_m(S') \longrightarrow \mathbb{G}_m(S) \end{cases}$$

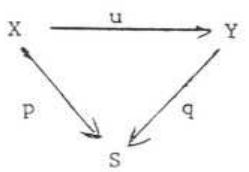
sont respectivement la trace et la norme usuels ; en effet, le morphisme $\mathrm{Sym}^n_S(\mathbb{E}^1_S) \longrightarrow \mathbb{E}^1_S$ déduit de la loi additive (resp. multiplicative) sur $\mathbb{E}^1_S$ est donné par la fonction $\sigma_1$ (resp. $\sigma_n$) sur $\mathrm{Sym}^n_S(\mathbb{E}^1_S) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spec}(S[\sigma_1,\ldots,\sigma_n])$.

On déduit alors de (6.3.17.1) que pour n inversible sur S le diagramme de faisceaux étales

(6.3.18.2)
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & f_*\,\mu_n & \longrightarrow & f_*\,G_m & \longrightarrow & f_*\,G_m & \longrightarrow & 0 \\ & & \Big\uparrow{\scriptstyle \mathrm{Tr}_f} & (6.2.3) & \Big\downarrow{\scriptstyle N_f} & & \Big\downarrow{\scriptstyle N_f} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mu_n & \longrightarrow & G_m & \longrightarrow & G_m & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

est commutatif.

Proposition 6.3.19. Soit un diagramme commutatif



dans lequel X et Y sont des courbes lisses quasi-projectives sur S et u un morphisme quasi-fini.

(i) Si D est un diviseur sur X fini sur S (voir note p.192) et g une section de $G_Y$ sur Y, on a

$$Tr_{D/S}(u^*g) = Tr_{(u_*D)/S}(g) \quad .$$

(ii) Si E est un diviseur sur Y fini sur S, g une section de $G_X$ sur X et si u est fini, on a

$$Tr_{E/S}(Tr_{X/Y}(g)) = Tr_{(u_*E)/S}(G) \quad .$$

Preuve. (i) Soit $g_n$ la section de G sur $Sym^n_S(Y)$ déduite de g (6.3.13). D'après 6.3.12, on a

$$Tr_{D/S}(u^*g) \overset{dfn}{=\!=} \sigma(D)^*(u^*g)_n = \sigma(D)^*(u^*g_n) = (u \circ \sigma(D))^*(g_n)$$

$$= \sigma(u_*D)^*(g_n) = Tr_{u_*D}(g_n) \, .$$

(ii) La formule (ii) résulte de 6.3.15 (ii) et (v) :

$$Tr_{E/S}(Tr_{X/Y}(g)) = Tr_{E/S}(Tr_{u^*E/E}(g)) = Tr_{u^*E/S}(g) \quad .$$

Application 3. Trace d'un torseur.

6.3.20. Soit G un faisceau sur le grand site fppf de S qui vérifie (6.3.13.1). Soit $u : X \longrightarrow Y$ un morphisme fini localement libre de S-schémas et K un $G_X$-torseur sur X. Supposons que, localement fppf sur Y, le torseur K sur X soit trivial. Tel est le cas si K est trivial localement pour la topologie étale.

Proposition 6.3.21. Sous les hypothèses 6.3.20, il existe à isomorphisme unique près un et un seul torseur $Tr_u(K)$ sous $G_Y$ sur Y, muni d'un morphisme $Tr_u$ ou $Tr_u^K : u_*K \longrightarrow Tr_u(K)$, qui, pour g section locale (au sens fppf) de G sur Y et k section locale de $u_*K$, vérifie

$$Tr_u^K(g\ k) = Tr_u(g).\ Tr_u(k) \quad .$$

Le problème est local sur Y ; on peut donc supposer K trivial : $K = G_X$ . Une solution du problème est de prendre $K = G_Y$ et pour morphisme trace le morphisme (6.3.13.2). On vérifie aussitôt que c'est la seule.

Le foncteur trace 6.3.20 est défini en particulier lorsque G vérifie la condition suivante

(6.3.21.1) Pour tout S-schéma X, tout torseur sous $G_X$ sur X est localement trivial pour la topologie étale.

Cette condition est vérifiée pour G un groupe lisse, pour G image réciproque d'un faisceau sur le petit site étale de S, ou pour G défini par un faisceau quasi-cohérent sur S .

On a par construction

(6.3.21.2) $$Tr_u(K) = u_*(K) \times_{u_*G_X} G_Y \quad .$$

6.3.22. Pour définir un foncteur trace sous des hypothèses plus générales, le point clef est, pour $f : X \longrightarrow T$ un morphisme quasi-projectif plat de présentation finie de S-schémas, de définir un foncteur raisonnable $K \longmapsto K_n$ des $G_X$-torseurs sur X dans les $G_Z$-torseurs sur $Z = Sym_T^n(X)$.

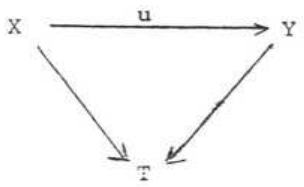
On a tout d'abord, $f_n$ désignant la projection de $\mathrm{Sym}^n_T(X)$ sur T, le lemme suivant, qui se démontre comme 6.3.21 :

Lemme 6.3.22.1. Avec les notations précédentes et si, localement sur T, le torseur K est trivial, alors il existe, à isomorphisme unique près, un et un seul torseur $K_n$ sur $\mathrm{Sym}^n_T(X)$, muni d'un morphisme $\alpha : f_*K \to f_{n*}(K_n)$, qui pour g section locale (fppf) de $f_* G_X$ et k section locale de $u_*K$ vérifie $\alpha(g\,k) = g_n \circ \alpha(k)$ (notation de 6.3.13 pour $g_n$ ; la définition de $g_n$ ici utilise l'hypothèse de platitude etc).

Le cas général se traitera par une descente un peu canulée. Tout d'abord :

Proposition 6.3.23. Soit un diagramme commutatif

(6.3.23.1)



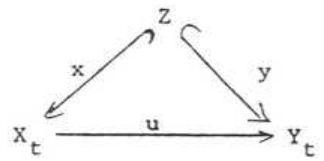

de T-schémas plats de présentation finie et quasi-projectifs, avec u étale surjectif. Alors, le système semi-simplicial des schémas $\mathrm{Sym}^n_T((X/Y)^{k+1})$ est un hyperrecouvrement pour la topologie étale du schéma $\mathrm{Sym}^n_T(Y)$.

Preuve. a) On aura à utiliser le résultat auxiliaire .

**6.3.23.2.** Soient (X,Y,T) comme plus haut, $t \in T$, Z un T-schéma somme d'un nombre fini de T-schémas $\mathrm{Spec}(k_i)$, pour $k_i$ extension finie de $k_t$ ,

et un diagramme commutatif de T-schémas

(6.3.23.3)




,

tel que x et y soient des immersions fermées. Soit $z \in \mathrm{Sym}_T^n(Z)$, et soient x(Z) et y(Z) ses images dans $\mathrm{Sym}_T^n(X)$ et $\mathrm{Sym}_T^n(Y)$. Alors, $\mathrm{Sym}_T^n(u)$ est étale en x(Z).

La formation du schéma $\mathrm{Sym}_T^n(X)$ est compatible à tout changement de base $S' \longrightarrow S$ (5.5.2.7). Par réduction au cas noethérien, on en déduit que $\mathrm{Sym}_T^n(X)$ est de présentation finie sur S ; il est par ailleurs plat sur S (5.5.2.4). Grâce au critère de platitude fibre par fibre, on se ramène pour prouver (6.3.23.2) au cas S spectre d'un corps. Le complété de $\mathrm{Sym}_T^n(X)$ en Z a alors pour algèbre affine la limite projective des algèbres affines localisées en x(z) des schémas $\mathrm{Sym}_T^n(Z_k)$, pour $Z_k$ voisinage infinitésimal de Z dans X. Par hypothèse, u induit des isomorphismes entre les voisinages infinitésimaux de Z dans X et dans Y. Le complété de $\mathrm{Sym}_T^n(u)$ en x(z) et y(z) est donc un isomorphisme, et ceci prouve (6.3.23.2).

On déduit de 6.3.23.2 que le schéma somme, pour $z \in \mathrm{Sym}_T^n(Z)$, des hensélisés en y(z) de $\mathrm{Sym}_T^n(Y)$ ne dépend que de Z et du T-schéma $X_Z^h$ somme des hensélisés de X en les divers points de Z . On désignera ce schéma par la notation $\mathrm{Sym}_T^{h\,n}(X_Z^h)$ ; il est fonctoriel en $X_Z^h$ .

b) Par passage à la limite, pour prouver 6.3.23, il suffit de montrer que pour $y \in \mathrm{Sym}^n_T(Y)$, fermé dans sa fibre, l'image réciproque sur l'hensélisé de $\mathrm{Sym}^n_T(Y)$ en y du schéma simplicial $\mathrm{Sym}^n_T((X/Y)^{k+1})$ est un hyperrecouvrement pour la topologie étale. Ce problème est local sur T pour la topologie étale ; on se ramène par là au cas où il existe un diagramme (6.3.23.3) avec $y = x(Z)$ (en tuant les extensions résiduelles par une extension séparable de $k_t$). Le système semi-simplicial considéré se déduit alors du système

$$\mathrm{Sym}^{h\,n}_T((X^h_{u^{-1}(Z)}/Y^h_Z)^{k+1}),\ \text{augmenté vers}\ \mathrm{Sym}^{h\,n}_T(Y^h_Z)$$

par changement de base, de sorte qu'il suffit de considérer ce dernier. Le système semi-simplicial des $(X^h_{u^{-1}(Z)}/Y^h_Z)^{k+1}$ est semi-simplicialement homotope au système constant $Y^h_Z$, car $X^h_{u^{-1}(Z)}/Y^h_Z$ admet une section. Le système $\mathrm{Sym}^{h\,n}_T((X^h_{u^{-1}(Z)}/Y^h_Z)^{h+1})$ est donc de même homotope à $\mathrm{Sym}^{h\,n}_T(Y^h_Z)$, et en particulier en est un hyperrecouvrement. Ceci prouve 6.3.2.3.

6.3.24. Soient $f : Y \longrightarrow T$ un morphisme quasi-projectif plat de présentation finie de S-schémas, et K un $G_Y$-torseur sur Y. Considérons le problème suivant :

6.3.24.0. Définir, pour tout morphisme $u : X \longrightarrow Y$, avec X quasi-projectif plat de présentation finie sur T, un torseur $(u^*K)_n$ sur $\mathrm{Sym}^n_T(X)$, et pour tout $v : X' \longrightarrow X$ un isomorphisme $c_v : (v^*u^*K)_n \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sym}^n_T(v)^*K_n$, de sorte que

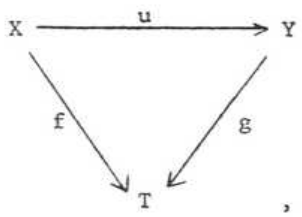
(i) les isomorphismes $c_v$ sont compatibles à la composition ;

(ii) pour u*K localement trivial sur T, on retrouve le torseur de 6.3.22.1, et sa variance.

D'après 6.3.23, la question d'existence et d'unicité d'une solution à 6.3.24.0, pour tout torseur déduit de K par une image réciproque du type envisagé en 6.3.24.0, est une question locale pour la topologie étale sur Y . En particulier, si G vérifie (6.3.21.1), le problème 6.3.24.0 admet une et une seule solution.

Supposons maintenant que G vérifie :

(6.3.24.1) Pour tout entier n et pour tout diagramme de S-schémas affines




,

avec f et g plats de présentation finie et u fini localement libre surjectif, le schéma semi-simplicial tronqué $(\mathrm{Sym}_T^n((X/Y)^{k+1}))_{0\le k\le 2}$ , augmenté vers $\mathrm{Sym}_T^n(Y)$, est de descente (GIRAUD [1]) pour la catégorie des G-torseurs.

6.3.24.1 bis. On déduit de façon standard de 6.3.23 que la condition (6.3.24.1) implique la condition analogue, où on suppose seulement f et g plats de présentation finie quasi-projectifs et u plat surjectif. Localement pour la topologie étale, u admet en effet des quasi-sections finies localement libres et on conclut par 6.3.23 et GIRAUD [1] appliqué à un diagramme formant carré de données de descente.

Etant donné un $G_Y$-torseur K sur un T-schéma Y quasi-projectif plat de présentation finie, il existe par définition un morphisme fidèlement plat de présentation finie $u : X \longrightarrow Y$ tel que $u^*K$ soit trivial. Si $u_i$ désigne la projection de $(X/Y)^{i+1}$ sur Y ($i \geq 0$), les torseurs $(u_i^*K)_n$ (6.3.22.1) sur les schémas $\mathrm{Sym}_T^n((X/Y)^{i+1})$ forment une donnée de descente ($i=0,1,2$) sur ce schéma semi-simplicial augmenté vers $\mathrm{Sym}_T^n(Y)$. Supposons que G vérifie la condition :

(6.3.24.2) Les données de descentes construites plus haut sont toutes effectives (cf. 6.3.24.1).

Alors, on désignera par $K_n$ le torseur sur $\mathrm{Sym}_T^n(Y)$ (déterminé à isomorphisme unique près) défini par cette donnée de descente.

6.3.25. Supposons que G vérifie (6.3.21.1) ou les conditions (6.3.24.1) (6.3.24.2). On laisse au lecteur le soin de donner un sens au formulaire suivant et de le vérifier :

6.3.25.1. Changement de base. Soit un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ T' & \xrightarrow[g]{} & T \end{array} \quad .$$

Désignons par $g'_n$ la flèche de $\mathrm{Sym}_{T'}^n(X')$ dans $\mathrm{Sym}_T^n(X)$. Pour K torseur sous G sur X, on a

$$g_n'^* K_n \simeq (g'^*K)_n \quad .$$

Soit maintenant $f : X \longrightarrow T$ et K un $G_X$-torseur sur X.

6.3.25.2. Changement de groupe. Soit $r : G_1 \longrightarrow G_2$ un morphisme entre groupes vérifiant tous deux (6.3.21.1) ou (6.3.24.1), (6.3.24.2). On a

$$r(K_n) \simeq r(K)_n .$$

6.3.25.3. Additivité en K : On a

$$(K' + K'')_n \simeq K'_n + K''_n .$$

6.3.25.4. Additivité en n . Soient $n_1$ et $n_2$ deux entiers, $n = n_1+n_2$ et

$$\alpha : Sym_T^{n_1}(X) \underset{T}{\times} Sym_T^{n_2}(X) \longrightarrow Sym_T^{n}(X)$$

la flèche canonique ; on a alors

$$d^*K_n \simeq pr_1^* K_{n_1} + pr_2^* K_{n_2} .$$

6.3.25.5. Multiplicativité en n. Soient n et m deux entiers et $\alpha$ la flèche canonique de $Sym_T^n(Sym_T^m(X))$ dans $Sym_T^{nm}(X)$ (cf. 6.3.3). On a

$$\alpha^*(K_{nm}) \simeq (K_m)_n .$$

6.3.26. Supposons que G vérifie (6.3.21.1) ou (6.3.24.1), (6.3.24.2). Si $f : X \longrightarrow T$ est un morphisme fini localement libre de rang n entre S-schémas, si t est la section (6.3.4.3) de $Sym_T^n(X)$, et si K est un $G_X$-torseur sur X, on définit un $G_T$-torseur $Tr_f(K)$ sur T par la formule

(6.3.26.1) $$Tr_f(K) = t^*(K_n) .$$

Si f est fini localement libre, on définit $Tr_f(K)$, localement sur T, par la même formule. Cette définition, via un isomorphisme canonique et fonctoriel, est équivalente à la définition 6.3.21 dans leur domaine commun de validité (la définition 6.3.21 fournissant une solution au problème de descente posé). On déduit aussitôt de (6.3.25.1), (6.3.25.2) et (6.3.25.3) que le foncteur $Tr_f$ est <u>compatible aux changements de base</u> $T' \longrightarrow T$, <u>compatible aux changements de groupe</u> $r : G_1 \longrightarrow G_2$, <u>compatible à l'addition des torseurs</u>.

La commutativité du bord extérieur du diagramme (6.3.15.2), et (6.3.25.1) (6.3.25.4) fournissent une <u>compatibilité à la composition des morphismes</u> :

$$Tr_{fg}(K) \xrightarrow{\sim} Tr_f(Tr_g(K)) \quad .$$

6.3.27. Dans le cas particulier des courbes relatives, on a de plus :

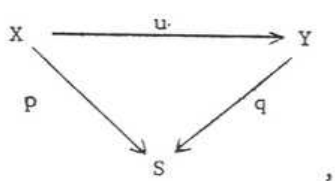
<u>Construction</u> 6.3.27.1. Si $f : X \longrightarrow S$ <u>est une courbe lisse et quasi-projective sur</u> S, $D_1$ <u>et</u> $D_2$ <u>deux diviseurs relatifs finis sur</u> S <u>et</u> K <u>un</u> G-<u>torseur sur</u> X, <u>on a, posant</u> $Tr_{D/S}(K) = Tr_{D/S}(K|D)$, <u>un isomorphisme canonique</u>

$$Tr_{D_1+D_2}(K) \xrightarrow{\sim} Tr_{D_1}(K) + Tr_{D_2}(K) \quad .$$

Cet isomorphisme se déduit aussitôt de l'isomorphisme (6.3.25.4) et de 6.3.9.1.

Enfin les arguments de 6.3.19 fournissent encore :

<u>Construction</u> 6.3.27.2. <u>Soit un diagramme commutatif</u>




,

dans lequel X et Y sont des courbes lisses quasi-projectives sur S et u un morphisme quasi-fini.

(i) Si D est un diviseur sur X fini sur S et K un torseur sous G sur Y, on a (cf. note p.192):

$$Tr_{D/S}(u^*K) \simeq Tr_{(u_*D)/S}(K) \quad .$$

(ii) Si E est un diviseur sur Y fini sur S, K un torseur sous G sur X et si u est fini, on a

$$Tr_{E/S}(Tr_{X/Y}(K)) \simeq Tr_{u^*E/S}(K) \quad .$$

Proposition 6.3.28. Soient A et B deux R-algèbres (commutatives) et $u : A \longrightarrow B$ un homomorphisme qui fasse de B un A-module localement libre de type fini et fidèle. Alors le complexe semi-simplicial d'algèbres $(TS^n_R(\overset{k+1}{\underset{A}{\otimes}} B))_{k\geq 0}$ est, en tant que $TS^n_R(A)$-module différentiel semi-simplicial, une résolution scindée de $TS^n_R(A)$.

Preuve. Le complexe de modules associé au module semi-simplicial $TS^n_R(\overset{k+1}{\underset{A}{\otimes}} B)$ ne dépend que du A-module B, muni d'un homomorphisme de modules $u : A \longrightarrow B$. En tant que A-module, B peut s'écrire $B = A \oplus L$, et ceci permet d'expliciter un opérateur d'homotopie.

Rappelons que :

Proposition 6.3.29. Soient A un anneau, B* une A-algèbre co-semi-simpliciale, et $c : A \longrightarrow B^*$ le morphisme structural. Pour que le foncteur image réciproque de modules (= extension des scalaires) $c^*$ soit fidèle (resp. pleinement fidèle) il suffit que la suite de A-modules

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B^0$$

(resp. $0 \longrightarrow A \longrightarrow B^0 \xrightarrow{j_0 - j_1} B^1$)

soit exacte, et le reste après tensorisation par un quelconque A-module.

La démonstration est triviale et laissée au lecteur.

On déduit de façon standard de (6.3.28) (6.3.29) le

Corollaire 6.3.30. La condition (6.3.24.1) est vérifiée par tout groupe affine G .

(Utiliser qu'un torseur sous G est représentable par un schéma affine sur **T.**)

Il ne devrait pas être difficile d'étendre 6.3.30 à tout groupe G représentable par un espace algébrique (*). Je conjecture que la condition (6.3.24.2) est vérifiée par tout groupe représentable par un espace algébrique, et plat. On a l'énoncé canularesque:

Proposition 6.3.31. Soit une suite exacte sur S

$$0 \longrightarrow G \xrightarrow{r} G' \xrightarrow{u} H \longrightarrow 0 \quad .$$

Supposons que G' et H, donc G vérifient (6.3.13.1), que G' vérifie (6.3.21.1) et que G vérifie (6.3.24.1). Alors, G vérifie (6.3.24.2).

Ceci s'applique par exemple à un groupe affine noyau d'un épimorphisme de groupes représentables et lisses.

(*) Algebraic Spaces par M. ARTIN. Yale University, Whittemore Lectures, May 1969.

Preuve de 6.3.31. Soit K un G-torseur sur X. Par 6.3.23, la question est locale sur X pour la topologie étale ; il suffit donc de traiter le cas où r(K) est trivial. Les G-torseurs K tels que r(K) soit trivial s'identifient aux G'-torseurs triviaux K' munis d'un isomorphisme $k : H \xrightarrow{\sim} u(K')$. Posons $Z = \mathrm{Sym}_T^n(X)$. Le morphisme de torseurs triviaux k induit $k_n : H_Z \xrightarrow{\sim} u(K'_n)$, et le G-torseur correspondant sur $\mathrm{Sym}^n(X)$ représente la donnée de descente considérée.

7. Appendice

7.0. Préliminaires.

Nous utiliserons dans cet appendice les résultats de $VI_B$, dont nous conservons les notations.

7.0.1. Soit $Sch_!$ la catégorie dont les objets sont les schémas quasi-compacts et quasi-séparés, les morphismes étant les morphismes de schémas séparés de type fini ; on désigne par $\mathcal{E}$ la catégorie bifibrée au-dessus de $Sch_!$, à catégories fibres des catégories opposées à des topos, définie par les faisceaux étales sur les schémas $VI_B$ (4.3.0). On se fixe une fois pour toutes un objet $R$ de $Sch_!$ et on désigne par $\mathcal{E}_R$ la catégorie bifibrée au-dessus de $Sch_{!R}$ déduite de $\mathcal{E}$. Soit enfin $\mathcal{A}$ un anneau du topos $\underline{\Gamma}(\mathcal{E}_R^\circ)$ qui vérifie les conditions suivantes :

(i) $\mathcal{A}$ est une section cocartésienne de $\mathcal{E}_R^\circ$ au-dessus de $Sch_{!R}^\circ$.

(ii) Pour tout schéma $X$ de $Sch_{!R}$, $\mathcal{A}_X$ est un faisceau de torsion.

Ceci posé, nous travaillerons avec la catégorie $\underline{Mod}(\mathcal{E}_R^\circ, \mathcal{A})$ ($VI_B$ 1.3.5).

On se propose de définir, pour tout morphisme $f : X \longrightarrow Y$ de $Sch_{!R}$, un foncteur $Rf_! : D(X, \mathcal{A}_X) \longrightarrow D(Y, \mathcal{A}_Y)$, coïncidant avec le foncteur précédemment défini lorsque $f$ est compactifiable, et faisant des catégories $D(X, \mathcal{A}_X)$ pour $X$ variable une catégorie cofibrée au-dessus de $Sch_{!R}$.

7.0.2. Bien que tous les résultats de cet appendice soient énoncés dans le cadre explicité en 7.0.1, on pourrait les transcrire avec des modifications évidentes dans le cadre suivant : on prend pour section de $\underline{\Gamma}(\mathcal{E}_R^\circ)$ la section constante de valeur le faisceau constant $\mathbb{Z}$ et on se limite pour tout schéma $X$ à la catégorie dérivée $D^*_{tors}(X)$ définie par les complexes de faisceaux de groupes abéliens dont les faisceaux de cohomologie sont de torsion (VI B 4.3.1).

**Lemme** 7.0.3. Soit un diagramme commutatif de schémas

(7.0.3.1)

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{j'} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y' & \xrightarrow[j]{} & Y \end{array}$$

où $f$ , $f'$ sont propres et $j$ , $j'$ sont des immersions. Alors pour tout complexe $K'$ de $D^+_{tors}(X')$ , la flèche canonique

$$j_! \circ R^+f'(K') \longrightarrow R^+f \circ j_!(K')$$

est un isomorphisme.

En vertu du "lemma on way-out functors" (R.D. I (7.1), il suffit de montrer que pour tout entier $i$ et pour tout faisceau $F$ de torsion, la flèche

(7.0.3.2) $$j_! \circ R^i f'(F) \longrightarrow R^i f \circ j_!(F)$$

est un isomorphisme.

En prenant les images fermées de $j$ et $j'$ on est ramené au cas où $j$ et $j'$ sont des immersions ouvertes dont les images sont partout denses : la propreté de $f$ et de $f'$ entraîne alors que le diagramme (7.0.3.1) est cartésien. Dans ces conditions, le théorème du changement de base pour un morphisme propre, sous la forme XII 5.2, montre que, pour tout point géométrique $\xi$ de $Y$ , la flèche $(j_! \circ R^i f'(F))_\xi \longrightarrow (R^i f \circ j_!(F))_\xi$ est un isomorphisme.

Construction 7.0.4. Soient $D$ une catégorie, $X$ et $Y$ deux $D$-objets de $Sch_{/R}$ tels que pour toute flèche $\alpha \longrightarrow \beta$ de $D$ , les morphismes $X_\beta \longrightarrow X_\alpha$ et $Y_\beta \longrightarrow Y_\alpha$ soient propres. Soit $j : X \longrightarrow Y$ un morphisme tel que pour tout objet $\alpha$ de $D$ , $j_\alpha : X_\alpha \longrightarrow Y_\alpha$ soit une immersion : l'isomorphisme (7.0.3.2) pour $i = 0$ vérifie les conditions de compatibilités usuelles et permet de construire un foncteur exact :

$$j_! : Mod(\underline{\Gamma}(\bar{X}), \mathfrak{A}) \longrightarrow Mod(\underline{\Gamma}(\bar{Y}), \mathfrak{A})$$

(cf ($VI_B$ 1.2.5 pour les notations).

qui induit un foncteur triangulé, encore noté $j_!$ :

$$j_! : D(\underline{\Gamma}(\bar{X}), \mathcal{A}) \longrightarrow D(\underline{\Gamma}(\bar{Y}, \mathcal{A}))$$

Alors, pour tout objet $\alpha$ de $D$, on a un diagramme commutatif, où $j_{\alpha!}$ désigne le foncteur "prolongement par 0 " usuel :

$$\begin{array}{ccc} D(\underline{\Gamma}(\bar{X}), \ ) & \xrightarrow{j_!} & D(\underline{\Gamma}(\bar{Y}), \mathcal{A}) \\ {\scriptstyle R e_\alpha^+}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle R e_\alpha^+} \\ D(X_\alpha, \mathcal{A}_{X_\alpha}) & \xrightarrow[j_{\alpha!}]{} & D(Y_\alpha, \mathcal{A}_{Y_\alpha}) \end{array} .$$

Construction 7.0.5. Soit un diagramme commutatif dans $Sch_{!R}$

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{i'} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y' & \xrightarrow[i]{} & Y \end{array} \tag{7.0.5.1}$$

où $i$ , $i'$ sont des immersions, $f$ un morphisme propre et $f'$ un morphisme propre surjectif. Il définit un diagramme commutatif d'objets simpliciaux de $Sch_{!R}$

$$\begin{array}{ccc} [X'|Y'] & \xrightarrow{j} & [X|Y] \\ {\scriptstyle u_{f'}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u_f} \\ C_{Y'}^{\Delta} & \xrightarrow[i]{} & C_Y^{\Delta} \end{array} \tag{7.0.5.2}$$

où $j_n : [X'|Y']_n \longrightarrow [X|Y]_n$ est une immersion pour tout $n$ . Avec ces notations, on a un isomorphisme canonique

$$i_! \xrightarrow{\sim} R^+ \bar{u}_{f+} \circ j_! \circ L^+ \bar{u}_{f'} .$$

En prenant les images fermées de $i$ et $i'$ on peut supposer que $i$ et $i'$ sont des immersions ouvertes dont les images sont partout denses. Le diagramme (7.0.5.1) est alors cartésien et $f$ est surjectif. De plus, pour tout entier $n$ , $j_n$ est

une immersion ouverte et le diagramme

$$\begin{array}{ccc} [X'|Y']_n & \xrightarrow{j_n} & [X|Y]_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y' & \xrightarrow[i]{} & Y \end{array}$$

est cartésien.

Dès lors $L^+ \bar{u}_f^+ \circ i_!$ est isomorphe à $j_! \circ L^+ \bar{u}_{f'}^*$ : utilisant le fait que $u_f$ est une augmentation de descente cohomologique ($VI_B$ (4.3.2)), on trouve une suite d'isomorphismes

$$i_! \xrightarrow{\sim} R^+ \bar{u}_{f+} \circ L^+(\bar{u}_f^+) \circ i_! \xrightarrow{\sim} R^+ \bar{u}_{f*} \circ j_! \circ L^+ \bar{u}_{f'}^*$$

d'où l'isomorphisme voulu.

Enfin, nous utiliserons la variante suivante du lemme de Chow, dont la démonstration se trouvera dans EGA II 2ème édition, et qui est une amélioration de (XII 7.1) :

Lemme 7.0.6. Soient S un schéma quasi-compact et quasi-séparé et $f : X \longrightarrow S$ un morphisme séparé de type fini. Alors il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{p} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & \swarrow {\scriptstyle f} & \\ S & & \end{array}$$

vérifiant les conditions suivantes :

(i) p est propre et surjectif

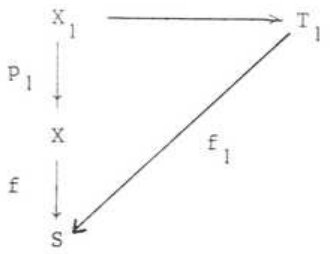
(ii) il existe un ouvert dense U de X tel que p induise un isomorphisme de $p^{-1}(U)$ sur U

(iii) f' est quasi-projectif.

7.1. Définition de $R^+f_!$

Définition 7.1.1. Soit $f : X \longrightarrow S$ un morphisme de schémas. Une pseudo-compactification de $f$ consiste en la donnée d'un diagramme commutatif

(7.1.1.0)




où $p_1$ est propre et surjectif, $j_1$ est une immersion et $f_1$ est propre.

7.1.2. Soit $f : X \longrightarrow S$ un morphisme de $Sch_{!R}$ : d'après le lemme de Chow (7.0.6), $f$ possède une pseudo-compactification $(p_1,j_1,f_1)$. Le diagramme (7.1.1.0) définit un morphisme

$$[X_1|X] \xrightarrow{\quad j_1 \quad} [T_1|S]$$

encore noté $j_1$, tel que $j_{1n}$ soit une immersion pour tout $n$. On pose alors $R^{+(1)}f_! = L^+\bar{u}_{p_1} \cdot j_{1!} \circ R^+\bar{u}_{f_1}$ de sorte que l'on obtient un foncteur triangulé de $D^+(X,\mathfrak{A}_X)$ dans $D^+(S,\mathfrak{A}_S)$.

Construction 7.1.3. Pour tout couple $((p_1,j_1,f_1),(p_2,j_2,f_2))$ de pseudo-compactifications de $f$, on a un isomorphisme $\alpha_{12} : R^{+(1)}f_! \longrightarrow R^{+(2)}f_!$ tel que pour toute autre pseudo-compactification $(p_3,j_3,f_3)$, on ait $\alpha_{23} \circ \alpha_{12} = \alpha_{13}$.

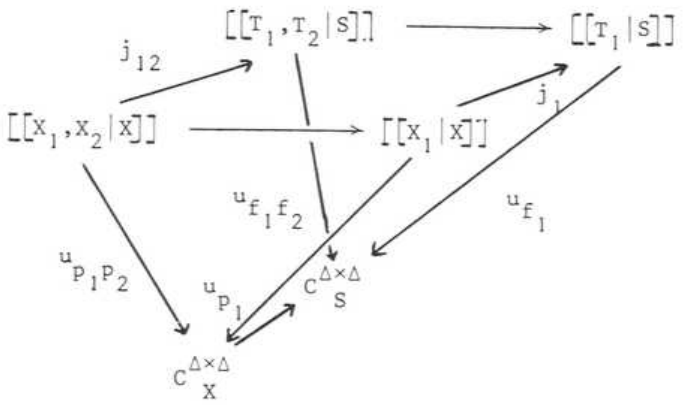
a) On définit un système simplicial double $[[X_1,X_2|X]]$ en posant

$$[[X_1,X_2|X]]_{[n]\times[m]} = [X_1|X]_n \times [X_2|X]_n$$

De même on pose

$$[[X_1|X]]_{[n]\times[m]} = [X_1|S]_n \quad ,$$

les morphismes $[[X_1|X]]_{[n]\times[m]} \longrightarrow [[X_1|X]]_{[n]\times[m']}$ induits par les morphismes $[m'] \longrightarrow [m]$ étant tous égaux à l'identité. On définit de la même manière les systèmes simpliciaux doubles $[[T_1,T_2|S]]$ et $[[T_1|S]]$, de sorte que l'on a un diagramme commutatif




où $j_{12}$ est une immersion degré par degré. Le procédé de calcul exposé dans VI b(2.3) permet de construire un morphisme

$$R^{+(1)}f_! \xrightarrow{\alpha_1} R^+\overline{u_{f_1f_2}} \circ j_{12!} \circ L^+\overline{u_{P_1P_2}}^+ = R^{+(1,2)}f_!$$

qui s'obtient à partir d'un morphisme de triple complexes de faisceaux sur $S$ .

b) $\alpha_1$ <u>est un isomorphisme</u> :

Pour démontrer ceci, on peut fixer le premier indice $n$ provenant de $[[T_1,T_2|S]]_{[n]\times[m]}$ dans le morphisme de triple complexes précédent et regarder le morphisme de double complexes ainsi obtenu. On vérifie que ce morphisme n'est autre que l'isomorphisme défini dans le lemme 7.0.5 pour le diagramme

$$\begin{array}{ccc} [X_1|X]_n \times X_2 & \longrightarrow & [T_1|S]_n \times T_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ [X_1|X]_n & \longrightarrow & [T_1|S]_n \end{array}$$

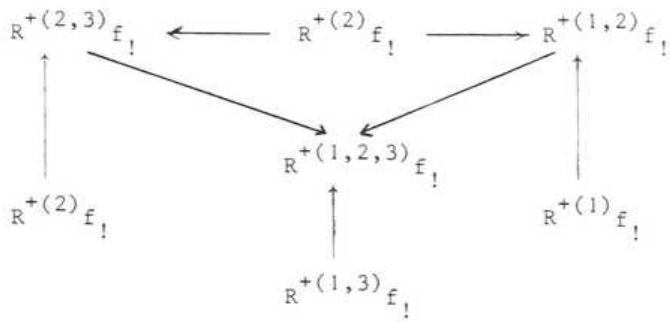
c) On construit de la même manière un isomorphisme

$$R^{+(2)}f_! \xrightarrow{\alpha_2} R^+\overline{u_{f_1f_2}}_+ \circ j_{12!} \circ L^+\overline{u_{P_1P_2}}$$

et l'on pose $\alpha_{12} = \alpha_2^{-1} \circ \alpha_1$ .

Pour vérifier la relation $\alpha_{23} \circ \alpha_{12} = \alpha_{13}$ , on utilise un objet simplicial triple : on laisse au lecteur le soin de vérifier que l'on obtient un diagramme

commutatif :

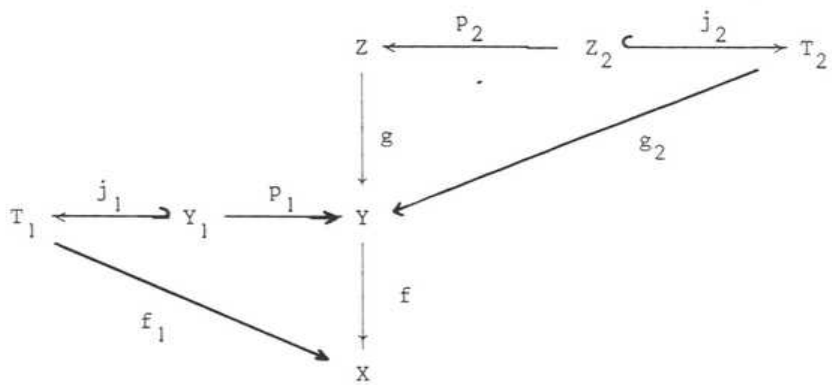



Construction 7.1.4. Soient $Z \xrightarrow{g} Y$ et $Y \xrightarrow{f} X$ deux morphismes de $Sch_{!R}$. Pour tout triple $((p_1,j_1,f_1)$ , $(p_2,j_2,g_2)$ , $(p_3,j_3,(fg)_3))$ , où $(p_1,j_1,f_1)$ est une pseudo-compactification de $f$ , $(p_2,j_2,g_2)$ une pseudo-compactification de $g$ et $(p_3,j_3,(fg)_3)$ une pseudo-compactification de $fg$ , on a un isomorphisme $R^{+(3)}fg_! \xleftarrow{\sim} R^{+(2)}g_! \circ R^{+(1)}f_!$ compatible avec les isomorphismes $\alpha_{ij}$ définis précédemment.

Nous procéderons en plusieurs étapes :

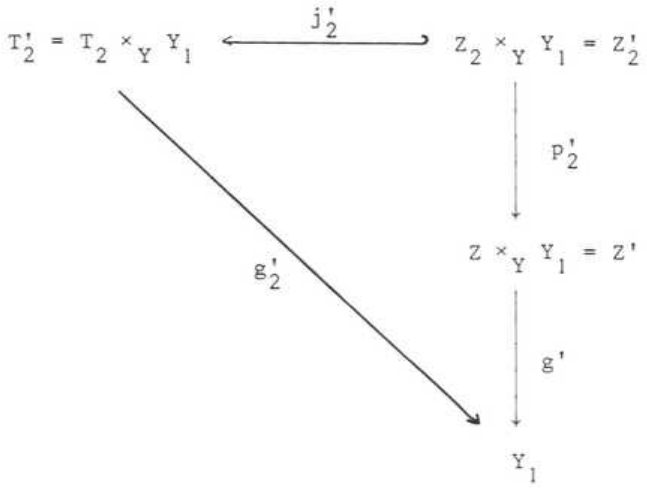
7.1.4.1. Soit $(p_1,j_1,f_1)$ (resp. $(p_2,j_2,f_2)$) une pseudo-compactification de $f : Y \longrightarrow X$ (resp. de $g : Z \longrightarrow Y$) :

(7.1.4.1.1)



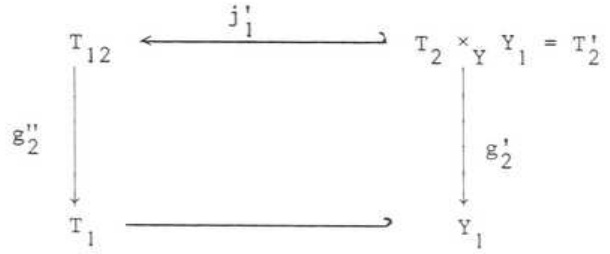

Le morphisme $Z' = Z \times_Y Y_1 \longrightarrow Y_1$ déduit de $g$ par changement de base est muni d'une pseudo-compactification :

(7.1.4.1.2)




On choisit maintenant une compactification de $j_1 \cdot g'_2$ .

(7.1.4.1.3)

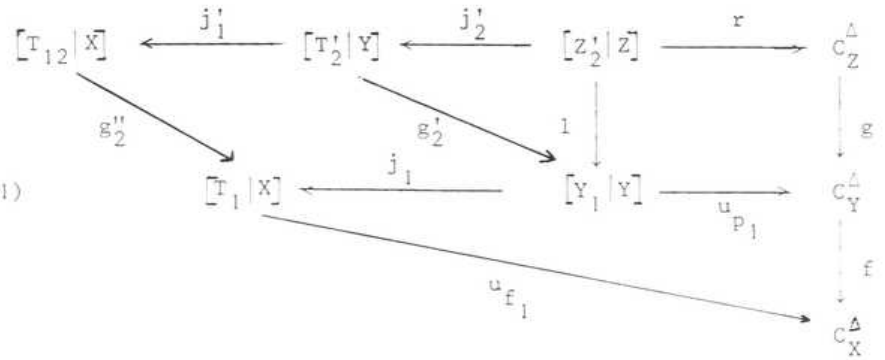



qui définit une pseudo-compactification du composé $fg$ : on notera $R^{+(12)}{}_{f}{}_{g_!}$ le foncteur correspondant.

7.1.4.2. Les données précédentes permettent de définir un isomorphisme $R^{+(12)}{}_{f}{}_{g_!} \xleftarrow{\sim} R^{+(1)}{}_{f_!} \cdot R^{+(2)}{}_{g_!}$ :

On dispose d'un diagramme commutatif, où toutes les flèches se déduisent naturellement de (7.1.4.1.1), (7.1.4.1.2) et (7.1.4.1.3).

(7.1.4.2.1)



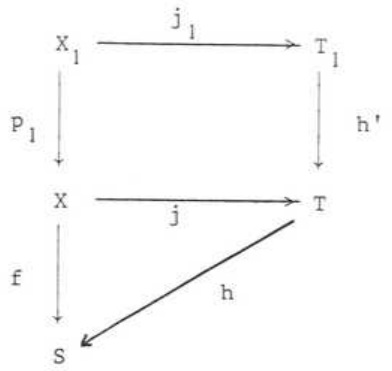
On va définir une flèche naturelle :

$$\beta : R^{+(1)}f_! \circ R^{+(2)}g_! \longrightarrow R^{+(12)}fg_!$$

dont on va montrer que c'est un isomorphisme.

Pour cela nous utiliserons deux lemmes :

Lemme 7.1.4.2.2. Soit un diagramme commutatif :




où h , h' sont propres, $p_1$ est propre et surjectif et j , $j_1$ sont les immersions. Alors la flèche canonique

$$R^+h \circ j_! \longrightarrow R^{+(1)}(hh')_!$$

est un isomorphisme.

En effet, d'après (7.0.5) la flèche

$$j_! \longrightarrow R^+\bar{u}_{h'} \circ j_{1!} \circ L^+\bar{u}_{p_1}$$

est un isomorphisme. D'où le résultat en appliquant $R^+h$ .

Lemme 7.1.4.2.3. Avec les notations du diagramme (7.1.4.2.1), les flèches canoniques

$$R^{+(1)}f_! \circ R^+\bar{u}_{p_1} \longrightarrow R^+\bar{u}_{f_1} \circ j_{1!}$$

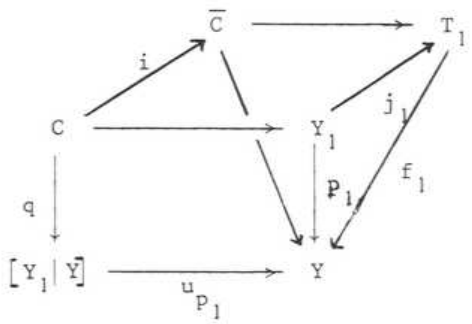
$$R^{+(2)}g_! \circ R^+\bar{r} \longrightarrow R^+\bar{u}_{p_1} \circ R^+g_2' \circ j_{2!}'$$

sont des isomorphismes.

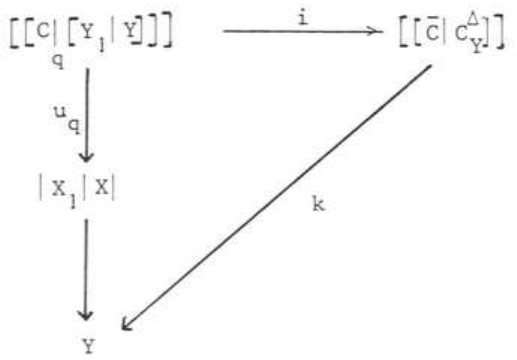
Nous n'établirons que le premier isomorphisme, laissant au lecteur le soin

d'en déduire le deuxième.

Avec des notations évidentes, on pose $C = [Y_1|Y] \times_X X_1$ et $\overline{C} = [T_1|S] \times_S T_1$, de sorte que l'on a un diagramme commutatif :




où i est une immersion, q est propre et surjectif. On construit alors un diagramme




et il résulte de (7.1.4.2.2) que le foncteur $R\bar{u}j_1 \circ j_1$ s'identifie au foncteur $R^+\bar{k} \circ i_! \circ L^+\bar{u}_q$ et, grâce à (7.0.3) et au théorème du changement de base ce dernier foncteur s'identifie à $R^{+(1)}f_! \circ R^+\bar{u}_{p_1}$. Le lemme (7.1.4.2.3) étant établi, on dispose d'une suite d'isomorphismes

$$R^{+(3)}fg_! = R^+\bar{u}_{f_1} \circ R^+g''_2 \circ j'_{1!} \circ j'_{2!} \circ L^+\bar{r}^+$$

$$\xleftarrow{\sim} R^+\bar{u}_{f_{1+}} \circ j_{1!} \circ R^+g'_2 \circ j'_{2!} \circ L^+\bar{r}^+$$

$$\xleftarrow{\sim} R^{+(1)}f_! \circ R^+\bar{u}_{p_{1+}} \circ R^+g'_{2+} \circ j'_{2!} \circ L^+\bar{r}$$

$$\xleftarrow{\sim} R^{+(1)}f_! \circ R^{+(2)}g_! \circ R^+\bar{r} \circ L^+\bar{r}^+$$

$$\xleftarrow{\sim} R^{+(1)}f_! \circ R^{+(2)}g_!$$

dont le composé donne $\beta$ .

7.1.4.3. Si $(p_3,j_3,(fg)_3)$ est une pseudo-compactification de $fg$ , on définit un isomorphisme

$$R^{+(1)}f_! \circ R^{+(2)}g_! \xrightarrow{\gamma_{123}} R^{+(3)}fg_!$$

en composant $\alpha_{(12)3}$ avec $\beta$ .

7.1.4.4. Soient maintenant $(p_1,,j_1,,f_1,)$ et $(p_2,,j_2,,g_2,)$ deux autres pseudo-compactifications de $f$ et de $g$ et un diagramme (7.1.4.3) ; on vérifie que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} R^{+(12)}fg_! & \xleftarrow{\beta} & R^{+(1)}f_! \circ R^{+(2)}g_! \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_{(12)(1'2')}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{11'} * \alpha_{22'}} \\ R^{+(1'2')}fg_! & \xleftarrow[\beta']{} & R^{+(1')}f_! \circ R^{+(2')}g_! \end{array}$$

en considérant un diagramme du type (7.1.4.4) où les objets simpliciaux sont remplacés par des objets simpliciaux doubles.

On en conclut que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} R^{+(3)}fg_! & \xleftarrow{\gamma_{123}} & R^{+(1)}f_! \circ R^{+(2)}g_! \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_{33'}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{11'} * \alpha_{22'}} \\ R^{+(3')}fg_! & \xleftarrow{\gamma_{1'2'3'}} & R^{+(1')}f_! \circ R^{+(2')}g_! \end{array}$$

pour toute pseudo-compactification $(p_3,,j_3,,(fg)_3,)$ de $fg$ , ce qui achève la démonstration de 7.1.4.

7.1.5. En choisissant pour tout morphisme $f$ de $Sch_{!R}$ une pseudo-compactification, de telle manière qu'à un morphisme identique soit associée la pseudo-compactification triviale, on définit pour tout morphisme $f: X \longrightarrow Y$ un foncteur triangulé

$$R^+f_! : D^+(X,\mathcal{A}_X) \longrightarrow D^+(Y,\mathcal{A}_Y)$$

et tout couple (f,g) de morphisme, un isomorphisme

$$R^+fg_! \xrightarrow{c_{fg}} R^+f_! \circ R^+g_!$$

De plus si f est une identité, $R^+f_!$ est le foncteur identique et $c_{fg}$ est l'identité.

Proposition 7.1.6. La correspondance $f \longrightarrow R^+f_!$ définit un pseudo-foncteur normalisé de $Sch_{!R}$ dans la 2-catégorie des catégories. En d'autres termes, les catégories $D^+(X,\mathcal{A}_X)$ pour X objet de $Sch_{!R}$ peuvent être organisées en catégorie cofibrée sur $Sch_{!R}$ en posant, pour tout morphisme $f : X \longrightarrow Y$ de $Sch_{!R}$ :

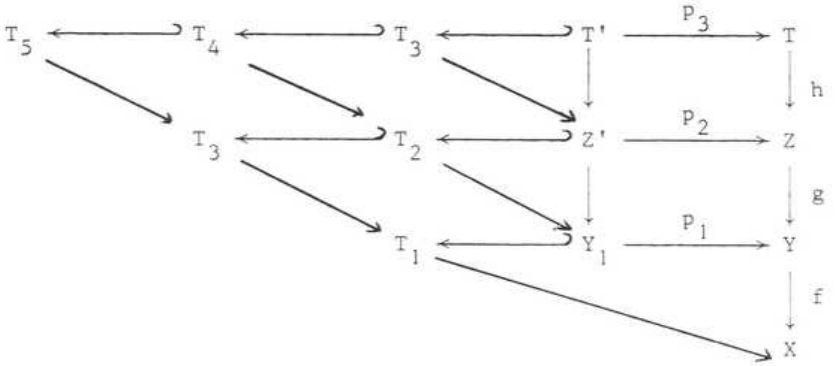
$$Hom_f(K,L) = Hom(R^+f_! K, L)$$

avec $K \in D^+(X,\mathcal{A}_X)$ et $L \in D^+(Y,\mathcal{A}_Y)$ .

Il s'agit de voir que l'identification $R^+fg_! \xrightarrow{c_{fg}} Rf_! \circ Rg_!$ est compatible avec les composés triples. Soit donc $h : T \longrightarrow Z$ , $g : Z \longrightarrow Y$ et $f : Y \longrightarrow X$ trois morphismes de $Sch_{!R}$ : en vertu de ce qui précède, il suffit, pour vérifier cette compatibilité, de la vérifier après un choix arbitraire de pseudo-compactifications pour h , g et f .

On dispose d'un diagramme :

(7.1.6.1)

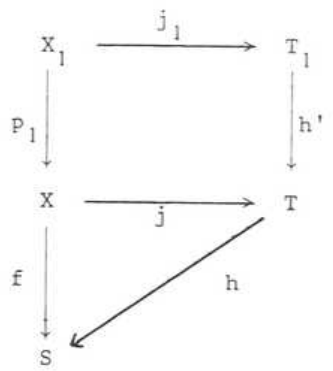



où toutes les flèches obliques sont propres et où $p_1$ , $p_2$ et $p_3$ sont propres et surjectifs.

Un diagramme du type (7.1.4.4) construit sur (7.1.6.1) permet alors de conclure.

Proposition 7.1.7. Si $f : X \longrightarrow S$ est un morphisme compactifiable, le foncteur $Rf_!$ coïncide avec celui défini dans l'exposé XVII.

En effet, il existe un diagramme commutatif :




auquel on applique (7.1.4.2.2).

Définition 7.1.8. Si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme de $Sch_!$, le foncteur $R^+f_!$ que l'on vient de définir s'appellera le foncteur image directe à supports propres (au sens des catégories dérivées). Le foncteur $H^q \circ R^+f_!$, noté $R^qf_!$, s'appelera le $q^{ième}$ foncteur image directe à supports propres.

Avec ces notations, on laisse au lecteur le soin de vérifier la

Construction 7.1.9. Soit $(\pi_1, j_1, f_1)$ une pseudo-compactification de $f : X \longrightarrow Y$ et désignons par $\pi_1^n$ le morphisme canonique $[X_1|X]_n \longrightarrow X$. Alors, pour tout complexe $K^\cdot$ de $D^+(X, \mathcal{A}_X)$, il existe deux suites spectrales birégulières :

$$(7.1.9.1) \qquad E_1^{pq} = R^q f_!(K^p) \Longrightarrow R^{p+q} f_!(K^\cdot)$$

$$(7.1.9.2) \qquad E_1^{pq} = R^q(f \circ \pi_1^p)_! (\pi_1^{p+}(K^\cdot)) \Longrightarrow R^{p+q} f_!(K^\cdot)$$

(Prendre par exemple la résolution flasque canonique de $j_{1!} \circ L^+ \bar{u}_{p_1}{}^+(K^\cdot)$ (cf. XVII (4.2)), puis son image directe par $u_{f_1}$).

7.2. Quelques propriétés de $R^+f_!$ .

Proposition 7.2.1. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de $Sch_{!R}$ de dimension relative $\leqslant d$ . Alors le foncteur $R^+f_!$ est de dimension cohomologique $\leqslant 2d$.

Il s'agit de montrer que pour tout faisceau $F$ de $\mathscr{A}_X$-modules sur $X$ , on a $R^if_!(F) = 0$ pour $i > 2d$ . (On en déduit alors, par un argument standard, que pour tout complexe $K^\cdot$ de $D^+(X,\mathscr{A}_X)$ tel que $H^i(K^\cdot) = 0$ pour $i > k$ , on a $R^if_!(K^\cdot) = 0$ pour $i > k + 2d$ ).

Soit $\mathscr{U} = (U_i)_{i\in I}$ un recouvrement fini de $X$ par des ouverts affines. On définit (XVII 6.2.9) une résolution gauche $K^\cdot_{\mathscr{U}} \longrightarrow F$ de $F$ en posant :

$$K^n_{\mathscr{U}} = \bigoplus_{|P| = n+1} j_{P!}\, j_P^*(F)$$

où pour chaque partie $P$ de $I$ , $j_P$ est l'inclusion de $\bigcap_{i\in P} U_i$ dans $X$ .

On déduit de (7.1.9.1) une suite spectrale

$$E_1^{pq} = \bigoplus_{\substack{|P| = p+1 \\ P\in I}} R^p\,(fj_P)_!\, j_P^*(F) \Longrightarrow R^{p+q}\, f_!(F)$$

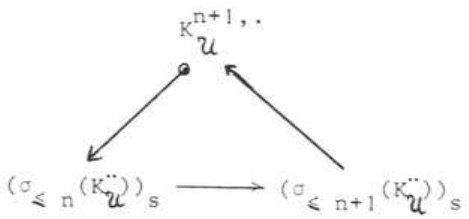
et le fait que $fj_P$ soit compactifiable, cas justiciable de l'exposé XVII, montre que $E_1^{pq} = 0$ pour $p > 0$ et $q > 2d$ ; on en déduit alors que $R^n f_!(F) = 0$ pour $n > 2d$ , ce qu'il fallait démontrer.

Proposition 7.2.2. Soient $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de $Sch_{!R}$ et $K^\cdot$ un objet de $D^b(X,\mathscr{A}_X)$ de Tor-dimension finie. Alors $R^+f_!(K^\cdot)$ est de Tor-dimension finie.

Comme précédemment, soit $\mathscr{U} = (U_i)_{i\in I}$ un recouvrement fini de $X$ par des ouverts affines. La fonctorialité de $K^n_{\mathscr{U}}$ permet de fabriquer une résolution gauche bornée de $K^\cdot$ par des complexes de Tor-dimension finie, car cette dernière propriété se vérifie point par point (XVII (4.1.9)) : nous noterons $K^{\cdot\cdot}_{\mathscr{U}}$ le double complexe ainsi obtenu, le deuxième indice correspondant à celui de $K^\cdot$ . Avec les conventions de (VI b.(2.3.2)), on dispose pour tout entier $n$ d'une suite exacte, où l'opération $\sigma_{\leqslant n}$ est prise dans $C^+\big(C^+(\mathrm{Mod}(X,\mathscr{A}_X))\big)$ :

$$0 \longrightarrow (\sigma_{\leqslant n}(K^{\cdot\cdot}_{\mathcal{U}}))_s \longrightarrow (\sigma_{\leqslant n+1}(K^{\cdot\cdot}_{\mathcal{U}}))_s \longrightarrow (-1)^{n+1} K^{n+1,\cdot}_{\mathcal{U}} \longrightarrow 0$$

d'où un triangle distingué dans $D^+(X,\mathcal{A}_X)$ :




Utilisant le fait que $R^+f_!(K^{n+1,\cdot}_{\mathcal{U}})$ est de Tor-dimension finie pour tout $n$ (XVII (5.2.10)), on en déduit que $R^+f_!((\sigma_{\leqslant 0}(K^{\cdot\cdot}_{\mathcal{U}}))_s) = R^+f_!(K^{\cdot})$ est de Tor-dimension finie.

Remarque 7.2.3. L'argument précédent ne permet pas d'affirmer que $R^+f_!(K^{\cdot})$ est de Tor-dimension $\leqslant k$ dès que $K^{\cdot}$ est de Tor-dimension $\leqslant k$ (cf.(3.7)).

Proposition 7.2.4. Soit un diagramme cartésien dans $\mathrm{Sch}_{!R}$ :

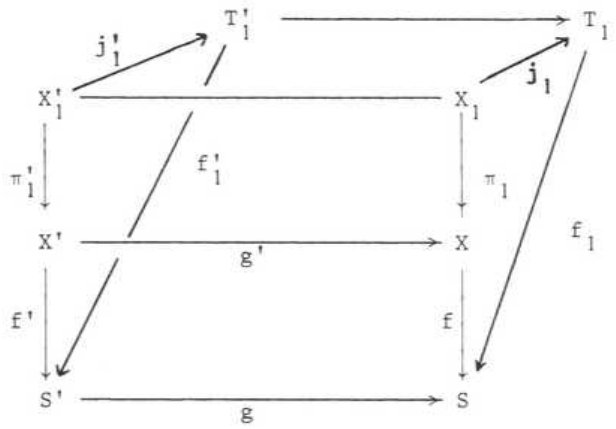
$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S' & \xrightarrow[g]{} & S \end{array}$$

Alors pour tout complexe $K^{\cdot}$ de $D^+(X,\mathcal{A}_X)$, le morphisme canonique

$$g^* \circ R^+f_!(K^{\cdot}) \xrightarrow{ch_{K^{\cdot}}} R^+f_! \circ g'^*(K^{\cdot})$$

est un isomorphisme.

Soit $(\pi_1,j_1,f_1)$ une pseudo-compactification de $f$ : on en déduit par changement de base une pseudo-compactification $(\pi'_1,j'_1,f'_1)$ de $f'$ et un diagramme commutatif :




qui permet de définir la flèche $ch_K$.

On dispose alors, d'après (7.1.9.2), d'un morphisme de suites spectrales birégulières :

$$\begin{array}{ccc} g^* \circ R^q(f \circ \pi_1^p)_! (\pi_1^{p+}(K^\cdot)) & \longrightarrow & g^* \circ R^{p+q} f_!(K^\cdot) \\ \downarrow u_1^{pq} & & \downarrow ch_K \\ R^q(f' \circ \pi_1'^p)_! (\pi_1'^p (g'^*(K^\cdot))) & \longrightarrow & R^+ f'_! \circ g'^*(K) \end{array}$$

et $ch_K$. est un isomorphisme puisqu'il en est de même pour les $u_1^{pq}$ d'après (XVII (5.2.6)).

7.3. Définition de $R f_!$

Nous nous proposons maintenant d'étendre "de façon raisonnable" le foncteur $R^+f_!$ en un foncteur $Rf_! : D(X,\mathcal{A}_X) \longrightarrow D(Y,\mathcal{A}_Y)$, pour tout morphisme $f$ de $Sch_{!R}$.

7.3.1. Soit $(p_1,j_1,f_1)$ une pseudo-compactification de $f$ et $F$ un $\mathcal{A}_X$-module : prenant la résolution flasque canonique de $j_{1!} \circ L\bar{u}_{p_1}^*(F)$ (cf. XVII (4.2)), puis son image directe par $f_1$, puis le complexe simple associé au complexe double ainsi construit, on obtient un complexe de $\mathcal{A}_Y$-modules :

(7.3.1.1) $0 \longrightarrow \mathscr{X}^0(F) \xrightarrow{S^1(F)} \mathscr{X}^1(F) \ldots\ldots \mathscr{X}^n(F) \xrightarrow{S^n(F)} \mathscr{X}^{n+1}(F) \ldots\ldots$

fonctoriel en $F$ et isomorphe dans $D^+(Y, \mathscr{A}_Y)$ à $R^+f_!(F)$ .

D'après 7.2.1 $H^i(\mathscr{X}^\cdot(F)) = 0$ pour $i > 2d$ , où $d$ est un entier tel que la dimension relative de $f$ soit $\leqslant d$ , de sorte que le complexe

(7.3.1.2) $0 \longrightarrow \mathscr{X}^0(F) \longrightarrow \mathscr{X}^1(F) \longrightarrow \ldots \mathscr{X}^{2d-1}(F) \longrightarrow \operatorname{Ker} S^{2d}(F) \longrightarrow 0$

est canoniquement isomorphe dans $D^+(Y, \mathscr{A}_Y)$ au complexe (7.3.1.1). De plus :

Lemme 7.3.2. Les foncteurs $\mathscr{X}^0$ , $\mathscr{X}^1$ , ... , $\mathscr{X}^{2d-1}$ , $\operatorname{Ker} S^{2d}$ sont exacts en $F$ .

L'exactitude des foncteurs $\mathscr{X}^n$ résulte de l'exactitude de la résolution flasque canonique et du fait que l'image directe par un morphisme d'une suite exacte courte de faisceaux flasques est encore une suite exacte courte.

Pour voir l'exactitude de $\operatorname{Ker} S^{2d}$ , on considère, pour une suite exacte courte $0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$ de faisceaux sur $X$ , le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
\operatorname{Ker} S^{2d}(F') & \longrightarrow & \mathscr{X}^{2d+1}(F') & \longrightarrow & \mathscr{X}^{2d+2}(F') & \ldots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\operatorname{Ker} S^{2d}(F) & \longrightarrow & \mathscr{X}^{2d+1}(F) & \longrightarrow & \mathscr{X}^{2d+2}(F) & \ldots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\operatorname{Ker} S^{2d}(F'') & \longrightarrow & \mathscr{X}^{2d+1}(F'') & \longrightarrow & \mathscr{X}^{2d+2}(F'') & \ldots
\end{array}$$

et la suite exacte d'homologie associée à la suite exacte

$$0 \longrightarrow \sigma_{\geqslant 2d+1}(\mathscr{X}^\cdot(F')) \longrightarrow \sigma_{\geqslant 2d+1}(\mathscr{X}^\cdot(F)) \longrightarrow \sigma_{\geqslant 2d+1}(\mathscr{X}^\cdot(F'')) \to 0$$

permet de conclure.

On dispose maintenant du lemme général suivant :

Lemme 7.3.3. Soient $A$ et $B$ deux catégories abéliennes et $Je^\cdot$ un objet de $C^b(\mathrm{Fex}(A,B))$ où $\mathrm{Fex}(A,B)$ désigne la catégorie des foncteurs exacts-de $A$ dans $B$ . Alors, en associant à tout complexe $K^\cdot$ de $C(A)$ le complexe simple associé au double complexe $Je^\cdot(K^\cdot)$ on obtient un foncteur triangulé $K(A) \longrightarrow K(B)$ qui préserve les quasi-isomorphismes.

On écrit le foncteur en question comme un composé

$$C(A) \longrightarrow C^b(C(B)) \xrightarrow{(\ )_s} C(B)$$

où le foncteur $(\ )_s$ est le foncteur complexe simple associé et on utilise (VI b (2.3.2.2). Remarque) : les détails sont laissés au lecteur.

Exercice 7.3.4. Montrer que pour tout complexe $K^\cdot$ de $D^+(X,\mathcal{A}_X)$, la flèche canonique

$$\tau_{\leqslant 2d}\mathscr{K}^\cdot(K^\cdot) \longrightarrow \mathscr{K}^\cdot(K^\cdot)$$

induit un quasi-isomorphisme sur les complexes simples associés.

On remarquera pour cela que la flèche canonique

$$\varinjlim_{k\geqslant 2d} (\tau_{\leqslant k}\mathscr{K}^\cdot(K^\cdot))_s \longrightarrow (\mathscr{K}^\cdot(K^\cdot))_s$$

est un isomorphisme, puis que les faisceaux de cohomologie d'un complexe commutent aux limites inductives filtrantes.

7.3.5. Soit $R^{(1)}f_! : D(X,\mathcal{A}_X) \longrightarrow D(Y,\mathcal{A}_Y)$ le foncteur défini par (7.3.1.2) grâce à 7.2.3. En vertu de 7.2.4 on peut le calculer directement à partir de (7.3.1.1) et on peut vérifier qu'il "ne dépend pas" de la pseudo-compactification choisie. Il faudrait alors vérifier les énoncés 7.1.3, 7.1.4 et 7.1.6 en supprimant les exposants + , ce que le rédacteur n'a pas eu le courage de faire.

Définition 7.3.6. Le foncteur $Rf_! : D(X,\mathcal{A}_X) \longrightarrow D(Y,\mathcal{A}_Y)$ construit en 7.3.5 s'appelle encore foncteur image directe à supports propres.

7.3.7. On peut alors montrer que le foncteur $Rf_!$ commute aux changements de base et que les énoncés (XVII (5.2.9) et (5.2.10)) restent vrais pour tout morphisme de $Sch_{!R}$, ce qui justifie les constructions que l'on vient de faire.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Dold and D. Puppe. Homologie nicht additiver Funktoren. Anwendungen. Ann. Inst. Fourier XI 1961.

[1] Gabriel-Zisman. Calculus of fraction and homotopy theory, Ergebnisse, Bd 35, Springer 1967.

[1] J. Giraud. Méthode de la descente, Mémoire n° 2 de la Société Mathématique de France (1964).

[TF] R. Godement. Théorie des faisceaux, Hermann, 1958. Act. Scient. Ind. n° 1252, (Paris) (cité [TF]).

[1] A. Grothendieck. TDTE IV : les schémas de Hilbert. Séminaire Bourbaki 221 . Mai 1961. Repris dans FGA.

[RD] R. Hartshorne. Residues and Duality. Lecture Notes in Mathematics n° 20. Springer 1966.

[1] D. Lazard. Thèse - Paris 1968.

[1] N. Roby. Lois polynômes et lois formelles en théorie des modules. Ann. E.N.S. 80 1963, p.213-248.

[CD] J.L. Verdier. Catégories dérivées (état 0), multicopié par l'I.H.E.S.

[2] J.L. Verdier. Catégories dérivées (à paraître dans Grundlehren der Math. Wiss, Springer).

[3] J.L. Verdier. Dualité dans la cohomologie des espaces localement compacts. Séminaire Bourbaki 300. Nov 1965.

SGA 4

EXPOSE XVIII

# LA FORMULE DE DUALITE GLOBALE

par P. DELIGNE

## 0. Introduction

0.1 Le présent exposé est consacré à la dualité de Poincaré. Cette dualité est construite sur le modèle de VERDIER [1] , qui traite le cas des espaces topologiques séparés localement compacts. On montre à priori que le foncteur $Rf_!$ de l'exposé XVII admet un adjoint à droite $Rf^!$ et on établit bon nombre de ses propriétés, avant de le calculer plus explicitement dans le cas des morphismes lisses.

La possibilité d'une telle construction semble reposer sur les propriétés suivantes du foncteur $Rf_!$

a) Pour l'existence d'un adjoint $Rf^!$ et ses propriétés formelles :

(I) le foncteur $Rf_!$ commute aux changements de base;

(II) les foncteurs $R^if_!$ commutent aux limites inductives filtrantes; ils sont nuls pour i assez grand;

(III) le foncteur $Rf_!$ peut se calculer "au niveau des complexes", i.e. à partir d'un foncteur entre catégories de complexes.

b) Pour le calcul de cet adjoint dans le cas où f est lisse :

(IV) le calcul de $Rf_!((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_U)$ pour U "petit".

0.2 Au § 3 n° 1, qui est indépendant des § § 1,2, on construit le foncteur $Rf^!$; on y utilise des constructions spéciales à la situation, et non seulement (I) (II) et (III). Cela rend ce n° assez déplaisant; le rédacteur confesse ne pas toujours avoir bien compris ce qui se passait.

Le § 2 est consacré au point (IV); il est purement formel

à partir du § 1, où est étudiée la cohomologie des courbes.

Au § 1, on établit nettement plus qu'il n'est nécessaire pour le § 2, en étudiant aussi le cas de coefficients continus. Ce paragraphe a été profondément influencé par SERRE [1] . Les points utiles pour la suite sont :

a) le n° 1.1, consacré au morphisme trace dans le cas des courbes, et généralisé en 2.9;

b) le théorème d'effacement 1.6.9. Le lecteur prêt à admettre un argument transcendant peut lire le n° 1.6, à partir de 1.6.6 (2ème démonstration), indépendamment des n° 1.2 à 1.5. L'ingrédient essentiel de 1.6.9 est l'une ou l'autre forme de la dualité de Poincaré pour les courbes lisses sur un corps algébriquement clos, et le lemme d'acyclicité XV 2.6, (préliminaire au théorème de changement de base lisse XVI 1.1). Sa conclusion est généralisée en 2.17.

Le n° 3.2 recueille les fruits du § 2.

0.3 La méthode de Verdier en dualité de Poincaré permet de définir le foncteur $Rf^!$ pour f compactifiable. Cette généralité a pour contrepartie que les compatibilités à vérifier ne sont pas familières, et parfois, même pour les plus triviales, telles 3.2.3, de démonstration abracadabrante. Le rédacteur avoue ne pas en avoir démontré autant qu'il aurait dû.

Le lecteur intéressé pourra sans difficulté, à partir de l'appendice à l'exposé XVII, étendre la définition de $Rf^!$ au cas des morphismes séparés de type fini de but, un schéma cohérent (i.e. quasi-compact quasi-séparé).

0.4 Le résultat principal 3.2.5 est énoncé en termes concrets qui permettraient de revenir formellement au point de vue qui avait été celui du séminaire oral, où le foncteur $Rf^!$ était défini seulement pour

les morphismes limifiables via une factorisation par un morphisme lisse et une immersion. On trouvera une esquisse de la démonstration du séminaire oral dans VERDIER [2].

1. Cohomologie des courbes.

1.1. Le morphisme trace.

1.1.1. Soient n un entier $\geq 1$ et X un schéma sur lequel n soit inversible. Le faisceau $\mu_n$ (IX 3.1) sur X est alors un faisceau de modules localement libre de rang 1 sur le faisceau d'anneaux constant $\underline{\mathbb{Z}}/n$. Pour $i \in \mathbb{Z}$, on désigne par la notation $\underline{\mathbb{Z}}/n\ (i)$ sa puissance tensorielle $i^{\text{ème}}$.

(1.1.1.1) $$\underline{\mathbb{Z}}/n\ (i) = \underline{\mathrm{Hom}}\ (\underline{\mathbb{Z}}/n,\ \mathbb{G}_m)^{\otimes i}$$

Si $n = dn'$, l'application d'exponentiation par d établit un isomorphisme

$$\mu_n \otimes_{\underline{\mathbb{Z}}/n} \underline{\mathbb{Z}}/n' \xrightarrow{\sim} \mu_{n'} \quad ,$$

d'où des isomorphismes, dits canoniques :

(1.1.1.2) $$\underline{\mathbb{Z}}/n\ (i) \otimes_{\underline{\mathbb{Z}}/n} \underline{\mathbb{Z}}/n' \xrightarrow{\sim} \underline{\mathbb{Z}}/n'\ (i) \quad .$$

Si F est un faisceau abélien tel que $nF = 0$, on pose

(1.1.1.3) $$F(i) = F \otimes_{\underline{\mathbb{Z}}/n} \underline{\mathbb{Z}}/n\ (i) \quad .$$

Si déjà $n'F = 0$, l'isomorphisme (1.1.1.2) permet d'identifier $F \otimes_{\underline{\mathbb{Z}}/n} \underline{\mathbb{Z}}/n\ (i)$ et $F \otimes_{\underline{\mathbb{Z}}/n'} \underline{\mathbb{Z}}/n'\ (i)$, de sorte que F(i) ne dépend que de F et non du choix de n. Plus généralement, si F est un faisceau de torsion premier aux caractéristiques résiduelles de X (XVII 0.13), et si ${}_mF$ est le noyau de la multiplication par m dans F, on définit F(i) comme étant la limite inductive, pour m inversible sur X tendant multiplicativement vers l'infini

(1.1.1.4) $$F(i) = \varinjlim_m {}_mF\ (i) \quad .$$

Le foncteur $F \longmapsto F(i)$ est exact. Si $f : Y \longrightarrow X$ est un morphisme de schémas (resp. un morphisme de schémas quasi-compact quasi-séparé), et si F est un faisceau de torsion sur X (resp. sur Y), pre-

mier aux caractéristiques résiduelles de X, on a $f^*(F(i)) \simeq (f^*F)(i)$ (resp. on a $(f_*F)(i) \simeq f_*(F(i))$). Si $\mathcal{A}$ est un faisceau d'anneaux sur X, annulé par n inversible sur X, il se prolonge en un foncteur exact $K \longmapsto K(i)$ de $D(X,\mathcal{A})$ dans $D(X,\mathcal{A})$. Ce foncteur commute aux foncteurs image réciproque et aux foncteurs image directe.

Les foncteurs $F \longmapsto F(i)$ s'appelent parfois les foncteurs de "twist à la Tate"

Définition 1.1.2. Une courbe plate sur un schéma S est un morphisme $f : X \longrightarrow S$ plat de présentation finie et séparé à fibres purement de dimension un.

L'expression "purement de dimension un" n'exclut pas le schéma vide. Contrairement à EGA II 7.4.2, on admet ici qu'une courbe sur un corps soit vide, mais on exige qu'elle soit séparée.

Lorsque S est le spectre d'un corps, on parlera simplement de courbe sur S; une courbe sur un corps est quasi-projective.

1.1.3. Soit X une courbe sur un corps algébriquement clos k d'exposant caractéristique p premier à un entier $n \geqslant 1$. Supposons d'abord X réduite, et soit $\bar{X}$ une courbe complète sur k dont X soit un ouvert dense.

Le complément $Y = \bar{X}-X$ est de dimension 0. La suite exacte de cohomologie (XVII 5.1.16.3) induit donc un isomorphisme

$$(1.1.3.1) \qquad H^2_c(X, \mathbb{Z}/n(1)) \xrightarrow{\sim} H^2(\bar{X}, \mathbb{Z}/n(1)) \quad .$$

On dispose de plus d'un isomorphisme IX 4.7 (donné par la théorie de Kummer)

$$(1.1.3.2) \qquad H^2(\bar{X}, \mathbb{Z}/n(1)) = \mathrm{Pic}(\bar{X})/n \simeq (\mathbb{Z}/n)^c$$

où c désigne l'ensemble des composantes irréductibles de X, ou de $\bar{X}$, cela revient au même.

Si X n'est plus nécessairement réduite, et si c est l'ensemble de ses composantes irréductibles, désignons, pour $i \in c$, par $n_i$ la multiplicité de X au point générique $\eta_i$ de la $i^{ème}$ composante irréductible de X :

$$n_i = \lg(\mathcal{O}_{X,\eta_i}) \quad .$$

On sait que l'application de restriction de $H^2_c(X,\mathbb{Z}/n(1))$ dans $H^2_c(X_{red}, \mathbb{Z}/n(1))$ est un isomorphisme, d'où, via (1.1.3.1) et (1.1.3.2) appliqués à $X_{red}$ un isomorphisme canonique entre $H^2_c(X,\mathbb{Z}/n(1))$ et $(\mathbb{Z}/n)^c$. On désignera par $Tr_X$ ou simplement Tr la flèche composée

$$(1.1.3.3) \qquad Tr : H^2_c(X,\mathbb{Z}/n(1)) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/n)^c \xrightarrow{t} \mathbb{Z}/n \quad ,$$

où

$$t((a_i)_{i\in c}) = \Sigma\, n_i a_i \quad .$$

Si F est un groupe abélien annulé par n, on dispose d'un isomorphisme

$$H^2_c(X,F(1)) \xleftrightarrow{\sim} F \otimes H^2_c(X,\mathbb{Z}/n(1))$$

et donc via (1.1.3.3) d'un <u>morphisme trace</u>

$$(1.1.3.4) \qquad Tr : H^2_c(X,F(1)) \longrightarrow F \quad .$$

Si $n = n'd$, le diagramme

$$(1.1.3.5) \qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mu_n & \longrightarrow & \mathbb{G}_m & \xrightarrow{x^n} & \mathbb{G}_m & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle x^d} & & \downarrow{\scriptstyle x^d} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & \mu_{n'} & \longrightarrow & \mathbb{G}_m & \xrightarrow{x^{n'}} & \mathbb{G}_m & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

est commutatif et donc aussi le diagramme

$$(1.1.3.6) \qquad \begin{array}{ccc} H^2_c(X,\mathbb{Z}/n(1)) & \xrightarrow{\sim} & (\mathbb{Z}/n)^c \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^2_c(X,\mathbb{Z}/n'(1)) & \xrightarrow{\sim} & (\mathbb{Z}/n')^c \end{array}$$

d'après la définition IX 4.7 de l'isomorphisme (1.1.3.2).

La flèche (1.1.3.4) ne dépend donc que de F, et non du choix de l'entier n premier à p tel que nF = 0. Par passage à la limite, on la définit pour tout groupe abélien F de torsion premier à p.

Le lemme suivant résulte aussitôt des définitions.

Lemme 1.1.4. Sous les hypothèses précédentes, si, pour $i \in c$, $U_i$ est un ouvert non vide de X contenu dans la $i^{ème}$ composante irréductible, le diagramme

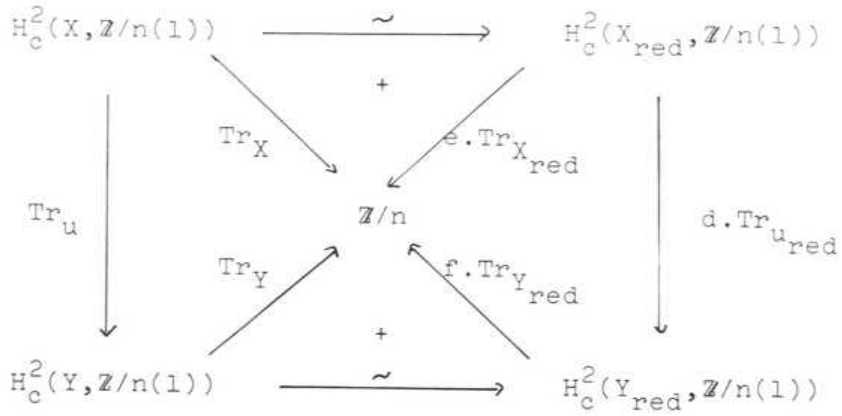
$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i\in c} H_c^2(U_i,F(1)) & \xrightarrow{\sim} & H_c^2(X,F(1)) \\ & \searrow^{\bigoplus_{i\in c} Tr_{U_i}} \quad \swarrow_{Tr_X} & \\ & F & \end{array}$$

est commutatif.

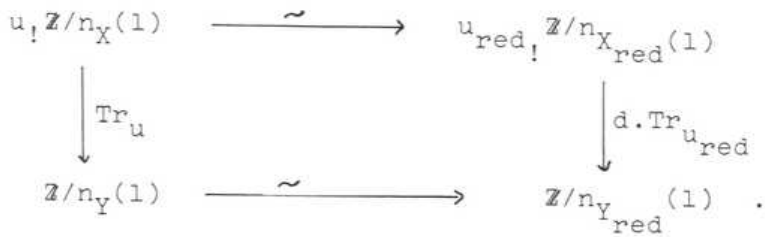
Lemme 1.1.5. Soient X et Y deux courbes sur un corps algébriquement clos k, $u : X \longrightarrow Y$ un morphisme quasi-fini et plat et n un entier premier à l'exposant caractéristique p de k .
Le diagramme suivant, dans lequel $Tr_u$ est la flèche (XVII 6.2.3), est alors commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_c^2(X,\mathbb{Z}/n(1)) & \xrightarrow{Tr_u} & H_c^2(Y,\mathbb{Z}/n(1)) \\ & \searrow^{Tr_X} \quad \swarrow_{Tr_Y} & \\ & \mathbb{Z}/n & \end{array} .$$

Le lemme 1.1.4 permet de se réduire au cas où X et Y sont irréductibles, $X_{red}$ et $Y_{red}$ étant de plus lisses. Si e (resp. f) est la multiplicité de X (resp. Y) au point générique, et si e = df, les triangles marqués + du diagramme suivant sont commutatifs :



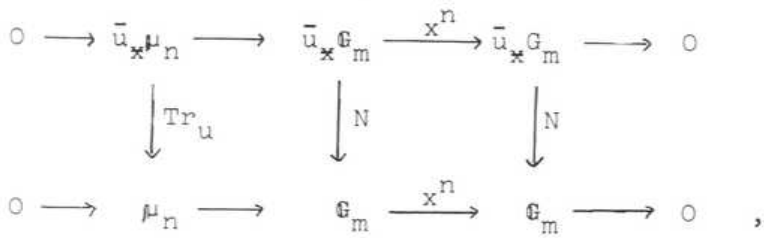

Son contour est commutatif, ainsi qu'on le déduit de la commutativité du diagramme




Il suffit de vérifier cette dernière compatibilité au point générique de Y, ce qui est trivial.

Soient $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ les courbes complètes non lisses contenant $X_{red}$ et $Y_{red}$ comme ouverts denses (EGA II 7.4.11). Le morphisme $u_{red}$ se prolonge en un morohisme plat $\bar{u} : \bar{X} \longrightarrow \bar{Y}$ (EGA II 7.4.9) et, d'après 1.1.4, il suffit de vérifier 1.1.5 pour $\bar{u}$.

D'après (XVII 6.3.18.2), le diagramme de faisceaux sur Y, dans lequel N désigne la norme,




est commutatif, donc aussi le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Pic}(X)/n & \xrightarrow{\sim} & H^2_c(X, \mathbb{Z}/n(1)) \\ \downarrow N & & \downarrow \mathrm{Tr}_u \\ \mathrm{Pic}(Y)/n & \xrightarrow{\sim} & H^2_c(Y, \mathbb{Z}/n(1)) \end{array} ,$$

et il reste à noter que si $\mathcal{L}$ est un faisceau inversible de degré 1 sur X, sa norme est encore de dégré 1 (ce fait résultant de la compatibilité EGA IV 21.10.7, compte tenu de la définition EGA IV 21.5.5 de la norme d'un diviseur).

Proposition 1.1.6 Il est d'une et d'une seule façon possible de définir, pour toute courbe plate compactifiable $f : X \longrightarrow S$ et pour tout faisceau de torsion F sur S, premier au caractéristiques résiduelles de S, un morphisme trace

$$\mathrm{Tr}_f : R^2 f_!(f^{\times} F(1)) \longrightarrow F ,$$

fonctoriel en F, de formation compatible à tout changement de base (cf. XVII 6.2.3, (VAR 2)) et qui, pour S le spectre d'un corps algébriquement clos, coincide avec le morphisme trace (1.1.3.4).

Le morphisme $\mathrm{Tr}_f$ nous est donné fibre par fibre; son unicité est donc claire.

Soit $p : \mathbb{P}^1_S \longrightarrow S$ la droite projective sur S et n un entier inversible sur S. On a $\mathrm{Pic}_S(\mathbb{P}^1_S) = \underline{\mathbb{Z}}_S$, d'où par la théorie de Kummer (IX 3.2) un morphisme $\underline{\mathbb{Z}}/n \longrightarrow R^1 p_{\times} \mathbb{Z}/n(1)$, dont on vérifie fibre par fibre (XII 5.2) que c'est un isomorphisme. Son inverse $\mathrm{Tr}_p$ induit fibre par fibre le morphisme trace (1.1.3.4).

Soit $f : X \longrightarrow S$ une courbe plate sur S telle qu'il existe un S-morphisme quasi-fini et plat u de X dans $\mathbb{P}^1_S$. En vertu de 1.1.5., le morphisme composé $\mathrm{Tr}_p \circ \mathrm{Tr}_u$ (XVII 6.2.3) admet pour fibre en un quelconque point géométrique de S le morphisme trace (1.1.3.4). En particulier, il ne dépend pas du choix de u.

Supposons que X soit une réunion de sous-schémas ouverts $U_i$ tels qu'il existe un morphisme quasi-fini et plat de $U_i$ dans $\mathbb{P}^1_S$. Si $\alpha_i$ (resp. $\alpha_{ij}$) est l'inclusion de $U_i$ (resp. $U_{ij} = U_i \cap U_j$) dans X, la suite

$$\Sigma\, R^2(f\alpha_{ij})_!\, \underline{\mathbb{Z}}/n(1) \rightrightarrows \Sigma\, R^2(f\alpha_i)_!\, \underline{\mathbb{Z}}/n(1) \longrightarrow R^2f_!\, \underline{\mathbb{Z}}/n(1) \longrightarrow 0\ .$$

est exacte, d'après (XVII 6.2.8) et l'exactitude à droite de $R^2f_!$ (puisque $R^3f_! = 0$). On vérifie fibre par fibre, par 1.1.5., que la somme des morphismes trace $\sum_i R^2(f\alpha_i)_!\, \underline{\mathbb{Z}}/n(1) \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}}/n$, se factorise par un morphisme trace $\mathrm{Tr}_f$ de $R^2f_!\, \underline{\mathbb{Z}}/n(1)$ dans $\underline{\mathbb{Z}}/n$ qui, fibre par fibre, induit (1.1.3.4).

Pour un X général, soit $j : X' \longrightarrow X$ le plus grand ouvert de X tel que $f|X'$ soit un morphisme de Cohen-Macaulay (cf. EGA IV 12.1.1 (vi)). Tout point x de X' a un voisinage $U_x$ dans X' tel qu il existe un S-morphisme quasi-fini $u_x$ de $U_x$ dans $\mathbb{P}^1_S$. Ce morphisme est automatiquement plat (EGA IV 11.3.10 et 15.4.2) et X' vérifie donc les hypothèses précédentes. De plus, X' est dense fibre par fibre dans X; le morphisme de $R^2(fj_!)\, \mathbb{Z}/n(1)$ dans $R^2f_!\, \mathbb{Z}/n(1)$ est donc un isomorphisme comme on le voit fibre par fibre et la flèche composée

$$\mathrm{Tr}_f : R^2F_!\, \mathbb{Z}/n(1) \xleftarrow{\sim} R^2(fj)_!\, \mathbb{Z}/n(1) \xrightarrow{\mathrm{Tr}_{fj}} \mathbb{Z}/n$$

induit fibre par fibre (1.1.3.4).

Si F vérifie nF = 0, on a (XVII 5.2.6)

(1.1.6.1) $$R^2f_!\, \mathbb{Z}/n(1) \otimes F \xrightarrow{\sim} R^2f_!(f^*F(1))$$

et on définit $\mathrm{Tr}_f$ comme la flèche composée

$$\mathrm{Tr}_f : R^2f_!(f^*F(1)) \xleftarrow{\sim} R^2f_!\, \mathbb{Z}/n(1) \otimes F \longrightarrow F\ .$$

Dans le cas général, on définit $\mathrm{Tr}_f$ comme limite inductive des morphismes trace relatifs aux faisceaux $F_n$ pour n inversible sur S. Ces flèches induisent fibre par fibre (1.1.3.4) et commutent donc à tout changement de base, cqfd.

On vérifie fibre par fibre à l'aide de 1.1.4, 1.1.5 et (1.1.6.1), les résultats suivants :

**Lemme** 1.1.7. Soient $f : Y \longrightarrow S$ une courbe plate compactifiable sur S, $u : X \longrightarrow Y$ un morphisme quasi-fini plat de présentation finie, et F un faisceau de torsion sur S, de torsion première aux caractéristiques résiduelles de S. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} R^2(fu)_!(fu)^*F(1) & = & R^2f_!(u_!u^*)f^*F(1) & \xrightarrow{Tr_u} & R^2f_!f^*F(1) \\ \downarrow{\scriptstyle Tr_{fu}} & & & & \downarrow{\scriptstyle Tr_f} \\ F & = & & & F \end{array} ,$$

Lemme 1.1.8. Soient $u : Y \longrightarrow S$ un morphisme quasi-fini plat de présentation finie, $f : X \longrightarrow Y$ une courbe plate S-compactifiable (XVII 3.2.1), et F comme en 1.1.7. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} R^2(uf)_!(uf)^*F(1) & = & u_!R^2f_!f^*\,u^*F(1) & \xrightarrow{Tr_f} & u_!u^*F \\ \downarrow{\scriptstyle Tr_{uf}} & & & & \downarrow{\scriptstyle Tr_u} \\ F & = & & & F \end{array}$$

On vérifie de même à partir de (1.1.3.2) :

Lemme 1.1.9. Si $f : X \longrightarrow S$ est une courbe lisse compactifiable, et si les fibres géométriques de f sont irréductibles, alors le morphisme trace (1.1.6) est un isomorphisme.

1.2. 1-acyclicité de l'espace projectif.

Dans ce n°, on utilise en principe toujours la topologie fppf (XVII 0.10).

1.2.1. Soient $\mathcal{E}$ un Module localement libre sur un schéma S, supposé

partout de rang $\geqslant 2$, $p : \mathbb{P}(\varepsilon) \longrightarrow S$ le fibré projectif correspondant et G un faisceau abélien sur le grand site fppf de S (XVII 0.10). Chaque couple $(K_o, \varphi)$ formé d'un torseur $K_o$ sous G et d'un homomorphisme $\varphi : \mathbb{G}_{mS} \longrightarrow G$ définit un $p^*G$- torseur $K(K_o, \varphi)$ sur $\mathbb{P}(\varepsilon)$, somme de $K_o$ et de l'image par $\varphi$ du $\mathbb{G}_m$-torseur $\Theta(1)$.

(1.2.1.1) $\quad K(K_o, \varphi) = K_o + \varphi\Theta(1)$ .

On fait des couples $(K_o, \varphi)$ une catégorie en posant

$$\mathrm{Hom}((K_o,\varphi),(K'_o,\varphi')) = \begin{cases} \emptyset \text{ si } \varphi \neq \varphi' \\ \mathrm{Hom}\,(K_o, K'_o) \text{ si } \varphi = \varphi' \end{cases} .$$

Le torseur $K(K_o, \varphi)$ dépend alors fonctoriellement de $(K_o, \varphi)$.
Il est compatible à la localisation, et définit donc un foncteur du champ sur S des couples $(K_o, \varphi)$ dans le champ sur S des $p^*G$-torseurs sur $\mathbb{P}(\varepsilon)$ (= le champ ayant pour sections sur U/S les $p^*G$-torseurs sur $U \times_S \mathbb{P}(\varepsilon)$). Ces champs sont des champs en groupoïde (= tout morphisme au-dessus d'un U/S est un isomorphisme).

Théorème 1.2.2. Sous les hypothèses 1.2.1, si G est un schéma en groupe commutatif plat de présentation finie sur S, alors le foncteur K de 1.2.1 est une équivalence.

1.2.2.1 Cet énoncé équivaut à la conjonction de

$$G \xrightarrow{\sim} p_* p^* G \quad \text{et}$$
$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{G}_m, G) \xrightarrow{\sim} R^1 p_* p^* G \quad .$$

En effet, un morphisme de champs en groupoïde est une équivalence si et seulement si il induit un isomorphisme sur le faisceau engendré par le préfaisceau des classes d'isomorphie d'objets (2ème formule) et un isomorphisme sur le faisceau des automorphismes d'un objet local quelconque (1ère formule).

On donnera deux démonstrations (1.2.4 et 1.2.5) de la pleine fidélité.

**Lemme** 1.2.3. Soit $f : X \longrightarrow S$ un morphisme propre et plat. On suppose que $f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_S$ universellement et $R^1 f_* \mathcal{O}_X = 0$ universellement. Tout S-morphisme de X dans un S-schéma en groupes de type fini G se factorise alors par f et une section de G; plus précisément, $G \xrightarrow{\sim} f_* f^* G$.

Il suffit de prouver la 1ère assertion.

D'après le lemme de rigidité (Mumford [1, 6.1. pg 115]; on notera que Mumford n'utilise pas l'hypothèse noethérienne faite sur S), il suffit de traiter le cas où S est le spectre d'un corps algébriquement clos. Supposons tout d'abord que G soit un schéma abélien, et soit $G^*$ le schéma abélien dual. Puisque $G = G^{**}$, la donnée de $\varphi : X \longrightarrow G$ équivaut à la donnée d'un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur $X \times G^*$, trivialisé le long de $X \times \{e\}$ et algébriquement équivalent à zéro sur les fibres de la projection $pr_1$ de $X \times G^*$ sur X. Si $x : S \longrightarrow X$ est un point rationnel de X, on a $\mathcal{L} \sim pr_2^*(x \times G^*)^* \mathcal{L} \otimes \mathcal{M}$, avec $\mathcal{M}$ trivialisé le long de $x \times G^*$ et $X \times \{e\}$. La donnée de $\mathcal{M}$ équivaut à la donnée d'un morphisme de schémas de $G^*$ dans $\underline{Pic}_{X/S}$, transformant e en e. Puisque $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$, on a $\underline{Pic}^0_{X/S} = 0$, $\mathcal{M} \sim \mathcal{O}$ et $\mathcal{L} \sim pr_2^* \mathcal{L}'$ avec $\mathcal{L}'$ équivalent à zéro sur $G^*$, donc définissant $g \in G(S)$ tel que $\varphi = g \circ f$.

Dans le cas général, G est extension d'un schéma abélien A par un groupe affine $G_0$. Le résultat précédent nous ramène au cas où A = 0, et on a alors

$$\mathrm{Hom}_S(\mathrm{Spec}\ (H^0(X, \mathcal{O}_X)), G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_S(X, G).$$

**Lemme** 1.2.4. Sous les hypothèses 1.2.1, si G est un schéma en groupes de présentation finie sur S ou est défini par un faisceau quasi-cohérent sur S, alors le foncteur (1.2.1.1) est pleinement fidèle.

A. Prouvons que si K $(K_0, \varphi)$ est isomorphe à $K(K'_0, \varphi')$, alors $\varphi = \varphi'$. Pour G quasi-cohérent, on a $\varphi = \varphi' = 0$, et l'assertion est vide. Pour G de présentation finie, d'après (SGA 3 IX 5.1), il suffit

de prouver l'assertion pour S spectre d'un corps algébriquement clos k. Soit alors T le plus grand sous-tore de G, et H = G/T. La suite exacte de cohomologie fournit

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbb{P}(\varepsilon),T) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}(\varepsilon),G) \xrightarrow{\alpha} H^0(\mathbb{P}(\varepsilon),H) \xrightarrow{\delta} H^1(\mathbb{P}(\varepsilon),T) \xrightarrow{\beta} H^1(\mathbb{P}(\varepsilon),G) \quad .$$

D'après 1.2.3. $H^0(\mathbb{P}(\varepsilon),G) \sim G(k)$ et $H^0(\mathbb{P}(\varepsilon),H) \sim H(k)$, de sorte que $\alpha$ est surjectif et $\delta$ nul. Si $Y(T) = \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m,T)$, on a $T \sim G_m \otimes Y(T)$ et $H^1(\mathbb{P}(\varepsilon),T) \sim Y(T)$. L'injectivité de $\beta$ exprime donc l'injectivité de la flèche canonique, définie par $\mathcal{O}(1)$, $\mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m,G) \simeq \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m,T) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}(\varepsilon),G)$, et ceci prouve l'assertion.

B. Prouver que le foncteur 1.2.1.1 est pleinement fidèle est une question locale sur S. On se ramène donc à supposer que $\mathbb{P}(\varepsilon)/S$ admet une section s. Si $K(K_o,\varphi)$ est isomorphe à $K(K'_o,\varphi')$, on a $\varphi = \varphi'$ par A et $K_o \sim s^*K(K_o,\varphi) \sim s^*K(K'_o,\varphi') \sim K'_o$. Grâce à la formule

(1.2.4.1) $\quad \mathrm{Hom}(K(K_o,\varphi),\ K(K'_o,\varphi')) \sim \mathrm{Hom}(K(K_o-K'_o,\varphi-\varphi'),\ G_{\mathbb{P}(\varepsilon)})$ ,

il ne nous reste plus qu'à montrer que

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{tors.}}(G,G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{tors.}}(p^*G,p^*G) \quad .$$

Ceci résulte de 1.2.3.

1.2.5. Voici une autre démonstration, plus kunnutesque , de la pleine fidélité. La question est locale sur S; d'après (1.2.4.1), il suffit donc de vérifier que

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{P}(\varepsilon)}(G,\ K(G,\varphi)) \begin{cases} = \emptyset & \text{si } \varphi \neq 0 \\ \xleftarrow{\sim} G & \text{si } \varphi \neq 0 \quad . \end{cases}$$

C'est exactement ce qu'exprime le lemme suivant :

Lemme 1.2.6. Soient $\varepsilon$ un module localement libre partout de rang $\geqslant 2$ sur S, G un schéma en groupes de présentation finie sur S, $\varphi : \mathbb{G}_m \longrightarrow G$ un homomorphisme de groupes, $\mathbf{V}(\varepsilon)$ le fibré vectoriel défini par $\varepsilon$,

$\mathbb{V}(\varepsilon)^*$ le fibré vectoriel épointé correspondant et $\Psi : \mathbb{V}(\varepsilon)^* \longrightarrow G$ un S-morphisme vérifiant l'identité suivante entre S-morphismes de $G_m \times \mathbb{V}(\varepsilon)^*$ dans G :

$$\Psi(\lambda\, v) : \varphi(\lambda)\Psi(v) \ .$$

Alors, $\varphi = e$, et $\Psi$ se factorise par la projection p de $\mathbb{P}(\varepsilon)$ sur S.

Il suffit de prouver la seconde assertion. On se ramène aussitôt au cas S noethérien, puis, par (SGA 3 IX 5.1) et le lemme de rigidité (Mumford [1,6.1 pg 115] ) appliqué à $\mathbb{P}(\varepsilon)$ au cas où S est le spectre d'un corps. Soient n un entier, $W_n$ et $G_n$ les voisinages infinitésimaux du $n^{ième}$ ordre de la section nulle dans $\mathbb{V}(\varepsilon)$ et G, $\mathfrak{g}_n$ l'algèbre affine de $G_n$ et $P_n(\Psi) : \mathbb{V}(\varepsilon)^* \longrightarrow \underline{Hom}_S(W_n, G)$ la partie principale du $n^{ième}$ ordre de $\Psi$ . Toute section de $\underline{Hom}_S(W_n, G)$ définit, en translatant à droite par l'inverse de l'image de la section nulle, un homomorphisme de $W_n$ dans $G_n$ qui transforme o en e, ceci définit

$$\Psi_1 = P_n(\Psi).\Psi^{-1} \ : \ \mathbb{V}(\varepsilon)^* \longrightarrow \underline{Hom}_S(W_n, G_n) \ .$$

L'hypothèse implique que $\Psi_1$ commute aux homothéties, que l'on fait agir sur le second membre par transport de structure à partir de leur action sur $W_n \subset \mathbb{V}(\varepsilon)^*$. L'algèbre affine de $W_n$ est $\sum_{i=0}^{n} \mathrm{Sym}^i(\varepsilon)$. Vu son homogénéité, $\Psi_1$ est donc défini par une section, sur $\mathbb{P}(\varepsilon)$, du $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\varepsilon)}$-module

$$\sum_{i=0}^{n} p^* \underline{Hom}(\mathfrak{g}_n, \mathrm{Sym}^i(\varepsilon))(-i) \ .$$

Les composantes d'indice i>0 de ce module n'ont d'autre section que la section nulle, et on en conclut que

$$\Psi_1 = 0$$

Ceci, valant pour tout n, implique que $\Psi$ se factorise par une section de G.

Cette seconde démonstration s'étend pour prouver la variante analytique suivante de 1.2.4. Lorsque G est affine, la démonstration de 1.2.2 peut se faire indépendamment de cette variante.

1.2.7. Soient L le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète complet $\mathcal{O}$, $U_m$ le groupe rigide analytique "fibre générique" du complété formel de $\mathbb{G}_m$ et $\mathcal{O}(1)^\wedge$ le $U_m$-torseur sur $\mathbb{P}^r_L$ complété formel de $\mathcal{O}(1)$. Si G est un groupe rigide analytique sur L, le foncteur $(K_o,\varphi)\longmapsto p^*K_o + \varphi\mathcal{O}(1)^\wedge$ (cf. 1.2.1) est un foncteur pleinement fidèle de la catégorie des couples $(K_o,\varphi)$ formés d'un G-torseur sur Spec(L) et de $\varphi\in\mathrm{Hom}(U,G)$, dans la catégorie des $p^*G$-torseurs sur $\mathbb{P}^r_L$.

Lemme 1.2.8. Soient k un corps d'exposant caractéristique p et f : $X\longrightarrow \mathrm{Spec}(k)$ un schéma propre sur k vérifiant $H^o(X,\mathcal{O}_X) = k$ et $\mathrm{Pic}^\tau_X = 0$. Pour tout schéma en groupe affine commutatif de type fini G sur k, ne contenant pas de tores, on a $R^1f_*(f^*G) = 0$.

Il suffit de montrer qu'après tout changement de base, $c : S\longrightarrow \mathrm{Spec}(k)$, le foncteur $f^*$ de la catégorie des G-torseurs sur S dans celle des G-torseurs sur $X_S$ est une équivalence. Ce problème est local sur Spec(k), de sorte que pour le résoudre on peut se ramener au cas où X a un point rationnel, où G est extension successive de groupes $G_a$, $\alpha_p$, $\mu_p$, $\mathbb{Z}/p$ et $\mathbb{Z}/\ell_i$ pour $\ell_i$ premier à p et où $\mathbb{Z}/\ell_i \sim \mu_{\ell_i}$.

On sait que $\mathrm{Lie}(\mathrm{Pic}_X) = H^1(X,\mathcal{O}_X) = 0$. D'après 1.2.3 et l'existence d'une section, les foncteurs $f^*$ considérés sont pleinement fidèles; il suffit donc de prouver que $R^1f_*(f^*G) = 0$, ou, par dévissage, que

$$R^1f_*G_a = R^1f_*\alpha_p = R^1f_*\mu_p = R^1f_*\underline{\mathbb{Z}}/p = R^1f_*\underline{\mathbb{Z}}/\ell_i = 0 \quad .$$

Pour $\mathbb{G}_a$, cela résulte de ce que $H^1(X,\mathcal{O}_X) = 0$. Le cas de $\alpha_p$ (resp. $\mathbb{Z}/p$) s'en déduit via 1.2.3., par la suite exacte longue de cohomologie définie par la suite exacte

$$0\longrightarrow \alpha_p\longrightarrow \mathbb{G}_a\xrightarrow{x^p}\mathbb{G}_a\longrightarrow 0$$

(resp. $$0\longrightarrow \mathbb{Z}/p\longrightarrow \mathbb{G}_a\xrightarrow{x-x^p}\mathbb{G}_a\longrightarrow 0 \quad (p\neq 1)\ ) \ .$$

Le cas de $\mathbb{Z}/\ell_i$ (resp. de $\mu_p$) se déduit de l'isomorphisme $\mathbb{Z}/\ell_i \sim \mu_{\ell_i}$,

de 1.2.3. et de la suite exacte longue déduite de la suite exacte de Kummer

$$0 \longrightarrow \mu_n \longrightarrow \mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbb{G}_m \longrightarrow 0 \quad .$$

Lemme 1.2.9. Soient S un schéma local artinien, $\bar{s}$ un point géométrique de S, $f : X \longrightarrow S$ un morphisme propre et plat, et G un schéma en groupe commutatif plat de type fini sur S. On suppose f lisse ou G affine. Si $H^0(X_{\bar{s}}, \mathcal{O}) = k(\bar{s})$, si $\mathrm{Pic}^{\tau}_{X_{\bar{s}}} = 0$ et que $G_{\bar{s}}$ ne contient pas de sous-groupe $\mathbb{G}_m$, alors le foncteur $f^*$ de la catégorie des G-torseurs sur S dans celle des $f^*$G-torseurs sur X est une équivalence.

a. Le problème posé est local sur S lorsqu'on prend pour morphismes de localisation les morphismes $u : S' \longrightarrow S$ finis et plats. Ceci permet de supposer que f admet une section x. Le foncteur $f^*$ est alors pleinement fidèle, d'après 1.2.3 et l'existence de x, et il reste à montrer que tout torseur, trivialisé le long de x, est trivial.

b. Supposons que S soit le spectre d'un corps. Si G est affine, l'assertion résulte de 1.2.8. Si X est lisse, et si G est extension d'une variété abélienne A par un groupe affine $G_o$, désignons par $G^n$ l'image réciproque de ${}_nA$ dans G. Le groupe $H^1(X,A)$ est de torsion (Raynaud [1, XIII 2.6]), donc réunion des images des $H^1(X, {}_nA)$. Le groupe $H^1(X,G)$ est dès lors réunion des images des $H^1(X,G^n)$. Les groupes $G^n$ étant affine, on conclut encore par 1.2.8.

c. Prouvons le cas général (en supposant l'existence d'une section x) par récurrence sur la longueur de S. Soit $i : S_o \hookrightarrow S$ un sous-schéma défini par un idéal I de carré nul et de longueur 1.

Les G-torseurs P sur X, tels que $x^*P$ soit trivial, sont d'après l'hypothèse de récurrence des déformations du G-torseur trivial $P_o$ sur $X \times S_o$. Si G est lisse, et si L est l'algèbre de Lie de $G_s$, ces déformations sont classifiées par

$$H^1(X_s, f^*(L \otimes I)) = 0 \quad ,$$

ce qui prouve 1.2.9 dans ce cas.

Pour G plat sur S, cet argument se généralise en terme du complexe de Lie L de $G_s$. Si $L\Lambda(G_s/k(s))$ est le complexe cotangent relatif de $G_s$, ce complexe $L \in D^b(k(s))$ est le dual de $Le^*(L\Lambda(G_s/k(s)))$. On a $H^i(L) = 0$ pour $i \neq 0,1$.

Les déformations sur S (resp. sur X) du G-torseur trivial sur $S_o$ (resp. sur $X_o$) sont classifiées par $H^1(L \otimes I)$ (resp. par $H^1(X_s, f^* \cdot (L \otimes I))$ (Illusie [1]). Par hypothèse, on a $H^1(X_s, \underline{H}^o(f^*(L \otimes I))) = 0$ (car $H^1(X_s, \mathcal{O}) = 0$) et $H^1(L \otimes I) \sim H^o(X_s, \underline{H}^1(f^*(L \otimes I)))$. On en conclut que

$$H^1(L \otimes I) \xrightarrow{\sim} H^1(X_s, f^*(L \otimes I)) \quad ,$$

ce qui signifie que toute déformation sur X du G-torseur trivial sur $X_o$ est image réciproque d'une et d'une seule déformation à S du G-torseur trivial sur $S_o$. Si cette déformation est triviale le long d'une section, elle est donc triviale, ce qui prouve 1.2.9 .

1.2.10. Prouvons 1.2.2 lorsque S est artinien. Soit T le plus grand sous-tore de G; puisqu'on dispose déjà de la pleine fidélité (1.2.4), le problème est local sur S pour la topologie étale : on peut supposer T diagonalisable : $T \sim \mathbb{G}_m^n$. Par 1.2.3., et 1.2.9 la suite exacte de cohomologie fournit

$$R^1 f_* T \xrightarrow{\sim} R^1 f_* G \quad ,$$

et l'assertion en résulte, puisqu'elle est triviale pour G = T et que $\mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, T) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, G)$ (cf. 1.2.2.1).

1.2.11. Prouvons 1.2.2 lorsque S est noethérien local complet. Soit s une section de p.

Si K est un G-torseur sur $\mathcal{P}(\varepsilon)$, il existe par 1.2.0 un unique couple $(\varphi\hat{}, \psi\hat{})$ formé d'un homomorphisme formel $\varphi\hat{} : \mathbb{G}_m \longrightarrow G$ et d'un isomorphis-

me formel $\Psi\hat{}$ : $p^*s^*K + \varphi\hat{}\mathcal{O}(1) \xrightarrow{\sim} K\hat{}$. Si G est affine, alors $\varphi\hat{}$ est algébrisable (SGA 3 IX 7.1). Admettons provisoirement que, ainsi qu'on le prouvera en (1.2.7.3), $\varphi\hat{}$ est toujours algébrisable en $\varphi : \mathbb{G}_m \longrightarrow G$.

Si $K_o = s^*K$ , et si $K_1 = p^*K_o + \varphi\mathcal{O}(1)$, on dispose d'un isomorphisme formel $\Psi\hat{}$ : $K_1\hat{} = K(K_o,\varphi)\hat{} \xrightarrow{\sim} K\hat{}$, i.e. d'une trivialisation formelle de $K\text{-}K_1$. En vertu de GAGA formel, cette section est algébrique, ce qui prouve 1.2.11. Plus précisément, si G est quasi-affine, alors $K\text{-}K_1$ est représentable et on utilise EGA III 5.1.4. . Dans le cas général, on procède de même avec l'espace algébrique $K\text{-}K_1$.

1.2.2.12. Algébraïcité de $\varphi\hat{}$ : vérification préliminaire pour un trait de base.

Supposons que S soit un trait complet, S = Spec(V), et soit L le corps des fractions de V.

a) Sur L, il existe un unique triple $(K_{oL},\varphi_L,\Psi_L)$ :

$$\Psi_L : K(K_{oL},\varphi_L) \xrightarrow{\sim} K|\mathrm{Spec}(L) .$$

b) D'après (1.2.10) (1.2.2.11), et avec les notations de 1.2.7 , on dispose d'une application rigide analytique $\varphi_L\hat{} : U_m \longrightarrow G\hat{}$, d'un $G\hat{}$-torseur $K_o\hat{}$ et d'un isomorphisme rigide analytique

$$\Psi\hat{} : p^*K_o\hat{} + \varphi_L\hat{}\mathcal{O}(1)\hat{} \xrightarrow{\sim} K\hat{} .$$

D'après l'assertion d'unicité 1.2.7 , $\varphi_L\hat{}$ s'identifie à l'application déduite de $\varphi_L$. Le morphisme formel $\varphi\hat{}$ de 1.2.11 induit donc sur $\mu_n$ une application qui coincide avec l'application déduite de l'application algébrique $\varphi_L : \mathbb{G}_m \longrightarrow G$.

1.2.2.13. Algébraïcité de $\varphi\hat{}$.

L'application formelle $\varphi\hat{} : \mathbb{G}_m\hat{} \longrightarrow G$ de 1.2.11 induit, pour $\ell$ inversible sur S, des applications

$$\varphi_\ell : T_\ell(\mathbb{G}_m\hat{}) = T_\ell(\mathbb{G}_m) \longrightarrow T_\ell(G) .$$

D'après (1.2.12) et (EGA II 7.1.9), pour tout point t de S, il existe

un morphisme algébrique $\varphi_t : \mathbb{G}_{m_t} \longrightarrow G_t$ tel que $T_\ell(\varphi_t) = T_\ell(\varphi)_t$. D'après (SGA 3 XV 4.1 bis) $\varphi\hat{}$ est donc algébrisable.

1.2.14. Prouvons 1.2.2. Par passage à la limite, on se ramène au cas S noethérien, puis S noethérien local d'algèbre affine A. Soit s une section de p. Soit K un G-torseur sur $\mathbb{P}(\varepsilon)$. Sur S' = Spec (A$\hat{}$), il existe un et un seul homomorphisme $\varphi' : \mathbb{G}_{mS'} \longrightarrow G_{S'}$, tel que l'image réciproque K' de K sur $\mathbb{P}(\varepsilon)\times_S S'$ soit de la forme $K(K'_o, \varphi')$. Cet homomorphisme $\varphi'$ se descend en $\varphi : \mathbb{G}_m \longrightarrow G$. Pour prouver la surjectivité essentielle du foncteur 1.2.1 , il est loisible de remplacer K par $K\text{-}\varphi_*\mathcal{O}(1)$, i.e. de supposer que $\varphi = 0$. Sur S', il existe alors un et un seul isomorphisme $\Psi : p'^* s^* K' \xrightarrow{\sim} K'$, induisant l'identité sur la section s. Ce morphisme se descend à S (descente fpqc de morphismes de torseurs fppf), et ceci prouve 1.2.2.

Variantes 1.2.15. La conclusion de 1.2.2 est encore vérifiée dans les cas suivants.

(i) G est défini par un Module quasi-cohérent sur S.

(ii) G est image réciproque d'un faisceau de torsion sur le petit site étale de S.

Dans le cas (i), les flèches (1.2.2.1) sont des isomorphismes d'après le théorème de changement de base pour un morphisme propre et la simple connexité de $\mathbb{P}^r_k$ pour k algébriquement clos.

Dans le cas (ii), que les flèches (1.2.2.1) soient des isomorphismes est standard, compte tenu de ce que la cohomologie fppf de G coincide avec sa cohomologie pour la topologie de Zariski.

## 1.3. Intégration des torseurs.

1.3.1 Soient S un schéma et G un faisceau abélien sur le grand site fppf de S, vérifiant les 3 conditions suivantes.

(1.3.1.1) (i) Pour tout espace projectif $p : \mathbb{P}_S \longrightarrow S$, avec $r \geqslant 1$, on a, dans le grand site fppf de S (XVII 0.10)

$$G \xrightarrow{\sim} p_* p^* G \quad \text{et}$$

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G}_m, G) \xrightarrow{\sim} R^1 p_* p^* G$$

(ii) Pour tout n et tout S-morphisme affine lisse $f : X \longrightarrow T$, si $K_1$ et $K_2$ sont deux G-torseurs sur $\mathrm{Sym}^n_T(X)$, l'ensemble $\mathrm{Hom}(K_1, K_2)$ s'identifie à l'ensemble des morphismes symétriques de l'image réciproque de $K_1$ sur $(X/T)^n$ dans l'image réciproque de $K_2$ sur $(X/T)^n$.

Cette condition équivant à la conjonction de :

(ii') $\mathrm{Hom}_S(\mathrm{Sym}^n_T(X), G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_S((X/T)^n, G)^{\mathfrak{S}_n}$, et

(ii") Si l'image réciproque sur $(X/T)^n$ d'un torseur K sur $\mathrm{Sym}^n_T(X)$ admet une section symétrique, alors K est trivial.

(iii) G vérifie soit la condition (XVII 6.3.21.1), soit les conditions (XVII 6.3.24.1) et (XVII 6.3.24.2).

La conclusion de 1.2.2 est donc vérifiée (cf. 1.2.2.1), ainsi que le formulaire XVII 6.3.26 .

La condition (i) est discutée en 1.2.2 et 1.2.15 . La condition (ii) est vérifiée dès que G est représentable de présentation finie, où image réciproque d'un faisceau sur le petit site étale de S, ou plat quasi-cohérent. La condition 1.3.1.1 est donc vérifiée dans chacun des cas suivants.

(1.3.1.2) (a) G est lisse de présentation finie (1.2.2 et XVII 6.3.21.1).

(b) G est image réciproque d'un faisceau de torsion sur le petit site étale de S (1.2.15 (ii) et XVII 6.3.21.1).

(c) G est affine, et noyau d'un épimorphisme de groupes lisses (1.2.2 et XVII 6.3.3.1).

(d) G est défini par un faisceau quasi cohérent plat sur S (1.2.15 (i) et XVII 6.3.21.1).

1.3.2. Soit $f : X \longrightarrow S$ une courbe projective et lisse sur un schéma S, à fibres géométriques connexes non vides. Soit $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur X "suffisamment" relativement ample au sens suivant.

(1.3.2.1) Pour tout point géométrique s de S, si $X_s$ est de genre g, alors

$$\deg_{X_s}(\mathcal{L}) > 2g - 2 \quad ,$$

$$\deg_{X_s}(\mathcal{L}) \geqslant 1 \text{ si } g = 0, \text{ et } \deg_{X_s}(\mathcal{L}) \geqslant 2 \text{ si } g = 1$$

On a alors $R^1 f_* \mathcal{L} = 0$, et $f_* \mathcal{L}$ est localement libre de formation compatible à tout changement de base, et partout de rang $\geqslant 2$. Si une section s de $f_* \mathcal{L}$ ne s'annule en aucun point, le schéma $D_s$ des zéros de s, regardé comme section de $\mathcal{L}$ sur X, est un diviseur relatif (EGA IV 21.15.2), fini localement libre sur S puisque X/S est de dimension relative 1. On a canoniquement

$$s : \mathcal{O}(D_s) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L} \ .$$

Le diviseur $D_s$ ne dépend de s qu'à multiplication par une section de $\mathcal{O}_S^*$ près. La construction précédente nous fournit donc un diviseur relatif $Z_{\mathcal{L}}$ sur le schéma déduit de X par le changement de base

$$p : \mathbb{P}(f_*(\mathcal{L})^\vee) \longrightarrow S \quad .$$

Soit K un torseur sous $G_X$, et soit $K|Z_{\mathcal{L}}$ son image réciproque sur $Z_{\mathcal{L}}$. La trace de ce torseur (XVII 6.3.26), de $Z_{\mathcal{L}}$ à $\mathbb{P}(f_*(\mathcal{L})^\vee)$ est un torseur $K_{\mathcal{L}}$ sur $\mathbb{P}(f_*(\mathcal{L})^\vee)$ :

$$K_{\mathcal{L}} = \mathrm{Tr}_{Z_{\mathcal{L}}/\mathbb{P}}(K|Z_{\mathcal{L}}) \quad .$$

En vertu de 1.2.2, il existe un triple, unique à isomorphisme unique près, formé d'un G-torseur $\langle \mathcal{L}, K]$ sur S, d'un morphisme $\varphi_{\mathcal{L},K} : \mathbb{G}_m \longrightarrow G$ et d'un isomorphisme

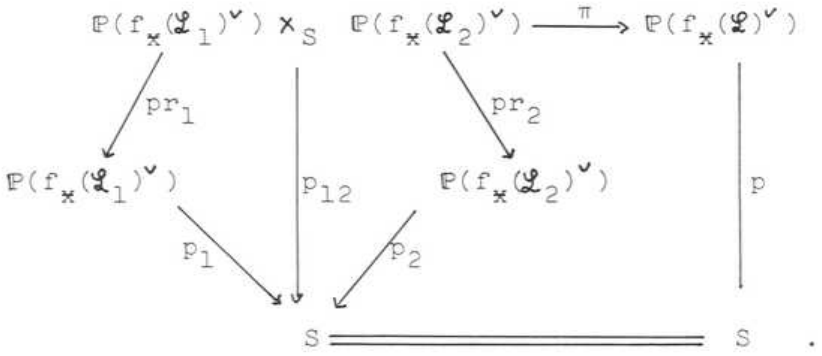
$$K_{\mathcal{L}} \simeq p^* \langle \mathcal{L}, K] + \varphi_{\mathcal{L},K} \mathcal{O}(1) \quad .$$

1.3.3. Si on note additivement la composition des torseurs, on a canoniquement

(1.3.3.1) $\quad \langle \mathcal{L}, K_1 + K_2] \quad \simeq \quad \langle \mathcal{L}, K_1] + \langle \mathcal{L}, K_2]$

(1.3.3.2) $\quad \varphi_{\mathcal{L}, K_1 + K_2} = \varphi_{\mathcal{L}, K_1} + \varphi_{\mathcal{L}, K_2}$ .

Soient $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ deux faisceaux inversibles sur X vérifiant (1.3.3.1), et $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2$. Le produit tensoriel des sections définit un morphisme




On a $\pi^* Z + Z_{\mathcal{L}_1} + Z_{\mathcal{L}_2}$, d'où un isomorphisme (XVII 6.3.27.1)

(1.3.3.3) $\quad \pi^* K_{\mathcal{L}} \simeq pr_1^* K_{\mathcal{L}_1} + pr_2^* K_{\mathcal{L}_2}$ .

On dispose d'un isomorphisme canonique

$$\pi^* \mathcal{O}(1) \simeq pr_1^* \mathcal{O}(1) \otimes pr_2^* \mathcal{O}(1) ,$$

de sorte que (1.3.3.3) se réécrit

$$\pi^*(p^* \langle \mathcal{L}, K] + \varphi_{\mathcal{L}, K} \mathcal{O}(1)) \simeq p_{12}^* \langle \mathcal{L}, K] + pr_1^* \varphi_{\mathcal{L}, K} \mathcal{O}(1) + pr_2^* \varphi_{\mathcal{L}, K} \mathcal{O}(1)$$

$$p_{12}^* \langle \mathcal{L}_1, K] + p_{12}^* \langle \mathcal{L}_2, K] + pr_1^* \varphi_{\mathcal{L}_1, K} \mathcal{O}(1) + pr_2^* \varphi_{\mathcal{L}_2, K} \mathcal{O}(1) .$$

On en déduit, par une double application de 1.2.2, un isomorphisme canonique

(1.3.3.4) $\quad \langle \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2, K] \simeq \langle \mathcal{L}_1, K] + \langle \mathcal{L}_2, K]$

et une identité

$$\varphi_{\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2, K} = \varphi_{\mathcal{L}_1, K} = \varphi_{\mathcal{L}_2, K} \quad .$$

On voit donc que $\varphi_{\mathcal{L}, K}$ ne dépend que de K, et on pose

(1.3.3.5) $$\deg(K) = \varphi_{\mathcal{L}, K} \quad .$$

On a donc

(1.3.3.6) $$K_{\mathcal{L}} \simeq p^{*}\langle \mathcal{L}, K] + \deg(K)\mathcal{O}(1) \quad .$$

(1.3.3.7) $$\deg(K_1 + K_2) = \deg(K_1) + \deg(K_2) \quad .$$

Soit $\mathcal{U}$ un faisceau inversible localement facteur direct $f_{*}\mathcal{L}$, définissant une section u de $\mathbb{P}((f_{*}\mathcal{L})^{\vee})$. Soit $D_u$ le diviseur relatif défini par les sections locales inversibles de $\mathcal{U}$.

$$u_s^{*}\mathcal{O}(1) + \mathcal{U}_s^{\vee}$$

et on déduit donc de 1.3.3.6 que

(1.3.3.8) $$u^{*}K_{\mathcal{L}} = \mathrm{Tr}_{D/S}(K) \simeq \langle \mathcal{L}, K] - \deg(K)\,\mathcal{U} \quad .$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier la compatibilité:

Proposition 1.3.4 Le diagramme suivant d'isomorphismes 1.3.3.1 et 1.3.3.4 est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \langle \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2, K_1 + K_2] & \simeq & \langle \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2, K_1] + \langle \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2, K_2] \\ & & \| \\ \| & & \langle \mathcal{L}_1, K_1] + \langle \mathcal{L}_2, K_1] + \langle \mathcal{L}_1, K_2] + \langle \mathcal{L}_2, K_2] \\ & & // \\ \langle \mathcal{L}_1, K_1 + K_2] + \langle \mathcal{L}_2, K_1 + K_2] & \simeq & \langle \mathcal{L}_1, K_1] + \langle \mathcal{L}_1, K_2] + \langle \mathcal{L}_2, K_1] + \langle \mathcal{L}_2, K_2] \end{array} \quad .$$

Les isomorphismes (1.3.3.1) et (1.3.3.4) sont de plus compatibles aux isomorphismes d'associativité et de commutativité en un sens qu'on laisse au lecteur le soin d'expliciter. La formule (1.3.3.4) permet alors de prolonger par "linéarité" la définition de $\langle \mathcal{L}, K]$ lorsque $\mathcal{L}$

ne vérifie plus nécessairement la condition (1.3.2.1).

1.3.5. Pour tout diviseur relatif D sur X, on pose

(1.3.5.0) $$\mathrm{Tr}_{D/S}(K) = \mathrm{Tr}_{D/S}(K|D) \quad .$$

Si $\mathcal{O}(D)$ vérifie (1.3.2.1), la section 1 de $\mathcal{O}(D)$ est une section de $f_*\mathcal{O}(D)$, et engendre en tant que telle un faisceau inversible localement facteur direct de $f_*\mathcal{O}(D)$, dont elle définit une trivialisation. L'isomorphisme 1.3.3.8 nous fournit donc un isomorphisme

(1.3.5.1) $$\langle \mathcal{O}(D), K] \xrightarrow{\sim} \mathrm{Tr}_{D/S}(K) \quad .$$

On vérifie aussitôt que les diagrammes

(1.3.5.2)
$$\begin{array}{ccc} \langle \mathcal{O}(D), K_1 + K_2] & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Tr}_{D/S}(K_1 + K_2) \\ \wr\downarrow & & \downarrow\wr \\ \langle \mathcal{O}(D), K_1] + \langle \mathcal{O}(D), K_2] & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Tr}_{D/S}(K_1) + \mathrm{Tr}_{D/S}(K_2) \end{array}$$

et

(1.3.5.3)
$$\begin{array}{ccc} \langle \mathcal{O}(D_1 + D_2), K] & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Tr}_{D_1 + D_2/S}(K) \\ \wr\downarrow & & \downarrow\wr \text{ (XVII 6.3.27.1)} \\ \langle \mathcal{O}(D_1), K] + \langle \mathcal{O}(D_2), K] & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Tr}_{D_1/S}(K) + \mathrm{Tr}_{D_2/S}(K) \end{array}$$

sont commutatifs. Ceci permet, par linéarité, de définir l'isomorphisme (1.3.5.1) pour tout diviseur relatif.

1.3.6. Soient D et E deux diviseurs de Cartier relatif effectifs, et soit f une fonction rationnelle telle que

$$\mathrm{div}(f) = D - E \quad ,$$

i.e. un isomorphisme entre $\mathcal{O}(D)$ et $\mathcal{O}(E)$. L'isomorphisme f entre $\mathcal{O}(D)$ et $\mathcal{O}(E)$ définit, par (1.3.5.1), un isomorphisme

(1.3.6.1) $$\langle f, K] : \mathrm{Tr}_{D/S}(K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Tr}_{E/S}(K) \quad .$$

On a, par 1.3.5.2 pour la seconde formule :

$$\langle fg,K] = \langle f,K].\langle g,K]$$
$$\langle f,K_1 + K_2] = \langle f,K_1] + \langle f,K_2] \quad .$$

Si $\lambda$ est une section de $\mathcal{O}_S^*$, alors, pour tout faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur X, la multiplication par $\lambda$ est un automorphisme de $\mathcal{L}$. Par transport de structure, cet automorphisme induit sur les deux membres de 1.3.3.8 des automorphismes qui se déduisent l'un de l'autre via l'isomorphisme 1.3.3.8 . On en déduit que

$$\langle \lambda,K] = \deg(K)\ (\lambda) \quad ,$$

si $\deg(K) \neq 0$, l'isomorphisme $\langle f,K]$ entre $Tr_{D/S}(K)$ et $Tr_{E/S}(K)$ dépend donc du choix de f.

Soient $\lambda \in \Gamma(S,\mathcal{O}_S^*)$, $g \in \Gamma(S,G)$, $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur X et K un G-torseur sur X. Si $\langle \lambda,g]$ est l'automorphisme de $\langle \mathcal{L},,K]$ déduit par transport de structure des automorphismes $\lambda$ de $\mathcal{L}$ et g de K, alors, $\langle \lambda,g]$, identifié à une section de G, est donné par $\langle \lambda,g] = \langle \lambda,K] + \langle \mathcal{L},g]$; puisque $\langle \vartheta(D),g] = Tr_{D/S}(g)$, on tire de la formule précédente que

(1.3.6.2) $$\langle \lambda,g] = \deg(K)\ (\lambda) + \deg(\mathcal{L}).g \quad .$$

1.3.7. Soit $f : X \longrightarrow S$ une courbe projective et lisse sur S et G un groupe sur S vérifiant 1.3.1.1 . Si $X \xrightarrow{f_o} T \xrightarrow{\pi} S$ est la factorisation de Stein de f, alors $\pi$ est un revêtement étale de S et le faisceau $f_*\mathbb{G}_m$ est le tore $\prod_{T/S} \mathbb{G}_m$. Localement sur S (pour la topologie étale), X est somme d'une famille de courbes $(X_i)_{i \in I}$ sur S à fibres géométriques connexes non vides. Si K est un torseur sous G et $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur X, on pose alors

$$\langle \mathcal{L},K] = \sum_i \langle \mathcal{L}|X_i, K|X_i]$$

et on définit le degré de K : $f_*\mathbb{G}_m = \mathbb{G}_m^I \longrightarrow G$ comme ayant les coordonnées $\deg(K|X_i) : \mathbb{G}_m \longrightarrow G$. Les constructions locales se globalisent et

fournissent des foncteurs et morphismes

(1.3.7.1) $\quad \langle \mathcal{L}, K]_{X/S} = Tr_{T/S}(\langle \mathcal{L}, K]_{X/T})$

(1.3.7.2) $\quad \deg(K) : f_* \mathbb{G}_m = \prod_{T/S} \mathbb{G}_m \longrightarrow G : \deg_{X/S}(K) = \prod_{T/S} \deg_{X/T}(K)$ .

Pour $\lambda$ un automorphisme de $\mathcal{L}$, défini par un élément $\lambda_o$ de $\Gamma(T, \mathcal{O}_T^*)$, on a

(1.3.7.3) $\quad \langle \lambda, K] = \deg(K)(\lambda)$ .

On définit le degré total de K comme le composé

$$\deg \text{ tot}(K) : \mathbb{G}_m \longrightarrow f_* \mathbb{G}_m \xrightarrow{\deg(K)} G \quad .$$

Les résultats qui précèdent fournissent :

Formulaire 1.3.8.: Pour toute courbe projective et lisse $f : X \longrightarrow S$, on dispose d'un foncteur $\langle \ , \ ]$, de formation compatible à tout changement de base, qui à un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur X et à un torseur K sous $f^*G$ associe un torseur $\langle \mathcal{L}, K]$ sous G sur S. Ce foncteur est muni des structures additionnelles suivantes et vérifie les conditions suivantes :

(1.3.8.1) $\langle \mathcal{L}, K]$ est biadditif en $\mathcal{L}$ et K; les isomorphismes de biadditivité sont compatibles aux isomorphismes d'associativité et de commutativité, aux changements de base, vérifient la compatibilité (1.3.4) et sont compatibles aux isomorphismes (1.3.8.2) ci-dessous (via XVII 6.3.25.3 et XVII 6.3.27.1).

(1.3.8.2) On a, pour tout diviseur relatif effectif E sur X/S, un isomorphisme canonique

$$\langle \mathcal{O}(E), K] \xrightarrow{\sim} Tr_{E/S}(K|E) \quad .$$

(1.3.8.3) Le degré 1.3.7.2 vérifie pour $\lambda \in f_* \mathbb{G}_m$ automorphisme de $\mathcal{L}$

$$\langle \lambda, K] = \deg(K)(\lambda) \quad .$$

Pour $\lambda \in \mathbb{G}_m(S)$, le degré total vérifie

$$\langle \lambda, K] = \deg \text{ tot}(K)\ (\lambda) \quad .$$

De même, pour $g \in G(S)$ on a $\langle \mathcal{L}, g] = \deg(\mathcal{L}).g$ .
On en déduit un isomorphisme canonique :

(1.3.8.4) $\qquad \langle f^{*}\mathcal{L}, K] \simeq \deg \mathrm{tot}(K)(\mathcal{L})$ .

Il résulte aussitôt des définitions que pour tout homomorphisme $\varphi : G \longrightarrow G'$, on dispose d'un isomorphisme canonique, compatible aux données qui précèdent :

(1.3.8.5) $\qquad \langle \mathcal{L}, \varphi(K)] \simeq \varphi(\langle \mathcal{L}, K])$ .

(1.3.8.6) Soit $u : X \longrightarrow Y$ un morphisme plat entre courbes projectives et lisses sur S. On dispose alors d'isomorphismes compatibles à la biadditivité et aux changements de base :

- Pour $\mathcal{L}$ faisceau inversible sur X et K un $G_Y$-torseur sur Y, on a
$$\langle \mathcal{L}, u^{*}K] \xrightarrow{\sim} \langle N_{X/Y}(\mathcal{L}), K] \quad .$$
- Pour $\mathcal{L}$ faisceau inversible sur X et K un $G_X$-torseur sur X, on a
$$\langle u^{*}\mathcal{L}, K] \xrightarrow{\sim} \langle \mathcal{L}, \mathrm{Tr}_{X/Y}K] \quad .$$

De plus, ces isomorphismes vérifient une compatibilité évidente pour un composé uv de morphismes de courbes; pour $\mathcal{L} = \mathcal{O}(E)$, ils s'identifient aux isomorphismes (XVII 6.3.27.2)

$$\mathrm{Tr}_{E/S}(u^{*}K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Tr}_{p_{*}E/S}(K)$$

$$\mathrm{Tr}_{p^{*}E/S}(K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Tr}_{E/S}\,\mathrm{Tr}_{X/Y}K \quad .$$

Reste à prouver 1.3.8.6. On se ramène au cas X et Y à fibres géométriques connexes non vides et on note que les formules explicites qui précèdent fournissent, pour chaque section s de $\mathcal{L}$ , qui ne s'annule pas en tant que section de l'image directe de $\mathcal{L}$, un isomorphisme $\Psi_s$ du type voulu, homogène en s , et donc indépendant de s pour $\mathcal{L}$ vérifiant (1.3.2.1). Le cas général s'en déduit.

1.3.9. Sous les hypothèses 1.3.7, on a vu (1.3.8) que tout G-torseur K sur X définit un foncteur $\langle *, K]$, désigné ci-dessous par F(*),

muni des données additionnelles suivantes et vérifiant les conditions suivantes :

(i) F est un morphisme de champ fppf sur S (XVII 0.10 et Giraud [1])

- de source le champ dont les T-objets, pour T un S-schéma, sont les faisceaux inversibles sur $X_T$

- de but le champ des G-torseurs.

(ii) Le foncteur F est muni d'isomorphismes d'additivité $F(\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2) \xrightarrow{\sim} F(\mathcal{L}_1) + F(\mathcal{L}_2)$, fonctoriels, compatibles aux isomorphismes d'associativité et de commutativité, et compatibles aux changements de base.

Théorème 1.3.10. Sous les hypothèses de 1.3.7, le foncteur $\phi : K \longmapsto \langle *, K]$ est une équivalence entre la catégorie des G-torseurs sur X et la catégorie des morphismes de champs considérés en (1.2.9). On se ramène facilement au cas où X est à fibres connexes non vides.

Soit F vérifiant 1.3.9 (i) et (ii). Pour tout S-schéma T et toute section t de $X_T/T$, désignons encore par t le diviseur relatif t(S). $F(\mathcal{O}(t))$ est alors un $G_T$-torseur sur T. On désignera par $\Psi(F)$ le torseur ainsi obtenu sur X, pour t le "point universel" de X, à valeur dans X, défini par l'application identique de X dans X. Pour toute section t comme plus haut, on a

$$F(\mathcal{O}(t)) \simeq t^*\Psi(F) \quad . \tag{1.3.10.1}$$

L'isomorphisme 1.3.8.2 fournit un isomorphisme de foncteurs $\Psi\circ\phi \xrightarrow{\sim} Id$. Construisons un isomorphisme $\phi\circ\Psi \simeq Id$.

Pour chaque section t de $X_T$ sur T, l'isomorphisme (1.3.10.1) est un isomorphisme

$$F(\mathcal{O}(t)) \xrightarrow[\alpha]{\sim} \langle \mathcal{O}(t), \Psi(F)] \quad .$$

Par addition, chaque famille $t_1 \ldots t_n$ de sections de $X_T$ sur T définit un isomorphisme

$$F(\mathcal{O}(\Sigma t_i)) \xrightarrow[\alpha]{\sim} \langle \mathcal{O}(\Sigma t_i), \Psi(F)] \quad ,$$

et d'après 1.3.9 (ii), cet isomorphisme ne dépend pas de l'ordre des $t_i$ .

509

Prenons $T = (X/S)^n$ et pour $t_1 \ldots t_n$ le $n^{uple}$ universel de sections. Si $T' = \mathrm{Sym}^n_S(X)$, on dispose alors sur $X_T$, d'un diviseur $\Sigma t_i$, dont le diviseur $\Sigma t_i$ sur $X_T$ soit image réciproque. Sur T, $\alpha$ est un isomorphisme symétrique

$$\alpha : F(\mathcal{O}(\Sigma t_i)) \xrightarrow{\sim} \langle \mathcal{O}(\Sigma t_i), \Psi(F)]$$

entre torseurs image réciproque de torseurs sur T'. Par hypothèse (1.3.1.1)(ii), cet isomorphisme provient d'un et d'un seul isomorphisme sur T'

$$\alpha : F(\mathcal{O}(\Sigma t_i)) \xrightarrow{\sim} \langle \mathcal{O}(\Sigma t_i), \Psi(F)] \qquad \text{(sur T')} .$$

D'après XVII 6.3., on dispose ainsi pour tout diviseur relatif D sur X d'un isomorphisme

$$(1.3.10.2) \qquad \alpha_D : F(\mathcal{O}(D)) \xrightarrow{\sim} \langle \mathcal{O}(D), \Psi(F)] ,$$

additif en D, et de formation compatible à tout changement de base.

Soit $\mathcal{L}$ un faisceau inversible suffisamment ample sur X au sens 1.3.2.1 . Chaque section partout non nulle s de $f_*\mathcal{L}$ définit, avec les notations de 1.3.2 , un isomorphisme

$$s : \mathcal{O}(D_s) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L} ,$$

d'où, par (1.3.10.2), un isomorphisme

$$(1.3.10.3) \qquad \alpha_s : F(\mathcal{L}) \xrightarrow{\sim} \langle \mathcal{L}, \Psi(F)] .$$

Prouvons que cet isomorphisme ne dépend pas de s. En effet :
(i) La formation de $\alpha_s$ est compatible à tout changement de base
(ii) Il existe un homomorphisme $\varphi : \mathbb{G}_m \longrightarrow G$ tel que

$$\alpha_{\lambda s} = \varphi(\lambda).\alpha_s$$

(d'après la fonctorialité des deux membres de (1.3.10.3)).

On a nécessairement $\varphi = 0$, sans quoi le torseur sur $\mathbb{P}((f_*\mathcal{L})^\vee)$ image réciproque de $F(\mathcal{L}) - \langle \mathcal{L}, \Psi(F)]$ serait de degré $\neq 0$. Les $\alpha_s$ définissent donc un morphisme de $\mathbb{P}((f_*\mathcal{L})^\vee)$ dans G, et ce dernier est constant par

hypothèse ((1.3.1.1)(i). On peut donc poser $\alpha_{\mathscr{L}} = \alpha_s$ .

Les isomorphismes $\alpha_{\mathscr{L}}$ forment donc un isomorphisme de foncteur entre les restrictions des foncteurs F et $\langle *, \Psi(F)]$ aux faisceaux suffisamment amples. Cet isomorphisme est compatible aux isomorphismes d'additivité, ce qui permet de le prolonger par linéarité à tous les faisceaux inversibles et achève la construction de

$$\alpha : \Phi o \Psi \xrightarrow{\sim} \mathrm{Id} .$$

Exemple 1.3.11.: $G = \mathbb{G}_m$ . Sous les hypothèses 1.3.7, et dans le cas particulier où $G = \mathbb{G}_m$, on écrira $\langle , \rangle$ plutôt que $\langle , ]$ ; si $\mathscr{L}$ et $\mathscr{M}$ sont deux faisceaux inversibles sur X, alors $\langle \mathscr{L}, \mathscr{M} \rangle$ est un faisceau inversible sur S. On dispose de plus d'isomorphismes (1.3.8.2)

$$\langle \mathscr{O}(D), \mathscr{M} \rangle \xrightarrow{\sim} N_{D/S}(\mathscr{M}) .$$

Si D et E sont des diviseurs relatifs effectifs disjoints, alors $\mathscr{O}(E)|D$ est canoniquement isomorphe à $\mathscr{O}$, d'où un isomorphisme

(1.3.11.1) $$\sigma_{D,E} : \langle \mathscr{O}(D), \mathscr{O}(E) \rangle \xrightarrow{\sim} N_{D/S}(\mathscr{O}(E)) \xrightarrow{\sim} N_{D/S}(\mathscr{O}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{O} .$$

Proposition 1.3.12.: Soient $(D_i)_{i=1,2}$ et E des diviseurs relatifs effectifs, avec $D_i$ disjoint de E (i=1,2). Soit f une fonction rationnelle vérifiant $\mathrm{div}(f) = D_1 - D_2$, i.e. un isomorphisme $f : \mathscr{O}(D_1) \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}(D_2)$. Les diagramme d'isomorphismes suivants sont commutatifs

(1.3.12.1)
$$\begin{array}{ccc} \langle \mathscr{O}(D_1), \mathscr{O}(E) \rangle & \xrightarrow{\sigma_{D_1,E}} & \mathscr{O} \\ \downarrow{\scriptstyle \langle f, \mathscr{O}(E) \rangle} & & \downarrow{\scriptstyle N_{E/S}(f)} \\ \langle \mathscr{O}(D_2), \mathscr{O}(E) \rangle & \xrightarrow{\sigma_{D_2,E}} & \mathscr{O} \end{array}$$

(1.3.12.2)
$$\begin{array}{ccc} \langle \mathscr{O}(E), \mathscr{O}(D_1) \rangle & \xrightarrow{\sigma_{E,D_1}} & \mathscr{O} \\ \downarrow{\scriptstyle \langle \mathscr{O}(E), f \rangle} & & \downarrow{\scriptstyle N_{E/S}(f)} \\ \langle \mathscr{O}(E), \mathscr{O}(D_2) \rangle & \xrightarrow{\sigma_{E,D_2}} & \mathscr{O} \end{array}$$

La formule (1.3.12.2) exprime simplement la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} N_{E/S}(\mathcal{O}(D_1)) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{O} \\ \downarrow{\scriptstyle N_{E/S}(f)} & & \downarrow{\scriptstyle N_{E/S}(f)} \\ N_{E/S}(\mathcal{O}(D_2)) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{O} \end{array} \quad .$$

Pour tout S-schéma T et tout faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur $X_T$, posons $F(\mathcal{L}) = N_{E_T/T}(\mathcal{L})$. Les hypothèses de 1.3.10 sont vérifiées par ce foncteur, de sorte qu'il existe un unique faisceau inversible $\mathcal{M}$ muni d'un isomorphisme de foncteur compatible à la biadditivité :

$$N_{E_T/T}(\mathcal{L}) \xrightarrow{\sim} \langle \mathcal{L}, \mathcal{M} \rangle \quad .$$

De plus, si $d : T \longrightarrow X_T$ est une section de X sur T, on a canoniquement

$$d^*\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} N_{E_T/T}(\mathcal{O}(d)) \quad .$$

Prenant pour d la section universelle,de X, $\Delta : X \longrightarrow X_X$, on trouve

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} N_{E_X/X}(\mathcal{O}(\Delta)) \quad .$$

Localement sur S, E est une somme de sections $E = \Sigma\, t_i$ (XVII 6.3); pour un tel E, on a

$$N_{E_X/X}(\mathcal{O}(\Delta)) = \bigotimes t_i^*\mathcal{O}(\Delta) = \Sigma\mathcal{O}(t_i) = \mathcal{O}(E) \quad ,$$

et cet isomorphisme, étant indépendant de l'ordre des $t_i$, définit un isomorphisme canonique

(1.3.12.3) $$N_{E_X/X}(\mathcal{O}(\Delta)) \sim \mathcal{O}(E) \quad ,$$

de sorte que

(1.3.12.4) $$N_{E_T/T}(\mathcal{L}) \xrightarrow{\sim} \langle \mathcal{L}, \mathcal{O}(E) \rangle \quad .$$

L'isomorphisme (1.3.12.3) est compatible à la biadditivité, aux changements de base et est caractérisé par le fait que, de plus, pour

toute section d de $X_T$ sur T, l'isomorphisme

$$N_{E/T}(\mathcal{O}(d)) \xrightarrow{\sim} \langle \mathcal{O}(d), \mathcal{O}(E)\rangle \xrightarrow{\sim} d^*\mathcal{O}(E)$$

est image réciproque de l'isomorphisme universel (1.3.12.3). En particulier, pour d disjoint de E, le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} N_{E/T}(\mathcal{O}(d)) & \xrightarrow{\sim} & \langle \mathcal{O}(d), \mathcal{O}(E)\rangle & \xrightarrow{\sim} & d^*\mathcal{O}(E) \\ \| & & & & \| \\ \mathcal{O} & & = & & \mathcal{O} \end{array}$$

est commutatif. Par addition, on en déduit que pour D disjoint de E, le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} N_{E/T}(\mathcal{O}(D)) & \xrightarrow{\sim} & \langle \mathcal{O}(D), \mathcal{O}(E)\rangle & \xrightarrow{\sim} & N_{D/T}(\mathcal{O}(E)) \\ \| & & & & \| \\ \mathcal{O} & & = & & \mathcal{O} \end{array} \qquad (1.3.12.5)$$

est commutatif. La flèche $\sigma_{E,D_1}$ est donc composée de l'inverse de 1.3.12.4 et d'une flèche évidente

$$\langle \mathcal{O}(D), \mathcal{O}(E)\rangle \xleftarrow{\sim} N_{E/S}(\mathcal{O}(D)) \longrightarrow \mathcal{O}$$

et 1.3.12.2 en résulte aussitôt, puisque 1.3.12.4 est fonctoriel.

On déduit de 1.3.12 (cf. SERRE [1] Ch III prop 7 pg 46)

Corollaire 1.3.13.: Soient $(D_i)_{i=1,2}$ et $(E_i)_{i=1,2}$ des diviseurs relatifs effectifs, avec $D_i$ disjoint de $E_j$, f une fonction rationnelle vérifiant $\mathrm{div}(f) = D_1 - D_2$ et g une fonction rationnelle vérifiant $\mathrm{div}(g) = E_1 - E_2$. On a alors

$$N_{E_1/S}(f).N_{E_2/S}(f)^{-1} = N_{D_1/S}(g).N_{D_2/S}(g)^{-1}$$

soit brièvement

$$f(\mathrm{div}(g)) = g(\mathrm{div}(f)) \quad . \qquad (1.3.13.1)$$

Cette formule, sous la forme

$$N_{D_2/S}(g)\, N_{E_1/S}(f) = N_{E_2/S}(f)\, N_{D_1/S}(g) \quad ,$$

exprime, via (1.3.12.1) et (1.3.12.2) la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \langle \mathcal{O}(D_1), \mathcal{O}(E_1)\rangle & \xrightarrow{\langle \mathcal{O}(D_1), g\rangle} & \langle \mathcal{O}(D_1), \mathcal{O}(E_2)\rangle \\ \downarrow{\scriptstyle \langle f, \mathcal{O}(E_1)\rangle} & & \downarrow{\scriptstyle \langle f, \mathcal{O}(E_2)\rangle} \\ \langle \mathcal{O}(D_2), \mathcal{O}(E_1)\rangle & \xrightarrow{\langle \mathcal{O}(D_2), g\rangle} & \langle \mathcal{O}(D_2), \mathcal{O}(E_2)\rangle \quad . \end{array}$$

Corollaire 1.3.14. Pour $G = \mathbb{G}_m$, le degré (1.3.2.7) coïncide avec le degré usuel des faisceaux inversibles.

Il suffit de comparer les formules (1.3.7.3) et (1.3.12.1) pour f image réciproque de $f_0 \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S^*)$.

1.3.15. Quels que soient $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$, suffisamment amples, il existe localement sur S des diviseurs disjoints D et E et des isomorphismes

$$\alpha : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{O}(D) \quad \text{et} \quad \beta : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{O}(E) \quad .$$

Désignons par $\tau$ l'isomorphisme rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \langle \mathcal{L}, \mathcal{M}\rangle & \xrightarrow{\langle \alpha, \beta\rangle} & \langle \mathcal{O}(D), \mathcal{O}(E)\rangle & \xrightarrow{\sigma_{D,E}} & \mathcal{O} \\ \downarrow{\scriptstyle \tau} & & & & \| \\ \langle \mathcal{M}, \mathcal{L}\rangle & \xrightarrow{\langle \beta, \alpha\rangle} & \langle \mathcal{O}(E), \mathcal{O}(D)\rangle & \xrightarrow{\sigma_{E,D}} & \mathcal{O} \quad . \end{array}$$

Il résulte de 1.3.12 que cet isomorphisme ne dépend pas du choix particulier de D,E, $\alpha$ et $\beta$ ; il se globalise donc en un isomorphisme canonique

(1.3.15.1) $\qquad \tau : \langle \mathcal{L}, \mathcal{M}\rangle \xrightarrow{\sim} \langle \mathcal{L}, \mathcal{M}\rangle.$

Cet isomorphisme vérifie $\tau^2 = 1$; il est compatible à la biadditivité, puisque (1.3.11.1) l'est, et se prolonge par linéarité à des faisceaux inversibles quelconques.

Il résulte de (1.3.12.5) que le morphisme (1.3.12.4) s'identifie au composé

$$N_{E_T/T}(\mathcal{L}) \xleftarrow{\sim} \langle \mathcal{O}(E), \mathcal{L}\rangle \xrightarrow{\sim\ I} \langle \mathcal{L}, \mathcal{O}(E)\rangle$$

(le vérifier pour $\mathcal{L} = \mathcal{O}(D)$ avec D disjoint de E).

Formulaire 1.3.16. Pour toute courbe projective et lisse $f : X \longrightarrow S$, on dispose d'un foncteur $\langle\ ,\ \rangle$, de formation compatible à tout changement de base, qui à deux faisceaux inversibles $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$ sur X associe un faisceau inversible $\langle \mathcal{L}, \mathcal{M} \rangle$ sur S. Ce foncteur est muni des structures additionnelles suivantes et vérifie les conditions suivantes :

1.3.16.1. Avec les notations de 1.3.8., pour $G = \mathbb{G}_m$, on a

$$\langle \mathcal{L}, \mathcal{M} \rangle = \langle \mathcal{L}, \mathcal{M} ]\ ,$$

en particulier, $\langle \mathcal{L}, \mathcal{M} \rangle$ est biadditif en $\mathcal{L}, \mathcal{M}$ au sens précisé en 1.3.8.1 et cette biadditivité est compatible à celle du second membre d'un isomorphisme canonique (fonctoriel en $\mathcal{M}$)

$$\langle \mathcal{O}(E), \mathcal{M} \rangle \xrightarrow{\sim} N_{E/S}(\mathcal{M})\ .$$

1.3.16.2. On dispose d'un isomorphisme de symétrie

$$\tau : \langle \mathcal{L}, \mathcal{M} \rangle \xrightarrow{\sim} \langle \mathcal{M}, \mathcal{L} \rangle\ ,$$

fonctoriel en $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$, compatible aux changements de base, aux isomorphismes de biadditivité et vérifiant $\tau^2 = 1$. Il rend commutatif le diagramme suivant, pour D et E diviseurs disjoints :

$$\begin{array}{ccccccc} N_{D/S}(\mathcal{O}(E)) & \longleftarrow & \langle \mathcal{O}(D), \mathcal{O}(E) \rangle & \xrightarrow{\tau} & \langle \mathcal{O}(E), \mathcal{O}(D) \rangle & \longrightarrow & N_{E/S}(\mathcal{O}(D)) \\ \wr\downarrow & & & & & & \downarrow\wr \\ \mathcal{O} & & = & & = & & \mathcal{O}\ . \end{array}$$

Ces formules impliquent les formules (1.3.12.1) (1.3.12.2) (1.3.13.1) et

(1.3.16.3) Pour $a, b \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S^*)$ on a, désignant par $\langle a, b \rangle$ l'automorphisme de $\langle \mathcal{L}, \mathcal{M} \rangle$, identifié à une section de $\mathbb{G}_m$, déduit par fonctorialité des automorphismes a et b de $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$,

$$\langle a, b \rangle = a^{\deg(\mathcal{M})}\, b^{\deg(\mathcal{L})}\ .$$

(1.3.16.4) On a, si $\mathcal{L}_o$ (resp. $\mathcal{M}_o$) est un Module inversible sur S, un isomorphisme canonique

$$\langle f^*\mathcal{L}_0, \mathcal{M}\rangle \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}^{\otimes \deg(\mathcal{M})}$$

(resp. $\langle \mathcal{L}, f^*\mathcal{M}_0\rangle \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}^{\otimes \deg(\mathcal{L})}$ ).

1.3.16.5. Si $u : X \longrightarrow Y$ est un morphisme fini et plat de courbes projectives et lisses sur S, alors, pour $\mathcal{L}$ faisceau inversible sur X et $\mathcal{M}$ faisceau inversible sur Y, les isomorphismes 1.2.9.7

$$\langle \mathcal{L}, u^*\mathcal{M}\rangle \sim \langle N_{X/Y}\mathcal{L}, \mathcal{M}\rangle$$

$$\langle u^*\mathcal{M}, \mathcal{L}\rangle \sim \langle \mathcal{M}, N_{X/Y}\mathcal{L}\rangle$$

se déduisent l'un de l'autre par la symétrie (1.2.16.2) (le voir pour $\mathcal{L} = \mathcal{O}(E)$ et $\mathcal{M} = \mathcal{O}(F)$ avec E et F disjoints).

1.3.16.6. Pour $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur X, la flèche de symétrie

$$\tau : \langle \mathcal{L}, \mathcal{L}\rangle \longrightarrow \langle \mathcal{L}, \mathcal{L}\rangle$$

est la multiplication par $(-1)^{\deg(\mathcal{L})}$.

1.3.17. Il reste à prouver 1.3.16.6. On donnera deux démonstrations, la première faisant usage de la théorie du déterminant ( SGA 6 XI ).

<u>1ère démonstration</u> : Soit $u : T \longrightarrow S$ un morphisme fini localement libre. Si $\mathcal{L}$ est un faisceau inversible sur T, on dispose d'un isomorphisme

(1.3.17.1) $$N_{T/S}(\mathcal{L}) \simeq \det(u_*\mathcal{L}) \det(u_*\mathcal{O}_T)^{-1}$$

uniquement déterminé par les trois conditions suivantes :

a) sa formation est compatible aux changements de base;

b) pour $\mathcal{L} = \mathcal{O}_T$, c'est le morphisme identique de $\mathcal{O}_S$;

c) il est fonctoriel en $\mathcal{L}$.

Soient D et E deux diviseurs relatifs effectifs sur X, i l'inclusion de D dans X et u la projection de D sur S. La suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-E) \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}_E \longrightarrow 0$$

permet d'interpréter l'isomorphisme

$$\langle \mathcal{O}(D), \mathcal{O}(-E)\rangle \simeq N_{D/S}(\mathcal{O}(-E)) \simeq \det(u_*i^*\mathcal{O}(-E)) \det(u_*i^*\mathcal{O})^{-1}$$

comme un isomorphisme

$$\langle \mathcal{O}(D), \mathcal{O}(-E) \rangle \simeq \det Ru_*(Li^* \mathcal{O}_E)^{-1} \simeq \det Rf_*(\mathcal{O}_D \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathcal{O}_E)^{-1} .$$

ou

(1.3.17.2) $$\langle \mathcal{O}(D), \mathcal{O}(E) \rangle \simeq \det Rf_*(\mathcal{O}_D \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathcal{O}_E) .$$

Pour D et E disjoints, on a $\mathcal{O}_D \overset{L}{\otimes} \mathcal{O}_E = \mathcal{O}$, et l'isomorphisme de $\langle \mathcal{O}(D), \mathcal{O}(E) \rangle$ avec $\mathcal{O}_S$ qui s'en déduit est celui déjà considéré. On en déduit que, pour D et E disjoints, la symétrie $\tau$ et l'isomorphisme de symétrie $\mathcal{O}_D \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathcal{O}_E \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_E \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathcal{O}_D$ sont compatibles via (1.3.17.2). Par spécialisation, ceci reste vrai quels que soient D et E.

Lorsque D = E est défini par un idéal I, on a

$$\underline{H}^0(\mathcal{O}_D \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathcal{O}_D) = \mathcal{O}_D \qquad \text{symétrie} = +1$$

$$\underline{H}^{-1}(\mathcal{O}_D \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathcal{O}_D) = I/I^2 \qquad \text{symétrie} = -1$$

$$\underline{H}^i(\mathcal{O}_D \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathcal{O}_D) = 0 \qquad \text{pour } i \neq 0, -1 .$$

Dès lors, la flèche

$$\tau : \langle \mathcal{O}(D), \mathcal{O}(D) \rangle \xrightarrow{\sim} \langle \mathcal{O}(D), \mathcal{O}(D) \rangle$$

est $(-1)^{\dim I/I^2} = (-1)^{\deg(\mathcal{O}(D))}$,

et 1.3.16.6 en résulte.

2ème démonstration : Par réduction à un cas "universel", on peut supposer que S est réduit. Ce cas se ramène à celui où S est spectre d'un corps algébriquement clos k. Soient dans ce cas $X_1$ $X_2$ $Y_1$ et $Y_2$ quatre diviseurs sur X, f et g deux fonctions rationnelles, et supposons que

$$\operatorname{div}(f) = X_2 - X_1$$

$$\operatorname{div}(g) = Y_2 - Y_1$$

$$(X_1 \cup Y_2) \cap (X_2 \cup Y_1) = \emptyset .$$

Les applications f et g définissent alors

$$\langle f, g \rangle : \langle \mathcal{O}(X_1), \mathcal{O}(Y_1) \rangle \longrightarrow \langle \mathcal{O}(X_2), \mathcal{O}(Y_2) \rangle .$$

Les deux membres sont canoniquement isomorphe à k (1.3.11.1), de sorte que $\langle f,g\rangle$ s'identifie à un élément de $k^*$.

Lemme 1.3.18. On a

$$\langle f,g\rangle = \prod_{x\in X_1\cup Y_2} (-1)^{v_x(f)v_x(g)} (g^{v_x(f)}/f^{v_x(g)})(x) \quad .$$

Montrons que (1.3.18) entraîne (1.3.16.6). On peut supposer que $\mathfrak{L} \sim \mathcal{O}(X) \sim \mathcal{O}(Y)$ avec X et Y effectif, et que $X \cap Y = \emptyset$. Soit f une fonction rationnelle telle que div(f) = Y - X. Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \langle \mathfrak{L}, \mathfrak{L}\rangle & \xrightarrow{\tau} & \langle \mathfrak{L}, \mathfrak{L}\rangle \\ \| & & \| \\ \langle \mathcal{O}(X), \mathcal{O}(Y)\rangle & \xrightarrow{\langle f, f^{-1}\rangle} & \langle \mathcal{O}(Y), \mathcal{O}(X)\rangle \end{array}$$

montre que

$$\tau = \langle f,f^{-1}\rangle = \prod_{x\in X} (-1)^{v_x(f)^2} = (-1)^{\deg(\mathfrak{L})} \quad .$$

Prouvons 1.3.18. On se ramène à supposer $X_i$ et $Y_i$ très ample. Il existe alors des factorisations $f = f_1 f_2$ ; $g = g_1 g_2$ avec

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(f_1) &= X' - X_1 & \qquad \operatorname{div}(g_1) &= Y' - Y_1 \\ \operatorname{div}(f_2) &= X_2 - X' & \qquad \operatorname{div}(g_2) &= Y_2 - Y' \quad , \end{aligned}$$

les diviseurs X', Y' et $X_1 \cup X_2 \cup Y_1 \cup Y_2$ étant disjoints.
Désignons par $\langle , \rangle^*$ le second membre de (1.3.18) et prouvons que

$$\langle f,g\rangle^* = \langle f_1,g_1\rangle^* \cdot \langle f_2,g_2\rangle^* \quad .$$

D'après Serre [1], on a

$$(1.3.18.1) \qquad \prod_x (-1)^{v_x(f_1)v_x(g_2)} (f_1^{v_x(g_2)}/g_2^{v_x(f_1)})(x) = 1 \quad .$$

On en tire que

$$\langle f_1,g_1\rangle^* \cdot \langle f_2,g_2\rangle^* = g_1(X_1)\, f_1(Y')\, g_2(X')\, f_2(Y_2) \quad .$$

$$\prod_{X_1\cup X'\cup Y'\cup Y_2} (-1)^{v_x(f_1)v_x(g_2)} (f_1^{v_x(g_2)} \cdot f_2^{-v_x(f_1)})(x)$$

$$= \prod_{x\in X'} g_2(x)^{v_x(f_1)} \cdot g_2(x)^{-v_x(f_1)} \cdot \prod_{x\in Y'} f_1(x)^{v_x(g_1)} \cdot f_1(x)^{v_x(g_2)} \quad .$$

$$\prod_{X_1 \cup Y_2} (-1)^{v_x(f)v_x(g)} ((f_1 f_2)^{v_x(g_2)} \cdot (g_1 g_2)^{-v_x(f_1)} = \langle f_1 f_2, g_1 g_2 \rangle^{*} .$$

On a par fonctorialité de $\langle\ ,\ \rangle$ que $\langle f,g\rangle = \langle f_1,g_1\rangle\langle f_2,g_2\rangle$, et on vérifie facilement que $\langle f_i,g_i\rangle = \langle f_i,g_i\rangle^{*}$. Le lemme en résulte.

1.4. Champs de Picard strictement commutatifs.

Quelques résultats de "topologie générale" vont être nécessaire pour exprimer les résultats de 1.3 par une "formule des coefficients universels".

Les résultats de ce n° sont suggérés dans une lettre de A. Grothendieck adressée à J.L. Verdier (1966).

Les notions d'associativité et de commutativité pour des bifoncteurs (voir ci-dessous) ont été introduites par MAC LANE.

1.4.1. Soient C une catégorie, $F : C \times C \longrightarrow C$ un foncteur et

$$\sigma : F(F(X,Y),Z) \xrightarrow{\sim} F(X,F(Y,Z))$$

un isomorphisme de trifoncteurs. On dit que le couple $(F,\sigma)$ est un foncteur associatif, ou que $\sigma$ est une donnée d'associativité sur F si la condition suivante est vérifiée

(Ass) Quelle que soit la famille $(X_i)_{i\in I}$ d'objets de C, et désignant par $e : I \longrightarrow M(I)$ l'application canonique de I dans le monoïde libre (sans unité) engendré par I, il existe une application $\underline{F}$ : $\underline{F} : M(I) \longrightarrow \mathrm{Ob}C$, des isomorphismes $a_i : \underline{F}(e_i) \xrightarrow{\sim} X_i$ et des isomorphismes $a_{g,h} : \underline{F}(gh) \xrightarrow{\sim} \underline{F}(F(g),\underline{F}(h))$ tels que les diagrammes

$$\begin{array}{ccccc} \underline{F}(f(gh)) & \xrightarrow[a_{f,gh}]{\sim} & F(F(f),\underline{F}(gh)) & \xrightarrow[a_{g,h}]{\sim} & F(\underline{F}(f),F(\underline{F}(g),\underline{F}(h))) \\ \| & & & & \uparrow\sigma \\ \underline{F}((fg)h) & \xrightarrow[a_{fg,h}]{\sim} & F(\underline{F}(fg),\underline{F}(h)) & \xrightarrow[a_{f,g}]{\sim} & F(F(\underline{F}(f),\underline{F}(g)),\underline{F}(h)) \end{array} \qquad (1.4.1.1)$$

soient commutatifs.

Nous n'aurons pas à faire usage de ce que l'axiome (Ass) équivaut à "l'axiome du pentagone", comme quoi le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} & F(F(X,Y),F(Z,T)) & \\ \swarrow & & \searrow \\ F(X,F(Y,F(Z,T))) & & F(F(F(X,Y),Z),T) \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ F(X,F(F(Y,Z),T)) & \longleftrightarrow & F(F(X,F(Y,Z)),T) \end{array} .$$

Soient donnés maintenant des isomorphismes fonctoriels

$$\sigma_{X,Y,Z} : F(F(X,Y),Z) \xrightarrow{\sim} F(X,F(Y,Z))$$

$$\tau_{X,Y} : F(X,Y) \xrightarrow{\sim} F(Y,X) .$$

On dira que $\sigma$ et $\tau$ font de F un foncteur <u>associatif</u> et <u>strictement commutatif</u> si la condition suivante est vérifiée.

(Ass.s.Com) Quelle que soit la famille $(X_i)_{i\in I}$ d'objets de C, et désignant par $e : I \longrightarrow N(I)$ l'application canonique de I dans le monoïde abélien libre (sans unité) engendré par I, il existe une application $\underline{F} : N(I) \longrightarrow ObC$, des isomorphismes $a_i : \underline{F}(e_i) \xrightarrow{\sim} X_i$ et des isomorphismes $a_{g,h} : \underline{F}(gh) \xrightarrow{\sim} F(\underline{F}(g),\underline{F}(h))$ tels que le diagramme (1.4.1.1) soit commutatif, ainsi que le diagramme

(1.4.1.2)
$$\begin{array}{ccc} \underline{F}(gh) & \xrightarrow{a_{g,h}} & F(\underline{F}(g),\underline{F}(h)) \\ \| & & \downarrow \tau \\ \underline{F}(hg) & \xrightarrow{a_{h,g}} & F(\underline{F}(k),\underline{F}(g)) \end{array} .$$

Nous n'aurons pas à faire usage de ce que cet axiome équivaut à la conjonction de

1) l'axiome du pentagone

2) $\tau_{X,X} : X + X \longrightarrow X + X$ est l'identité

3) $\tau_{Y,X} \circ \tau_{X,Y} : X + Y \longrightarrow Y + X \longrightarrow X + Y$ est l'identité

4) l'axiome de l'hexagone : le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & X + (Y + Z) & & \\ & \swarrow^{\sigma} & & \searrow^{\tau} & \\ (X + Y) + Z & & & & X + (Z + Y) \\ \downarrow \tau & & & & \downarrow \sigma \\ Z + (X + Y) & & & & (X + Z) + Y \\ & \searrow_{\sigma} & & \swarrow_{\tau} & \\ & & (Z + X) + Y & & \end{array}$$

est commutatif.

On prendra garde que la condition 2) n'est pas très souvent vérifiée en pratique (d'où la terminologie strictement commutative).

**Définition** 1.4.2. Une catégorie de Picard strictement commutative $\mathcal{P}$ est une catégorie non vide dont tous les morphismes sont des isomorphismes, munie d'un foncteur $+ : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P} : (X,Y) \longmapsto X + Y$ et d'isomorphismes fonctoriels

$$\sigma : (X + Y) + Z \xrightarrow{\sim} X + (Y + Z)$$

$$\tau : X + Y \longrightarrow Y + X$$

faisant de $+$ un foncteur associatif et strictement commutatif, et telle en outre que pour tout $X \in Ob\mathcal{P}$, le foncteur $Y \longmapsto X + Y$ soit une équivalence de catégorie.

Le lecteur vérifiera que

Lemme 1.4.3. Si $(X_i)_{i\in I}$ est une famille d'objets d'une catégorie de Picard strictement commutative $\mathcal{P}$, il existe une application $\Sigma : \mathbb{Z}^{(I)} \longrightarrow Ob\mathcal{P}$, des isomorphismes $a_i : \Sigma(e_i) \xrightarrow{\sim} X_i$ et $a_{\underline{n},\underline{m}} : \Sigma(\underline{n} + \underline{m}) \xrightarrow{\sim} \Sigma(n) + \Sigma(m)$ tels que les diagrammes du type (1.4.1.1) et (1.4.1.2) soient commutatifs. Le système $(\Sigma,(a_i),(a_{\underline{n},\underline{m}}))$ est unique à isomorphisme unique près, et est fonctoriel en $(X_i)_{i\in I}$.

1.4.4 Une catégorie de Picard strictement commutative admet à isomorphisme unique près un et un seul objet neutre, qu'on peut ici définir comme un couple $(e,\varphi)$ formé d'un objet $e$ et d'un isomorphisme $\varphi : e + e \xrightarrow{\sim} e$. Si $(e,\varphi)$ est un objet neutre, il existe un et un seul isomorphisme de foncteurs

$$\alpha_S : e + X \xrightarrow{\sim} X$$

rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} e + (e + X) & \longleftrightarrow & (e + e) + X \\ \downarrow{\scriptstyle e + \alpha_S} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ e + X & = & e + X \end{array} .$$

On définit de même $\alpha_d : X + e \xrightarrow{\sim} X$, et $\Psi$ est cas particulier tant de $\alpha_s$ que de $\alpha_d$; $\tau$ échange $\alpha_s$ et $\alpha_d$. Le groupe Aut(e) est abélien, et pour tout $X \in Ob\mathcal{P}$, les foncteurs X + et + X établissent le même isomorphisme entre Aut(e) et Aut(X).

Définition 1.4.5. Un champ de Picard strictement commutatif $\mathcal{P}$ sur un site $\mathcal{S}$ est un champ en groupoïdes $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{S}$ (GIRAUD [1]), muni d'un foncteur $+ : \mathcal{P} \times_{\mathcal{S}} \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ et d'isomorphismes de foncteurs

$$\tau_{x,y} : x + y \longrightarrow y + x$$
$$\sigma_{x,y,z} : (x + y) + z \longrightarrow x + (y + z)$$

qui, pour tout $U \in Ob\mathcal{S}$, font de $\mathcal{P}(U)$ une catégorie de Picard strictement commutative.

Dans ce qui suit, on parlera simplement de champ de Picard, sans spécifier "strictement commutatif". D'après 1.4.4, tout champ de Picard $\mathcal{P}$ admet un "objet neutre" global e, et Aut(e) est un faisceau abélien.

1.4.6. Un foncteur additif $F : \mathcal{P}_1 \longrightarrow \mathcal{P}_2$ entre champs de Picard sur $\mathcal{S}$ est un $\mathcal{S}$-foncteur (nécessairement cartésien) muni d'un isomorphisme de foncteurs

$$F(x + y) \xrightarrow{\sim} F(x) + F(y)$$

rendant commutatif les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} F(x + y) & \longrightarrow & F(x) + F(y) \\ \downarrow{\scriptstyle F(\tau)} & & \downarrow{\scriptstyle \tau} \\ F(y + x) & \longrightarrow & F(y) + F(x) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccc} F((x + y) + z) & \longrightarrow & F(x + y) + F(z) & \longrightarrow & (F(x) + F(y)) + F(z) \\ \downarrow{\scriptstyle F(\sigma)} & & & & \downarrow{\scriptstyle \sigma} \\ F(x + (y + z)) & \longrightarrow & F(x) + F(y + z) & \longrightarrow & F(x) + (F(y) + F(z)) \end{array} .$$

Un <u>morphisme de foncteurs additifs</u> $u : F \longrightarrow G$ est un morphisme de $\mathcal{S}$-foncteurs (automatiquement un isomorphisme) rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F(x+y) & \xrightarrow{u_{x+y}} & G(x+y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(x)+F(y) & \xrightarrow{u_x+u_y} & G(x)+G(y) \end{array} .$$

1.4.7. Si $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont deux champs de Picard sur $\mathcal{S}$, le champ de Picard $\mathrm{HOM}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ est le champ de Picard suivant :

a) si $U \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{S}$, ses objets sur U sont les foncteurs additifs de $\mathcal{P}_1|U$ dans $\mathcal{P}_2|U$; les morphismes sont les morphismes de foncteurs additifs;

b) on définit la somme de deux foncteurs additifs $F_1$ et $F_2$ par la formule $(F_1 + F_2)(x) = F_1(x) + F_2(x)$; l'isomorphisme structural est celui qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} (F_1+F_2)(x+y) & \xrightarrow{\text{structural}} & (F_1+F_2)(x)+(F_1+F_2)(y) & & \\ \| & & & & \| \\ & & & & F_1(x)+F_2(x)+F_1(y)+F_2(y) \\ F_1(x+y)+F_2(x+y) & & & & \uparrow \tau \\ & \searrow & & & \\ & & F_1(x)+F_1(y)+F_2(x)+F_2(y) & & \end{array}$$

c) les isomorphismes d'associativité et de commutativité sont définis via les isomorphismes analogues dans $\mathcal{P}_2$.

1.4.8. Si $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}$ sont trois champs de Picard, un foncteur biadditif de $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ dans $\mathcal{P}$ est un $\mathcal{S}$-foncteur F de $\mathcal{P}_1 \times_{\mathcal{S}} \mathcal{P}_2$ dans $\mathcal{P}$, muni d'isomorphismes de foncteurs

$$F(x_1 + y_1, x_2) \xrightarrow{\sim} F(x_1, x_2) + F(y_1, x_2)$$

$$F(x_1, x_2 + y_2) \xrightarrow{\sim} F(x_1, x_2) + F(x_1, y_2) \quad ,$$

tels que

a) Pour $x_1$ (resp. $x_2$) fixe, $F(x_1, *)$ (resp. $F(*, x_2)$) vérifie les compatibilités de 1.4.3.

b) Pour $U \in Ob\mathcal{S}$, $x_1, y_1 \in Ob\ \mathcal{P}_1(U)$ et $x_2, y_2 \in Ob\mathcal{P}_2(U)$, le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
F(x_1+y_1,\ x_2+y_2) & \longrightarrow & F(x_1+y_1,\ x_2) + F(x_1+y_1,\ y_2) & & \\
\downarrow & & & \searrow & \\
F(x_1, x_2+y_2) + F(y_1, x_2+y_2) & & & & F(x_1,x_2) + F(y_1,x_2) + F(y_1,x_2) + F(y_1,y_2) \\
& \searrow & & \nearrow_{\tau} & \\
& & F(x_1,x_2) + F(x_1,y_2) + F(y_1,x_2) + F(y_1,y_2) & &
\end{array}$$

est commutatif.

Par exemple, le foncteur canonique

$$HOM(\mathcal{P}_1,\ \mathcal{P}_2) \times \mathcal{P}_1 \longrightarrow \mathcal{P}_2 : (F,x) \longmapsto F(x)$$

est biadditif.

On montre comme en 1.4.7 que les foncteurs biadditifs de $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ dans $\mathcal{P}$ forment un champ de Picard $HOM(\mathcal{P}_1,\ \mathcal{P}_2\ ;\mathcal{P})$.

On verra en (1.4.20) qu'il existe un foncteur biadditif "2-universel" : $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2$; plus précisément, il existe un champ de Picard $\mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2$ et un foncteur biadditif $\otimes : \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2$ tel que pour tout champ de Picard $\mathcal{P}$, le foncteur défini par $\otimes$ :

(1.4.8.1) $\quad HOM(\mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2, \mathcal{P}) \longrightarrow HOM(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2\ ;\mathcal{P})$

soit une équivalence. Ce champ est unique à équivalence unique (à isomorphisme unique près) près.

1.4.9. Soit $u : \mathcal{S}_1 \longrightarrow \mathcal{S}_2$ un morphisme de sites. L'image directe $u_*\mathcal{P}$ d'un champ de Picard $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{S}_1$ est le champ de Picard sur $\mathcal{S}_2$ défini par

$$u_*\mathcal{P}(V) = \mathcal{P}(u^*V) \quad .$$

Ses objets sur $V \in Ob\ \mathcal{S}_2$ sont les objets de $\mathcal{P}$ sur $u^*V$; ses morphismes, sa loi d'addition et ses isomorphismes de compatibilité sont ceux de $\mathcal{P}$. l'image directe $u_*$ est un 2-foncteur.

1.4.10. Un <u>préchamp de Picard</u> $\mathcal{P}$ sur un site $\mathcal{S}$ est un préchamp $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{S}$ (Giraud [1]), muni d'un foncteur + : $\mathcal{P} \times_S \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ et d'isomorphismes d'associativité et de commutativité $\sigma$ et $\tau$, tels que pour chaque $U \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{S}$, $\mathcal{P}(U)$ soit une catégorie de Picard (strictement commutative). Si $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont deux préchamps de Picard, on définit de façon évidente (cf. 1.4.6, 1.4.7) les <u>foncteurs additifs</u> de $\mathcal{P}_1$ dans $\mathcal{P}_2$ et le préchamp de Picard $\mathrm{HOM}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ qu'ils forment. Si $\mathcal{P}$ est un préchamp de Picard, et $j : \mathcal{P} \longrightarrow a\mathcal{P}$ le champ qu'il engendre, il existe à équivalence essentiellement unique près un et un seul couple formé d'une structure de champ de Picard sur $a\mathcal{P}$ et d'une structure de foncteur additif sur $j$ ; munis de ces données, le couple $(j, a\mathcal{P})$ s'appelle <u>le champ de Picard engendré par</u> $\mathcal{P}$ . Pour tout champ de Picard $\mathcal{P}_1$, on a une équivalence

(1.4.10.1) $\quad \mathrm{HOM}(a\mathcal{P}, \mathcal{P}_1) \xrightarrow{\sim} \mathrm{HOM}(\mathcal{P}, \mathcal{P}_1)$ .

1.4.11. On désignera par $C^{[-1,0]}(\mathcal{S})$ la catégorie des complexes de faisceaux abéliens $K$ sur $\mathcal{S}$ tels que $K^i = 0$ pour $i \notin [-1,0]$. A tout complexe $K \in \mathrm{Ob}\, C^{[-1,0]}(\mathcal{S})$

$$K : \quad d : \quad K^{-1} \longrightarrow K^0$$

est associé le préchamp de Picard $\mathrm{pch}(K)$ suivant :

(I) Pour $U \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{S}$, on a $\mathrm{Ob}\,\mathrm{pch}(K)(U) = K^0(U)$.

(II) Si $x, y \in K^0(U)$, une flèche de $x$ dans $y$ est un élément $f$ de $K^{-1}(U)$ tel que $df = y - x$ .

(III) La loi de composition des flèches est la loi d'addition dans $K^{-1}(U)$.

(IV) Le foncteur + est donné par la loi d'addition dans $K^0(U)$ et $K^{-1}(U)$.

(V) Les isomorphismes d'associativité et de commutativité sont fournis par l'élément nul de $K^{-1}(U)$ .

On désignera par $\mathrm{ch}(K)$ le champ de Picard engendré (1.4.10) par le préchamp de Picard $\mathrm{pch}(K)$. Le faisceau $\underline{H}^0(K)$ s'interprète comme le faisceau associé suivant

(1.4.11.1) $\underline{H}^0(K) \simeq a\,(U \longmapsto$ groupe des classes d'isomorphisme d' objets de $ch(K)(U)$ ) .

D'autre part,

(1.4.11.2) $\underline{H}^{-1}(K) \simeq \underline{Aut}\ (e)$

1.4.12. Tout morphisme de complexe $f : K \longrightarrow L$ induit un foncteur additif $pch(f) : pch(K) \longrightarrow pch(L)$, d'où un foncteur additif

$$ch(f) : ch(K) \longrightarrow ch(L)$$

Il résulte de (1.4.11.1) et (1.4.11.2) que $ch(f)$ est une équivalence si et seulement si $f$ est un quasi-isomorphisme. On déduit de 1.4.10.1 que pour deux morphismes $f,g : K \longrightarrow L$, on a

$$Hom(ch(f),ch(g)) \xrightarrow{\sim} Hom(pch(f),pch(g)) \quad .$$

Un morphisme de <u>foncteur</u> $h : pch(f) \longrightarrow pch(g)$ est un morphisme de faisceaux $h : K^0 \longrightarrow L^{-1}$ tel que

(1.4.12.1) $g(x) - f(x) = dh(x)$

et tel que pour tout triple $(x,y,u)$ avec $y-x = du$, on ait

(1.4.12.2) $h(y) + f(u) = g(u) + h(x)$ .

Que $h$ soit un morphisme de foncteurs additifs signifie que

(1.4.12.3) $h(x + y) = h(x) + h(y)$ .

La condition 1.4.12.3 permet de réécrire (1.4.12.2) comme

(1.4.12.2') $g(u) - f(u) = hdu$ ;

les conditions (1.4.12.1) à (1.4.12.3) signifient donc que $h$ est une homotopie de $f$ à $g$, et

(1.4.12.4) $Hom(ch(f),ch(g)) \simeq \{H$:homotopie $K \longrightarrow L$ ↯ $g-f = dH + Hd\}$

<u>Lemme</u> 1.4.13 (I) <u>Pour tout champ de Picard</u> $\mathcal{P}$, <u>il existe un complexe</u> $K$ <u>tel que</u> $\mathcal{P} \simeq ch(K)$.

(II) <u>Pour tout foncteur additif</u> $F : ch(K) \longrightarrow ch(L)$, <u>il existe un quasi-isomorphisme</u> $k : K' \longrightarrow K$ <u>et un morphisme</u> $\ell : K' \longrightarrow L$ <u>tel que</u> $F \simeq ch(\ell)ch(k)^{-1}$

Prouvons (I). Soit $(k_i, U_i)_{i\in I}$ une famille telle que

(a) $k_i \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{P}(U_i)$ ;

(b) tout objet de $\mathcal{P}$ est localement isomorphe à une image inverse de l'un des $k_i$.

Posons $K^\circ = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}_{U_i}$. On déduit de 1.4.3 qu'il existe un foncteur additif F de $\mathrm{ch}(0 \longrightarrow K^\circ)$ dans $\mathcal{P}$ envoyant la base $e_i$ de $\mathbb{Z}_{U_i}$ sur $k_i$. Soit $K^{-1}$ le faisceau des couples formés d'une section locale x de $K^\circ$ et d'un isomorphisme $t : F(0) \xrightarrow{\sim} F(x)$. On définit l'addition sur $K^{-1}$ par $(x_1,t_1) + (x_2,t_2) = (x_1+x_2, t)$ où t rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F(0) + F(0) & \xrightarrow{t_1+t_2} & F(x_1) + F(x_2) \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ F(0+0) & \xrightarrow{t} & F(x_1+x_2) \end{array} .$$

On définit $d : K^{-1} \longrightarrow K^\circ$ par $d(x,t) = x$; d est additif.

Si $y-x = dt$, il existe un et un seul morphisme F(t) rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F(x) & \xrightarrow{F(t)} & F(y) \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ F(0)+F(x) & \xrightarrow{t+F(x)} & F(y-x)+F(x) \end{array}$$

et on vérifie que cette construction définit une équivalence

$$F : \mathrm{ch}(K) \longrightarrow \mathcal{P} .$$

Prouvons (II). Soit donc $F : \mathrm{ch}(K) \longrightarrow \mathrm{ch}(L)$ un foncteur additif. Il existe alors une famille $(k_i, \ell_i, \alpha_i, U_i)_{i\in I}$ telle que

(c) $k_i \in K^\circ(U_i)$, $\ell_i \in L^\circ(U_i)$ et $\alpha_i$ est un morphisme entre $F(k_i)$ et $\ell_i$

(d) l'homomorphisme $k^\circ : \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}_{U_i} \longrightarrow K^\circ$ de coordonnées $K_i$ est un épimorphisme.

Posons $K'^\circ = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}_{U_i}$ et soit $\ell^\circ : K'^\circ \longrightarrow L^\circ$ l'homomorphisme de coordonnées $\ell_i$. Le foncteur F étant additif, il existe une et une seule famille d'isomorphismes $\alpha_x : Fk^\circ(x) \xrightarrow{\sim} \ell^\circ(x)$ (x section locale de $K'^\circ$) telle que

(e) pour $e_i$ section 1 de $\mathbb{Z}_{U_i}$, on a $\alpha_{e_i} = \alpha_i$

(f) Les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} Fk^{\circ}(x+y) & \xrightarrow{\alpha_{x+y}} & \ell^{\circ}(x+y) \\ \updownarrow & & \| \\ Fk^{\circ}(x) + Fk^{\circ}(y) & \xrightarrow{\alpha_x+\alpha_y} & \ell^{\circ}(x) + \ell^{\circ}(y) \end{array}$$

sont commutatifs.

Soit $K'^{-1} = K'^{-1} \times_{K'^{0}} K'^{0}$; d'après (d), la flèche évidente est un quasi-isomorphisme de complexes $k : K' \longrightarrow K$. Si $x,y \in K'^{0}(U)$, et si $t \in K'^{-1}(U)$ vérifie $y-x = dt$, alors il existe une et une seule section $\ell^{-1}(t,x,y)$ de $L^{-1}(U)$ qui définisse le morphisme rendant commutatif le diagramme

(g)
$$\begin{array}{ccc} F(k^{\circ}(x)) & \xrightarrow{F(k^{-1}(t))} & F(k^{\circ}(y)) \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_x} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_y} \\ \ell^{\circ}(x) & \xrightarrow{\ell^{-1}(t;x,y)} & \ell^{\circ}(y) \end{array} .$$

Que F soit un foncteur fournit

(h) $$\ell^{-1}(t;x,y) + \ell^{-1}(t';y,z) = \ell^{-1}(t+t';x,z) .$$

Que l'isomorphisme d'additivité de F soit fonctoriel fournit

(i) $$\ell^{-1}(t_1+t_2;x_1+x_2,y_1+y_2) = \ell^{-1}(t_1;x_1,y_1) + \ell^{-1}(t_1;x_2,y_2) .$$

De (h), on tire que

$$\ell^{-1}(0;x,x) + \ell^{-1}(0;x,x) = \ell^{-1}(0,x,x) \quad \text{ie}$$
$$\ell^{-1}(0;x,x) = 0 .$$

On déduit alors de (i) que $\ell^{-1}(t;x,y)$ ne dépend que de t :

$$\ell^{-1}(t;x,y) = \ell^{-1}(t)$$

et que $\ell^{-1}(t)$ est additif en t. On en conclut que $\ell = (\ell^{-1}, \ell^{\circ})$ est un morphisme de complexes, et, d'après (f) et (g), les flèches $\alpha$ forment un isomorphisme de foncteurs additifs $F \circ ch(k) \simeq ch(\ell)$.

1.4.14. Soit $ch^{\flat}(S)$ la catégorie dont les objets sont les petits champs de Picard sur $S$, et dont les flèches sont les classes d'isomorphie de

foncteurs additifs. La construction ch définit un foncteur de $C^{[-1,0]}(\mathcal{S})$ (1.4.11) dans $Ch^{\flat}(\mathcal{S})$. Soit $D^{[-1,0]}(\mathcal{S})$ la sous-catégorie de la catégorie dérivée de $\mathcal{S}$ formée des complexes K tels que $H^i(K) = 0$ pour $i \neq 0$ ou $-1$. Il résulte de 1.4.12 et 1.4.13 que

Proposition 1.4.15. Le foncteur ch induit une équivalence de catégories

$$ch : D^{[-1,0]}(\mathcal{S}) \xrightarrow{\sim} Ch^{\flat}(\mathcal{S}) \quad .$$

On désignera par $\flat$ l'équivalence inverse de ch. Pour tout champ de Picard $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{S}$, $\mathcal{P}^{\flat} \in Ob D^{[-1,0]}(\mathcal{S})$ détermine $\mathcal{P}$ à classe d'isomorphie d'équivalence près.

Lemme 1.4.16. Soit $L \in Ob\ C^{[-1,0]}(\mathcal{S})$ tel que $L^{-1}$ soit injectif.
(I) pch(L) est déjà un champ.
(II) Pour $K \in Ob\ C^{[-1,0]}(\mathcal{S})$, tout foncteur additif $F : ch(K) \longrightarrow ch(L)$ est isomorphe à un foncteur ch(f) pour f morphisme de K dans L.

(I) Quels que soient $U \in Ob\,\mathcal{S}$ et $x \in Ob\ ch(L)(U)$, le faisceau des couples formés d'une section locale $\ell$ de $L^0|U$ et d'un isomorphisme entre x et $\ell$ est un espace principal homogène sous $L^{-1}$; il admet donc une section et $j : pch(L) \longrightarrow ch(L)$ est surjectif sur les classes d'isomorphies d'objets, donc une équivalence.

(II) Soit L' un complexe d'injectifs, muni d'un quasi-isomorphisme $\varphi : L \xrightarrow[\sim]{} L'$, tel que $\varphi^i$ soit un isomorphisme pour $i \leqslant -1$. D'après 1.4.13, et [C. D.], il existe un diagramme commutatif à homotopie près

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow[\sim]{\varphi} & L' \\ {\scriptstyle f_0}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle f_1} \\ K' & \xrightarrow[\sim]{\psi} & K \end{array}$$

tel que $F \simeq ch(f_0)\ ch(\psi)^{-1}$. De plus, $K = \tau_{\leqslant 0} K$ et $L = \tau_{\leqslant 0} L'$, de sorte que $f_1$ se factorise par $f : K \longrightarrow L$, et $F \simeq ch(f)$.

Le lemme permet de préciser 1.4.15 par la conséquence suivante de 1.4.12 .

Corollaire 1.4.17. La construction ch définit une équivalence de 2-catégories entre

a) la 2-catégorie des champs de Picard sur $\mathcal{S}$.

b) la 2-catégorie ayant pour objets et pour 1-flèches les objets et flèches de la sous-catégorie pleine de $C^{[-1,0]}(\mathcal{S})$ formée des complexes L avec $L^{-1}$ injectif, et ayant pour 2-flèches les homotopies entre flèches : $\mathrm{Hom}(f,g) = \{H \mid g-f = dH + Hd\}$.

Construction 1.4.18. On a

$$\mathrm{HOM}(\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2)^{\flat} \simeq \tau_{\leqslant 0}\, R\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{P}_1^{\flat},\mathcal{P}_2^{\flat}) .$$

Soient $K,L \in \mathrm{Ob}\, C^{[-1,0]}(S)$, avec $L^{-1}$ injectif. D'après 1.4.16 (II) et 1.4.12, on a

(1.4.18.1) $\quad ch(\tau_{\leqslant 0}\, \underline{\mathrm{Hom}}(K,L)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{HOM}(ch(K),ch(L))$

et on en déduit une construction fonctorielle 1.4.18.

Construction 1.4.19. Pour $f : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ un morphisme de sites, on a

$$(f_*\mathcal{P})^{\flat} \simeq \tau_{\leqslant 0}\, Rf_*(\mathcal{P}^{\flat}) .$$

Soit $L \in \mathrm{Ob}\, C^{[-1,0]}$ avec $L^{-1}$ injectif. D'après 1.4.16 (I), on a

(1.4.19.1) $\quad ch(f_*L) \xrightarrow{\sim} f_*ch(L)$

et on en déduit une construction fonctorielle 1.4.19.

Nous n'aurons pas à faire usage de la

Construction 1.4.20. Le produit tensoriel promis en 1.4.8 existe, et

$$(\mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2)^{\flat} \simeq \tau_{\geqslant -1}\, \mathcal{P}_1^{\flat} \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathcal{P}_2^{\flat} .$$

On vérifie comme en 1.4.12 et 1.4.13 (II) que, quels que soient $K_1$, $K_2$ et L dans $C^{[-1,0]}(\mathcal{S})$, on a

(a) Tout morphisme $f \in \mathrm{Hom}(K_1 \otimes K_2, L) \simeq \mathrm{Hom}(\tau_{\geqslant -1}(K_1 \otimes K_2), L)$ définit un foncteur biadditif $ch(f) \in \mathrm{Hom}(ch(K_1), ch(K_2); ch(L))$ ; de plus les morphismes de foncteurs s'identifient aux homotopies;

(b) Pour tout foncteur biadditif $F : ch(K_1), ch(K_2) \longrightarrow ch(L)$, il existe des quasi-isomorphismes $k_i : ch(K_i') \longrightarrow ch(K_i)$ et $f : K_1' \otimes K_2' \longrightarrow L$ tel que $F \simeq ch(f) \circ (ch(k_1)^{-1}, ch(k_2)^{-1})$ .

Si maintenant $K_1^\circ$ ou $K_2^\circ$ est plat, ainsi que $K_1'^\circ$ ou $K_2'^\circ$, alors $k_1 \otimes k_2 : \tau_{\geqslant -1} K_1' \otimes K_2' \longrightarrow \tau_{\geqslant -1} K_1 \otimes K_2$ est un quasi-isomorphisme, et on en déduit que $ch(\tau_{\geqslant -1}(K_1 \otimes K_2))$ vérifie la propriété universelle (1.4.8.1), d'où l'existence de $\otimes$ et d'une construction fonctorielle 1.4.20.

1.4.21. Soient G un faisceau abélien, et G[1] le complexe réduit à G placé en degré -1. Le préchamp pch(G[1]) s'identifie au préchamp des torseurs triviaux sous G, et donc ch(G[1]) "n'est autre" que le champ des torseurs sous G, avec sa loi d'addition habituelle.

1.4.22. Soit $K \in C^{[-1,0]}(\mathcal{S})$ et G un faisceau abélien. Les extensions E de K par G forment un champ de Picard, EXT(K,G), pour l'addition de Brauer.

$$E : 0 \longrightarrow G[0] \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} K \longrightarrow 0.$$

A chaque extension E on associe un foncteur additif de ch(K) dans ch(G[1]), qui, appliqué à une section locale x de $K^\circ$ fournit le torseur $\beta^{-1}(x)$. Le lecteur vérifiera que

Proposition 1.4.23. La construction esquissée plus haut est une équivalence de champs de Picard

$$EXT(K,G) \xrightarrow{\sim} HOM(ch(K), ch(G[1])) \quad .$$

1.4.24. Soit F un objet du site $\mathcal{S}$. On désignera encore par F le faisceau défini par F, et on désignera par $\mathbb{Z}^{(F)}$ le faisceau abélien engendré. Soit C un champ de Picard sur $\mathcal{S}$. On vérifie facilement (cf. 1.4.3) qu'il "revient au même" de se donner soit

a) un foncteur additif $H : ch(\mathbb{Z}^{(F)}) \longrightarrow C$

b) un morphisme de champ :

(champ des sections locales de F, morphismes = identités) $\longrightarrow$ C

c) un objet de C(F).

Supposons (pour pouvoir appliquer la définition 1.4.9) que les produits fibrés existent dans $\mathcal{S}$, et soit f le morphisme de sites canonique $f : \mathcal{S}/F \longrightarrow \mathcal{S}$. La construction précédente fournit une équivalence

(1.4.24.1) $\quad HOM(ch(\mathbb{Z}^{(F)}), C) \xrightarrow{\sim} f_* f^* C \quad .$

L'isomorphisme qui se déduit de (1.4.24.1) par la construction

$$\tau_{\leqslant} \ R\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}^{(F)}, C^{\flat}) \xrightarrow{\sim} \tau_{\leqslant 0} \ Rf_{*}f^{*}C^{\flat} \quad ,$$

peut aussi se déduire de l'isomorphisme plus général

(1.4.24.2) $$R\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}^{(F)}, K) \xrightarrow{\sim} Rf_{*}f^{*}K \quad (K \in \mathrm{Ob}D^{+}(\mathcal{S})) \quad .$$

## 1.5. La formule des coefficients universels

1.5.1. Soit $f : X \longrightarrow S$ une courbe projective et lisse sur S. On désignera par PIC(X/S) le champ de Picard sur le grand site fppf de S (XVII 0.10) image directe (1.4.9) du champ des faisceaux inversibles sur X. On a

(1.5.1.1) $$\mathrm{PIC}(X/S) = f_{*}\mathrm{ch}\mathbb{G}_{m}[1]$$

(1.5.1.2) $$\mathrm{PIC}(X/S)^{\flat} = \tau_{\leqslant 0}Rf_{*}(\mathbb{G}_{m}[1]) \quad .$$

Chaque section t de X définit un faisceau inversible $\mathcal{O}(t)$ sur X. Avec les notations de 1.4.24 (cf. 1.4.24. $a \longleftrightarrow b$), cette construction, étant compatible à tout changement de base, définit un morphisme de champs de Picard sur S

(1.5.1.3) $$\mathrm{ch}\ \mathbb{Z}^{(X)} \longrightarrow \mathrm{PIC}(X/S) \quad .$$

Si C est un quelconque champ de Picard sur S, les morphismes (1.5.1.3) et (1.4.24.1) définissent un foncteur additif

(1.5.1.4) $$\mathrm{HOM}(\mathrm{PIC}(X/S), C) \longrightarrow \mathrm{HOM}(\mathrm{ch}(\mathbb{Z}^{(X)}), C) \xrightarrow{\sim} f_{*}f^{*}C \quad .$$

Par application de la construction $^{\flat}$, le foncteur 1.5.1.3 définit un morphisme

(1.5.1.5) $$\mathbb{Z}^{(X)} \longrightarrow \tau_{\leqslant 0} \ Rf_{*} \ \mathbb{G}_{m}[1] \longrightarrow Rf_{*} \ \mathbb{G}_{m}[1] \quad ,$$

et le foncteur 1.5.1.4 a pour analogue, par 1.4.24.2, un morphisme

(1.5.1.6) $$R\underline{\mathrm{Hom}}(\tau_{\leqslant 0} \ Rf_{*}(\mathbb{G}_{m}[1]), K) \longrightarrow Rf_{*} \ f^{*}K \quad .$$

Si C est le champ ch(G[1]) des torseurs sous un groupe G vérifiant (1.3.1.1), le théorème 1.3.10 affirme que le foncteur 1.5.1.4 est une

équivalence, l'équivalence inverse étant celle qui à un torseur K sous $G_X$ associe le foncteur additif $\langle *, K]$. Que (1.5.1.4) soit une équivalence revient à dire que le morphisme déduit de 1.5.1.4 ou 1.5.1.6

(1.5.1.7) $\quad \tau_{\leqslant 1}\, R\underline{Hom}(\tau_{\leqslant 0}\, Rf_*(\mathbb{G}_m[1]),\, G) \longrightarrow \tau_{\leqslant 1}\, Rf_* f^* G$

est un isomorphisme.

Théorème 1.5.2. (formule des coefficients universels). Soient $f : X \longrightarrow S$ une courbe projective et lisse sur S, C un champ de Picard sur $S_{fppf}$ et $K = C^\flat$ (1.4.15). On suppose que K est localement isomorphe (dans $D^+(S_{fppf})$) à des complexes de la forme $G_{-1} \longrightarrow G_0$, où les faisceaux $G_i$ vérifient (1.3.1.1). Alors

(I) Le foncteur 1.5.1.4

(1.5.2.1) $\quad HOM(PIC(X/S),\, C) \longrightarrow f_* f^* C$

est une équivalence de champs de Picard.

(II) Le morphisme déduit de (1.5.1.6) ou (1.5.1.4)

(1.5.2.2) $\quad \tau_{\leqslant 0}\, R\underline{Hom}(\tau_{\leqslant 0}\, Rf_*(\mathbb{G}_m[1]),\, K) \longrightarrow \tau_{\leqslant 0}\, Rf_* f^* K$

est un isomorphisme.

Ce théorème fait jouer à $\tau_{\leqslant 0}\, Rf_*(\mathbb{G}_m[1])$ le rôle que joue l'homologie dans la classique formule des coefficients universels.

Il est clair que, pour chaque champ C, on a (I)$\longleftrightarrow$(II), et tant (I) que (II) sont de nature locale sur S. Si C est de la forme ch(G[1]), alors le théorème résulte de 1.3.10, comme noté plus haut. Il reste à montrer que si K est de la forme

$$K : d : G_{-1} \longrightarrow G_0 \quad ,$$

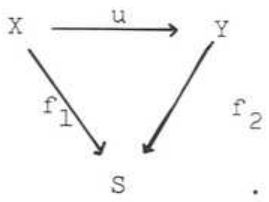
et si (1.5.2.2) est un isomorphisme pour $G_{-1}[1]$ et $G_0[1]$, alors (1.5.2.2) est un isomorphisme pour K. Pour le vérifier, il suffit de comparer la suite exacte longue de cohomologie

$$0 \longrightarrow R^{-1}f_*K \longrightarrow f_*G_{-1} \longrightarrow f_*G_0 \longrightarrow R^0 f_*K \longrightarrow R^1 f_*G_{-1} \longrightarrow R^1 f_*G_0$$

...

à la suite exacte longue analogue pour le premier membre de (1.5.2.2), et d'appliquer le lemme des cinq.

1.5.3. Soit u un morphisme plat de courbes projectives et lisses sur S




Le diagramme de foncteurs additifs

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^{(X)} & \longrightarrow & PIC(X/S) \\ \downarrow{\scriptstyle u} & & \downarrow{\scriptstyle N_{X/Y}} \\ \mathbb{Z}^{(Y)} & \longrightarrow & PIC(Y/S) \end{array} \qquad (1.5.3.1)$$

est alors essentiellement commutatif.

Pour tout champ de Picard C sur S, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} HOM(PIC(Y/S),\ C) & \longrightarrow & f_{2*}f_2^*\ C \\ \downarrow{\scriptstyle HOM(N_{X/Y},C)} & & \downarrow{\scriptstyle u^*} \\ HOM(PIC(X/S),\ C) & \longrightarrow & f_{1*}f_1^*\ C \end{array} \qquad (1.5.3.2)$$

est donc essentiellement commutatif, et pour $K \in Ob D^+(S)$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} R\underline{Hom}(\tau_{\leqslant 0}\ Rf_{2*}\mathbb{G}_m[1],\ K) & \longrightarrow & Rf_{2*}f_2^*\ K \\ \downarrow{\scriptstyle R\underline{Hom}(N_{X/Y},K)} & & \downarrow{\scriptstyle u^*} \\ R\underline{Hom}(\tau_{\leqslant 0}\ Rf_{1*}\mathbb{G}_m[1],\ K) & \longrightarrow & Rf_{1*}f_1^*\ K \end{array} \qquad (1.5.3.3)$$

est commutatif.

Soit maintenant G un faisceau abélien sur S vérifiant (1.3.1.1). La trace XVII 6.3 nous fournit un foncteur additif

(1.5.3.4) $\qquad Tr_u : f_{1*}f_1^* \, ch(G[1]) \longrightarrow f_{2*}f_2^* \, ch(G[1])$

et 1.3.8.6 nous fournit un isomorphisme rendant essentiellement commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} HOM(PIC(X/S), ch(G[1])) & \longleftarrow & f_{1*}f_1^* \, ch(G[1]) \\ \downarrow{\scriptstyle HOM(u^*, ch(G[1]))} & & \downarrow{\scriptstyle Tr_u} \\ HOM(PIC(Y/S), ch(G[1])) & \longleftarrow & f_{2*}f_2^* \, ch(G[1]) \end{array} \qquad (1.5.3.5)$$

Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tau_{\leqslant 1} \, R\underline{Hom}(\tau_{\leqslant 0} \, Rf_{1*} \, \mathbb{G}_m[1], G) & \xleftarrow{\sim} & \tau_{\leqslant 1} \, Rf_{1*}f_1^*G \\ \downarrow{\scriptstyle R\underline{Hom}(u^*,G)} & & \downarrow{\scriptstyle Tr_u} \\ \tau_{\leqslant 1} \, R\underline{Hom}(\tau_{<0} \, Rf_{2*} \, \mathbb{G}_m[1], G) & \xleftarrow{\sim} & \tau_{\leqslant 1} \, Rf_{2*}f_2^*G \end{array} \qquad (1.5.3.6)$$

est donc commutatif.

1.5.4. Avec les notations de 1.5.2, soit G un faisceau abélien sur S vérifiant 1.3.1.1. Localement sur S pour la topologie étale, on a (non canoniquement)

$$\tau_{\leqslant 0} \, Rf_* \, \mathbb{G}_m[1] \simeq f_*\mathbb{G}_m[1] + R^1f_* \, \mathbb{G}_m \ .$$

Au niveau des champs de Picard, on définit en effet une section $ch(R^1f_* \, \mathbb{G}_m) \longrightarrow f_* \, ch(\mathbb{G}_m[1])$ en associant à chaque classe d'isomorphie de faisceaux inversibles le faisceau inversible appartenant à cette classe rigidifié le long de sections convenables de X/S.

L'isomorphisme 1.5.2.2. fournit donc un isomorphisme

(1.5.4.1) $\qquad \underline{Hom}(R^1f_* \, \mathbb{G}_m, G) \xrightarrow{\sim} \underline{Hom}_S(X, G)$

et une suite exacte

(1.5.4.2) $\qquad 0 \longrightarrow \underline{Ext}^1(R^1f_* \, \mathbb{G}_m, G) \longrightarrow R'f_*G \longrightarrow \underline{Hom}(f_*\mathbb{G}_m, G) \longrightarrow 0$

Les morphismes de 1.5.4.1 et 1.5.4.2 s'interprêtent comme suit

a) Le morphisme 1.5.4.1 et le premier morphisme 1.5.4.2 sont définis par l'application canonique de X dans $\mathrm{Pic}_{X/S}$.

b) Le deuxième morphisme 1.5.4.2 est le degré 1.3.7.2 .

Localement sur S pour la topologie étale, on a (non canoniquement) $\mathrm{Pic}_{X/S} \sim \mathrm{Pic}^{\circ}_{X/S} \times \mathbb{Z}^{k}$; on a donc

$$\underline{\mathrm{Ext}}^{1}(R^{1}f_{*}\,\mathbb{G}_{m},\ G) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Ext}}^{1}(\underline{\mathrm{Pic}}^{\circ}_{X/S},\ G)$$

et (1.5.4.2) peut encore s'écrire

(1.5.4.3) $\quad 0 \quad \underline{\mathrm{Ext}}^{1}(\underline{\mathrm{Pic}}^{\circ}_{X/S},\ G) \longrightarrow R^{1}f_{*}\,G \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(f_{*}\mathbb{G}_{m},\ G) \longrightarrow 0$ .

1.5.5. Lorsque, dans 1.5.2.2, on fait $K = \mathbb{G}_{m}[1]$, le théorème 1.5.2 apparaît comme un théorème d'autodualité pour $\tau_{\leqslant 0}(Rf_{*}\,\mathbb{G}_{m}[1])$. Un quelconque complexe représentant $\tau_{\leqslant 0}\,Rf_{*}\,\mathbb{G}_{m}[1]$ admet une filtration canonique en trois crans, les quotients successifs étant, à quasi-isomorphisme unique près

$$\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}/\underline{\mathrm{Pic}}^{\circ}_{X/S} \quad , \quad \mathrm{Pic}^{\circ}_{X/S} \quad , \quad (f_{*}\,\mathbb{G}_{m})[1] \quad .$$

A l'autodualité précédente correspond une dualité (à valeur dans $\mathbb{G}_{m}$) entre $\mathrm{Pic}_{X/S}/\mathrm{Pic}^{\circ}_{X/S}$ et $f_{*}\,\mathbb{G}_{m}$, et une autodualité (à valeurs dans $\mathbb{G}_{m}[1]$) sur $\mathrm{Pic}^{\circ}_{X/S}$ (autodualité de la jacobienne).

1.5.6. La situation est nettement moins bonne pour les courbes lisses sur S : $f : X \longrightarrow S$ qu'on ne suppose pas propres sur S. Il semble que le groupe additif se comporte de façon incontrôlable. Les arguments qui précèdent s'étendent toutefois au cas des courbes lisses qui se déduisent d'une courbe propre sur S par soustraction d'une partie finie sur S, pour G un faisceau étale de torsion, de torsion première aux caractéristiques résiduelles de S. On peut espérer que les faisceaux étales de p-torsion se comportent eux aussi de façon raisonnable; voir SERRE [1] ch VI n°11 p.126.

Le rôle du théorème 1.2.2 sera joué ici par le théorème d'acycli-

cité XV 2.2, ayant pour corollaire le

Lemme 1.5.7. Soient $p : X \longrightarrow S$ la projection d'un espace affine type sur S et G un faisceau abélien de torsion sur $S_{et}$, premier aux caractéristiques résiduelles de S. On désigne encore par G l'image réciproque de G sur le site $S_{fppf}$. Alors, le foncteur $p^*$ est une équivalence de catégorie entre la catégorie des torseurs sous G sur $S_{et}$ (ou sur $S_{fppf}$, ce qui revient au même (Grothendieck[1]), et la catégorie des torseurs sous $G_X$ sur X.

1.5.8. Soient $\bar{f} : \bar{X} \longrightarrow S$ un morphisme propre de présentation finie à fibres purement de dimension un, Y un sous-schéma de $\bar{X}$ fini sur S, défini par un idéal $\underline{m}$ et supposons que $X = \bar{X} - Y$ soit une courbe lisse sur S. Soit d'autre part G un faisceau de torsion sur $S_{et}$, premier aux caractéristiques résiduelles de S. On désignera encore par G le faisceau sur le grand site fppf de S (XVII 0.10) image réciproque de G.

Soit $\mathbb{G}_m(\underline{m})$ le sous-faisceau de $\mathbb{G}_{mX}$ formé des sections valant 1 sur Y. Un torseur sous $\mathbb{G}_m(\underline{m})$ s'identifie à un faisceau inversible sur $\bar{X}$, trivialisé sur Y. Tout diviseur relatif sur X, fini sur S, définit un tel faisceau inversible. Localement sur S pour la topologie étale, il existe de tels diviseurs donnant lieu à des faisceaux inversibles relativement amples.

Lemme 1.5.9. Sous les hypothèses 1.5.8, avec S affine, soit $\mathcal{O}_{\bar{X}}(1)$ un faisceau inversible relativement ample sur $\bar{X}$, trivialisé le long de Y, et soit $\mathcal{M}$ un faisceau inversible sur $\bar{X}$, trivialisé le long de Y. Pour tout point $s \in S$, il existe un entier $n_o$ tel que pour tout entier $n \geq n_o$ et toute section $m_s$ de $\mathcal{M}(n) \otimes k(s)$ sur la fibre $\bar{X}_s$, valant 1 sur $Y_s$, il existe une section m de $\mathcal{M}(n)$ valant 1 sur Y, qui relève $m_s$.

On se ramène au cas S noethérien (car une famille de morphismes surjectifs reste une famille de morphismes surjectifs par changements de base). Soit $\mathcal{N}$ le faisceau cohérent des sections locales de $\mathcal{M}$ nulles

sur $\bar{X}_s$ et Y. Pour chaque n, les solutions locales au problème posé forment un espace principal homogène sous $\mathscr{N}(n)$, de sorte que l'obstruction à relever $m_s$ se trouve dans $H^1(X,\mathscr{N}(n)) = H^0(S, R^1f_*\mathscr{N}(n))$. Or, pour n assez grand, $R^1f_*\mathscr{N}(n) = 0$ (EGA III 2.2.1).

1.5.10. Soient $\mathscr{L}$ un faisceau inversible sur $\bar{X}$ trivialisé le long de Y, et $s \in S$. Considérons les conditions

(1.5.10.1) Toute section de $\mathscr{L} \otimes k(s)$ sur $X_s$, valant 1 sur $Y_s$, se relève en une section de $\mathscr{L}$ sur l'image réciproque U d'un voisinage de s, valant 1 sur $Y_1U$.

(1.5.10.2) Il existe 4 sections $m_i$ de $\mathscr{L} \otimes k(s)$ sur $X_s$, valant 1 sur Y, et linéairement indépendantes au point générique de toute composante irréductible de $X_s$.

Considérons les conditions suivantes, portant respectivement sur une section m de $\mathscr{L}$, un couple $(m_1,m_2)$ et un triple $(m_1\ m_2\ m_3)$ de sections de $\mathscr{L}$.

(1.5.10.3) m vaut 1 sur Y et le sous-schéma Z(m) de X d'équation m = 0 est un diviseur relatif sur S (ce qui signifie qu'il est quasi-fini sur S, donc fini sur S, puisque $X = \bar{X} - Y$ est lisse sur S).

(1.5.10.4) Soit $\lambda$ la coordonnée canonique sur la droite affine $g : E^1_s \longrightarrow S$. La section $\lambda m_1 + (1 - \lambda)m_2$ de $g'^*\mathscr{L}$ vérifie (1.5.10.3).

(1.5.10.5) De même, $\lambda m_1 + \mu m_2 + (1 - \lambda - \mu)m_3$ vérifie (1.5.10.3).

On laisse au lecteur le soin de vérifier, par un argument de position générale, le

Lemme 1.5.11. Soit $\mathscr{L}$ un faisceau inversible sur X, trivialisé le long de Y, et $\bar{s}$ un point géométrique de S d'image s dans S. Si $\mathscr{L}$ vérifie (1.5.10.1) et (1.5.10.2) en s, alors :

(I) Si n sections $m_i$ de $\mathscr{L}$ vérifient (1.5.10.3), il existe un voisinage étale U de $\bar{s}$ et une section k de $\mathscr{L}|f^{-1}(U)$ telle que les couples $(m_i,k)$ vérifient (1.5.10.4).

(II) Soient $m_1$, $m_2$, $k_1$, $k_2$ quatre sections de $\mathcal{L}$ telles que les couples $(m_i, k_j)$ vérifient (1.5.10.4). Il existe alors un voisinage étale U de $\bar{s}$ et une section k de $\mathcal{L}|f^{-1}(U)$ telle que les triples $(m_i, k_j, k)$ vérifient (1.5.10.5).

Pour k(s) infini, on pouvait se contenter de prendre pour U un voisinage de Zariski.

1.5.12. Soit maintenant $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur $\bar{X}$ rigidifié le long de Y, et K un G-torseur sur X, où G est comme dans 1.5.7 . On se propose de définir un G-torseur $<\mathcal{L}, K]$ sur S, généralisant celui étudié dans 1.3, et additif en $\mathcal{L}$.

Soit $(m_1, m_2)$ un couple de sections de $\mathcal{L}$ qui vérifie (1.5.10.4). Avec les notations de 1.5.10.3 et de 1.5.10.4, la trace, de $\lambda m_1 + (1 - \lambda)m_2 = 0$ à $\mathbb{E}^1_S$, du torseur $g'^*K$ est un torseur $K_{1,2}$ sur $\mathbb{E}^1_S$. Son image réciproque par la section $\lambda = 0$ (resp. $\lambda = 1$) est le torseur $K_2 = Tr_{Z(m_2)/S}(K)$ (resp. $K_1 = Tr_{Z(m_1)/S}(K)$). D'après 1.5.7, le torseur $K_{1,2}$ est canoniquement l'image réciproque d'un torseur sous G sur S; d'où un isomorphisme canonique entre $K_1$ et $K_2$.

Si $m_1$, $m_2$ et k sont trois sections de $\mathcal{L}$ telles que les couples $(m_i,k)$ vérifient (1.5.10.4), on obtient encore par composition un isomorphisme

(1.5.12.1) $\quad \Psi_k : K_1 = Tr_{Z(m_1)/S}(K) \xrightarrow{\sim} K_2 = Tr_{Z(m_2/S}(K)$

Si E est un diviseur relatif sur X, fini sur S, les sections $m'_1 = m_i \otimes 1$ de $\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}(E)$ vérifient encore (1.5.10.3), on a (pour i = 0,1)

(1.5.12.2) $\quad K'_i = Tr_{Z(m'_i)/S}(K) \simeq K_i + Tr_{E/S}(K)$

et l'isomorphisme $\Psi_{k\otimes 1} : K'_1 \longrightarrow K'_2$ se déduit de $\Psi_k$ :

(1.3.12.3) $\quad \Psi_{k\otimes 1} = \Psi_k + id_{Tr_{E/S}(K)}$ .

Pour vérifier que $\Psi_k$ ne dépend pas de k, il suffit de le faire au voisinage étale de chaque point s de S, et, par 1.5.12.3 et 1.5.9,

on se ramène au cas où sont vérifiées les conditions (1.5.10.1) (1.5.10.2). Avec les notations de 1.5.11. (II), $\Psi_{\lambda k_i} + (1-\lambda)k - \Psi_{k_i}$ est un morphisme de $\mathbf{E}^1_S$ dans G, nul en $\lambda = 1$, donc nul , et $\Psi_{k_i} = \Psi_k$, donc $\Psi_{k_1} = \Psi_{k_2}$.

Soient $m_1$ et $m_2$ deux sections de $\mathcal{L}$ vérifiant 1.5.10.3 et $K_i = \mathrm{Tr}_{Z(m_i)/S}(K)$. Pour définir un isomorphisme $\Psi_{m_2,m_1} : K_1 \longrightarrow K_2$, il suffit de le faire au voisinage étale de chaque point s de S, de façon compatible au changement de base. Si E est un diviseur relatif sur X, fini sur S, tel que $\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}(E)$ vérifie (1.5.10.1) (1.5.10.2) (voir 1.5.9), et si les couples $(m_i \otimes 1, k)$ vérifient (1.5.10.4), on pose (cf. 1.5.12.3)

$$\Psi_{m_2,m_1} + \mathrm{Tr}_{E/S}(K) = \Psi_k \quad .$$

Ceci définit $\Psi_{m_2,m_1}$ et on vérifie par (1.5.11. (I)) que $\Psi_{m_3,m_2}\,\Psi_{m_2,m_1} = \Psi_{m_3,m_1}$. Ces constructions sont compatibles aux changements de base. S'il existe une section m de $\mathcal{L}$ vérifiant (1.5.10.3), on posera

$$\langle \mathcal{L}, K] = \mathrm{Tr}_{Z(m)/S}(K)$$

et, d'après ce qui précède, ce torseur ne dépend pas, à isomorphisme canonique près, du choix de m.

Notons, dans le cas général, qu'il suffit pour définir $\langle \mathcal{L}, K]$ de le définir au voisinage étale de chaque point s de S, de façon compatible au changement de base. Si, comme plus haut, $\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}(E)$ vérifie (1.5.10.1) (1.5.10.2), alors $\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}(E)$ admet des sections vérifiant (1.5.10.3), et on pose

$$\langle \mathcal{L}, K] = \langle \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}(E), K] - \mathrm{Tr}_{E/S}(K) \quad .$$

1.5.13. Sous les hypothèses 1.5.8, si x et y sont deux sections de $f_* \mathcal{G}_m(\underline{m})$, alors $\lambda x + (1-\lambda)y$ est encore une section pour $\lambda$ dans un ouvert à fibres non vides de la droite affine sur S.

On peut traduire ceci en disant que

(1.5.13.1) "$f_* \mathcal{G}_m(m)$ est connexe par arc".

Tout morphisme d'un ouvert à fibres non vides de la droite affine dans G est constant. Il n'existe donc pas d'homomorphisme non trivial de $f_*\mathbb{G}_m$ $(\underline{m})$ dans G, et les automorphismes de $\mathcal{L}$ agissent trivialement sur $\langle \mathcal{L}, K]$. Le torseur $\langle \mathcal{L}, K]$ ne dépend donc que de K et de la section de $R^1f_*\mathbb{G}_m$ $(\underline{m})$ définie par $\mathcal{L}$. Par globalisation, ceci permet de définir un symbole $\langle \lambda, K]$ pour $\lambda$ section de $R^1f_*\mathbb{G}_m$ $(\underline{m})$. Le torseur $\langle \lambda, K]$ est additif en $\lambda$, et correspond donc à une extension e(K) de $R^1f_*\mathbb{G}_m(\underline{m})$ par G (voir 1.4.23 ou SGA 7 VII 1.1.6 et 1.2).

La formation de e(K) est compatible à tout changement de base et à l'addition des torseurs, d'où un foncteur additif

$$e : f_* \, ch(G[1]) \longrightarrow EXT(R^1f_*\mathbb{G}_m \, (\underline{m}), G) \quad .$$

Soit j l'application canonique de X dans $R^1f_*\mathbb{G}_m$ $(\underline{m})$, j : t → (classe de $\mathcal{O}(t)$). L'image réciproque par j est un foncteur additif

$$j^* : EXT(R^1f_*\mathbb{G}_m \, (\underline{m}), G) \longrightarrow f_* \, ch(G[1])$$

et on a trivialement $j^*e \sim Id$. On vérifie comme en 1.3.10 et 1.5.2 que, en topologie fppf

Proposition 1.5.14. Sous les hypothèses 1.5.8, les foncteurs e et j de 1.5.13 sont des équivalences inverses l'une de l'autre. On en déduit par 1.4.19, 1.4.23 un isomorphisme

$$Ext^1(R^1f_*\mathbb{G}_m \, (\underline{m}), G) \xrightarrow{\sim} H^1(X, G) \quad .$$

1.5.15. Soient $f_i : X_i \longrightarrow S$ (i = 1,2) deux courbes compactifiées comme en 1.5.8.

Soit $\bar{u} : \bar{X}_1 \longrightarrow \bar{X}_2$ un morphisme tel que $Y_1$ soit un sous-schéma de l'image réciproque de $Y_2$ et qui induise un morphisme fini et plat de $X_1$ dans $X_2$. On a alors, pour $\mathcal{L}$ faisceau inversible sur $X_2$ et K torseur sur $X_1$,

$$\langle \mathcal{L}, \, tr_{X_1/X_2}(K)] \xrightarrow{\sim} \langle \bar{u}^*\mathcal{L}, \, K] \quad ,$$

et on en déduit la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}^1(R^1f_{1*}\,\mathbb{G}_m\,(m),\,G) & \xrightarrow{\sim} & H^1(X_1,\,G) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ext}^1(u^*,\mathrm{Id})} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Tr}_{X_1/X_2}} \\ \mathrm{Ext}^1(R^1f_{2*}\,\mathbb{G}_m\,(m),\,G) & \xrightarrow{\sim} & H^1(X_2,\,G) \end{array} \qquad (1.5.15.1)$$

Si $\bar{u} : \bar{X}_1 \longrightarrow \bar{X}_2$ est fini et plat, et vérifie $Y_1 \supset \bar{u}^{-1}Y_2$ (comme schémas), on a pour $\mathfrak{L}$ faisceau inversible sur $X_1$ et K torseur sur $X_2$,

$$\langle \mathfrak{L},\, u^*K] \xrightarrow{\sim} \langle N_{\bar{X}_1/\bar{X}_2}\,\mathfrak{L},\, K]$$

et on en déduit la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}^1(R^1f_{2*}\,\mathbb{G}_m\,(m),\,G) & \xrightarrow{\sim} & H^1(X_2,\,G) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ext}^1(N_{X_1/X_2},\mathrm{Id})} & & \Big\downarrow{\scriptstyle u^*} \\ \mathrm{Ext}^1(R^1f_{1*}\,\mathbb{G}_m\,(m),\,G) & \xrightarrow{\sim} & H^1(X_1,\,G) \end{array} \qquad (1.5.15.2)$$

On pourrait bien sûr préciser ce résultat en termes de champs de Picard.

## 1.6. Un théorème d'effacement.

Le présent n°, de 1.6.6 (2ème démonstration) à la fin, peut se lire indépendamment des n° 2 à 5.

Lemme 1.6.1. Soient X un schéma et Y un sous-schéma fermé de X de complément U, défini par un idéal m.

$$U \xhookrightarrow{j} X \xhookleftarrow{i} Y$$

Soit $\mathbb{G}_m(\underline{m})$ le faisceau fpqc dont les sections sur un X-schéma $X_1$ sont les sections de $\mathcal{O}^*_{X_1}$ valant 1 sur l'image réciproque de Y. Pour $n \geqslant 1$ inversible sur X, la suite

$$0 \longrightarrow j_!\mu_n \longrightarrow \mathbb{G}_m(\underline{m}) \xrightarrow{n} \mathbb{G}_m(\underline{m}) \longrightarrow 0$$

est une suite exacte de faisceaux sur le grand site étale (XVII 0.10) de X.

Soit i le morphisme de grands sites étale $i : Y \longrightarrow X$ induit par i :

$$i^{*}(X_1/X) = X_1 \times_X Y.$$

Le foncteur $i_*$ est exact. Dans le diagramme

(1.6.1.1)
$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & j_!\mu_n & \longrightarrow & \mathbb{G}_m(\underline{m}) & \longrightarrow & \mathbb{G}_m(\underline{m}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mu_n & \longrightarrow & \mathbb{G}_m & \longrightarrow & \mathbb{G}_m & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & i_*\mu_n & \longrightarrow & i_*\mathbb{G}_m & \longrightarrow & i_*\mathbb{G}_m & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

les colonnes sont exactes, ainsi que les deux dernières lignes (IX 3.2). La première ligne est donc exacte.

1.6.2. Soient k un corps et

$$G_1' \longrightarrow G_2' \longrightarrow G \longrightarrow G_2'' \longrightarrow G_1''$$

une suite exacte de faisceaux abéliens sur le grand site fppf de Spec (k). On rappelle que si $G_1'$ et $G_2'$ sont représentables de type fini, et $G_2''$ et $G_1''$ représentables localement de type fini, alors G est représentable et localement de type fini.

Si P est un groupe algébrique de type fini commutatif connexe sur k, et n un entier inversible dans k, la suite

(1.6.2.1)
$$0 \longrightarrow {}_nP \longrightarrow P \xrightarrow{n} P \longrightarrow 0$$

est exacte. Si G est un groupe commutatif fini étale sur k, annulé par n, le premier groupe et la dernière flèche de la suite exacte

$$\mathrm{Hom}(P,G) \longrightarrow \mathrm{Hom}({}_nP,G) \xrightarrow{j} \mathrm{Ext}^1(P,G) \xrightarrow{n} \mathrm{Ext}^1(P,G)$$

sont nuls, d'où un isomorphisme

(1.6.2.2)
$$j : \mathrm{Hom}({}_nP,G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1(P,G) \quad .$$

1.6.3. Sous les hypothèses de 1.6.1, supposons X propre sur le spectre d'un corps k

$$p : X \longrightarrow k \quad .$$

La suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{G}_m(\underline{m}) \longrightarrow \mathbb{G}_m \longrightarrow i_* \mathbb{G}_m \longrightarrow 0$$

définit une suite exacte de cohomologie de faisceaux fppf sur Spec(k), qu'il est facile d'interpréter directement

$$(1.6.3.1) \qquad 0 \longrightarrow p_* \mathbb{G}_m(\underline{m}) \longrightarrow p_* \mathbb{G}_{m_X} \longrightarrow (pi)_* \mathbb{G}_{m_Y} \xrightarrow{j}$$
$$R^1 p_* \mathbb{G}_m(\underline{m}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Pic}}_{X/k} \longrightarrow \underline{\mathrm{Pic}}_{Y/k} \quad .$$

Les faisceaux $p_* \mathbb{G}_{m_X}$ et $p_* \mathbb{G}_{m_Y}$ sont représentables par des schémas en groupes de type fini. Les faisceaux $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}$ et $\underline{\mathrm{Pic}}_{Y/k}$ sont représentables par des schémas en groupes localement de type fini. D'après 1.6.2, les faisceaux $p_* \mathbb{G}_m(\underline{m})$ et $R^1 p_* \mathbb{G}_m(\underline{m})$ sont représentables. D'après (1.3.13.1), le premier est représentable par un schéma en groupe connexe (et de type fini); le second est localement de type fini.

Définition 1.6.4. Sous les hypothèses précédentes, on désigne par $\underline{\mathrm{Pic}}_{\underline{m},X/k}$ le schéma en groupes qui représente $R^1 p_* \mathbb{G}_m(\underline{m})$. On désigne par $\underline{\mathrm{Pic}}^{\circ}_{\underline{m},X/k}$ sa composante neutre et par $\underline{\mathrm{Pic}}^{\tau}_{\underline{m},X/k}$ l'image réciproque dans $\underline{\mathrm{Pic}}_{\underline{m},X/k}$ du sous-groupe de torsion de $\underline{\mathrm{Pic}}_{\underline{m},X/k}/\underline{\mathrm{Pic}}^{\circ}_{\underline{m},X/k}$.

Le schéma $\mathrm{Pic}_{\underline{m},X/k}$ représente le faisceau fppf engendré par le préfaisceaux qui à chaque section S sur k associe l'ensemble des classes d'isomorphie de modules inversibles sur $S \underset{k}{} X$, trivialisés le long de $S \underset{k}{} Y$ (1.5.8).

La suite exacte de Kummer 1.4.1 fournit, pour k algébriquement clos et n inversible dans k, un isomorphisme

$$(1.6.4.1) \qquad H^1_c(U, \mu_n) \xrightarrow{\sim} {}_n\mathrm{Pic}^{\tau}_{\underline{m}_{X/k}}(k) \quad .$$

1.6.5. Soient X une courbe lisse sur un corps algébriquement clos k, $\bar{X}$ la courbe projective et lisse contenant X comme ouvert dense, Y un sous-schéma de $\bar{X}$ tel que $X = \bar{X} - Y$, $\underline{m}$ l'idéal qui définit Y, n un entier inversible dans k et G un groupe abélien fini tué par n.

Le groupe $\underline{\mathrm{Pic}}_{\underline{m},X/k}$ est non canoniquement le produit du sous-groupe $\underline{\mathrm{Pic}}^{\circ}_{\underline{m},\bar{X}/k}$ et d'un groupe abélien libre. D'après 1.6.4.1, 1.6.2.2, et 1.5.14, on dispose dès lors d'un isomorphisme canonique composé

$$\mathrm{Hom}(H^1_c(X,\mu_n),G) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Hom}({}_n\underline{\mathrm{Pic}}^{\tau}_{\underline{m},\bar{X}/k}(k),G) = \mathrm{Hom}({}_n\underline{\mathrm{Pic}}^{\circ}_{\underline{m},\bar{X}/k},G)$$
$$\xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1(\underline{\mathrm{Pic}}^{\circ}_{\underline{m},\bar{X}/k},G) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1(\mathrm{Pic}_{\underline{m},\bar{X}/k},G) \xrightarrow{\sim} H^1(X,G)$$

Si $u : X \longrightarrow Y$ est un morphisme fini entre courbes lisses sur k, on déduit de XVII 6.3. et (1.5.15.2) la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(H^1_c(Y,\mu_n),G) & \xrightarrow{\sim} & H^1(Y,G) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}(\mathrm{Tr}_u,G)} & & \downarrow{\scriptstyle u^*} \\ \mathrm{Hom}(H^1_c(X,\mu_n),G) & \xrightarrow{\sim} & H^1(X,G) \end{array} \qquad (1.6.5.1)$$

Lemme 1.6.6. Soient X une courbe lisse sur un corps algébriquement clos k, n un entier inversible dans k et $u : X' \longrightarrow X$ un revêtement étale modéré. Le morphisme

$$\mathrm{Tr}_u : H^1_c(X',\mathbb{Z}/n) \longrightarrow H^1_c(X,\mathbb{Z}/n)$$

est alors (non canoniquement) isomorphe au transposé du morphisme

$$u^* : H^1(X,\mathbb{Z}/n) \longrightarrow H^1(X',\mathbb{Z}/n) \quad .$$

1ère démonstration. Puisque $\mu_n$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/n$, 1.6.6 est un cas particulier de 1.6.5.1 pour $G = \mathbb{Z}/n$ .

2ème démonstration. Si k est le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, alors, par les théorèmes de comparaison, les morphismes $\mathrm{Tr}_u$ et $u^*$ s'identifient aux morphismes analogues, définis par l'application continue entre espaces topologiques $u : X'(\mathbb{C}) \longrightarrow X(\mathbb{C})$ :

$$Tr_u : H_c^1(X'(\mathbb{C}),\mathbb{Z}/n) \longrightarrow H_c^1(X(\mathbb{C}),\mathbb{Z}/n) \qquad \text{et}$$

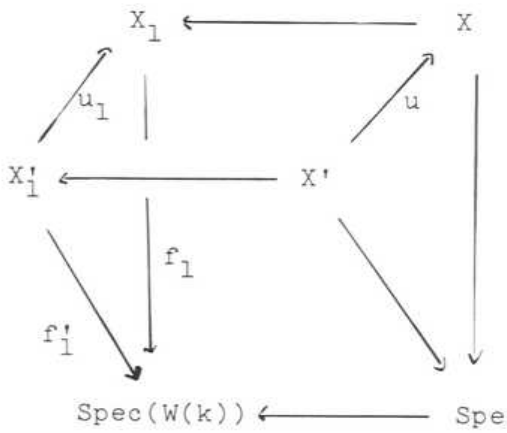
$$u^* : H^1(X(\mathbb{C}),\mathbb{Z}/n) \longrightarrow H^1(X'(\mathbb{C}),\mathbb{Z}/n) \quad .$$

Ces deux homomorphismes sont transposés l'un de l'autre par dualité de Poincaré.

Par le principe de Lefschetz, l'assertion 1.6.6 est encore vraie pour k de caractéristique 0 (les groupes de cohomologie considérés sont en effet invariants par changement de corps de base algébriquement clos).

Si k est caractéristique $p > 0$, soit $W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt sur k. Soit $\bar{X}$ la courbe projective et lisse complétée de X. D'après (SGA 1 III 7.4), la courbe $\bar{X}$ se relève en une courbe projective et lisse $\bar{X}_1$ sur $W(k)$. Puisque $\bar{X}$ est lisse, chaque point $s_i \in S = \bar{X}-X$ se relève en une section $s_i'$ de $\bar{X}$ sur $W(k)$; on pose $S_1 = \bigcup_i s_i'(\mathrm{Spec}(W(k)))$ et $X_1 = \bar{X}_1 - S_1$.

Rappelons (SGA 1 XII) que le revêtement X' de X se relève en un revêtement étale $X_1'$ de $X_1$, et que $X_1'$ se déduit d'une courbe projective et lisse $\bar{X}_1'$ sur $W(k)$ par soustraction de la réunion $S_1'$ d'un nombre fini de sections disjointes.




Les faisceaux étales $R^1f_{1*}(\mathbb{Z}/n)$, $R^1f_{1*}'(\mathbb{Z}/n)$, $R^1f_{1!}(\mathbb{Z}/n)$ et $R^1f_{1!}'(\mathbb{Z}/n)$ sont localement constants de formation compatible aux changements de

base, comme le montrent les suites exactes reliant les cohomologies de $\bar{X}_1$, $X_1$ et $S_1$, ou $\bar{X}'_1$, $X'_1$ et $S'_1$.

Les fibres géométriques spéciales ou génériques des morphismes

$$Tr_{u_1} : R^1 f'_{1!}\ \mathbb{Z}/n \longrightarrow R^1 f_{1!}\ \mathbb{Z}/n$$

ou

$$u_1^* : R^1 f_{1*}\ \mathbb{Z}/n \longrightarrow R^1 f'_{1*}\ \mathbb{Z}/n$$

sont donc isomorphes, et ceci nous ramène au cas déjà traité où k est de caractéristique zéro.

Lemme 1.6.7. Soient X une courbe lisse connexe sur un corps algébriquement clos k d'exposant caractéristique p, et n un entier premier à p. Il existe un revêtement principal (= fini étale galoisien(surjectif)) $u : X' \longrightarrow X$, de degré divisant une puissance de n, tel que le morphisme trace

$$Tr_u : H^1_c(X', \mathbb{Z}/n) \longrightarrow H^1_c(X, \mathbb{Z}/n)$$

soit nul.

Rappelons que le groupe $H^1(X, \mathbb{Z}/n)$ est fini (IX 4.6 ou XVI 5.2). Soit $u : X' \longrightarrow X$ le plus grand revêtement principal abélien connexe de X de groupe de Galois tué par n (son groupe de Galois est noté $H_1(X, \mathbb{Z}/n)$). Par construction, l'homomorphisme

$$u^* : H^1(X, \mathbb{Z}/n) \longrightarrow H^1(X', \mathbb{Z}/n)$$

est nul. D'après 1.6.6, l'homomorphisme

$$Tr_u : H^1_c(X', \mathbb{Z}/n) \longrightarrow H^1_c(X, \mathbb{Z}/n)$$

est donc nul.

Rappelons le lemme suivant (EGA IV 15.6.5) :

Lemme 1.6.8. Soient $f : X \longrightarrow S$ un morphisme lisse et x une section de f. Il existe alors un ouvert de Zariski U de X, contenant x, et tel que les fibres géométriques de $f|U$ soient connexes.

Lemme fondamental 1.6.9. Soient $f : X \longrightarrow S$ une courbe lisse (1.1.2) compactifiable (XVII 3.2.), $x$ un point géométrique de $X$, $s$ son image dans $S$ et $n \geqslant 1$ un entier inversible sur $S$. Il existe un voisinage étale $V$ de $s$ dans $S$ et un voisinage étale $U$ de $x$ dans $f^{-1}(V) = Vx_S X$

(1.6.9.1)
$$\begin{array}{ccccc} x & \longrightarrow & U & \xrightarrow{u} & f^{-1}(V) & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & & \searrow^{f'} & \downarrow{\scriptstyle f_V} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ s & & \longrightarrow & & V & \longrightarrow & S \end{array} ,$$

tels que l'on ait $R^0 f'_! \underline{\mathbb{Z}}/n = 0$, que la flèche XVII 6.2

$$Tr_u : R^1 f'_! \underline{\mathbb{Z}}/n \longrightarrow R^1 f_{V!} \underline{\mathbb{Z}}/n$$

soit nulle, et que le morphisme trace

$$Tr_{f'} : R^2 f'_! \underline{\mathbb{Z}}/n(1) \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}}/n$$

soit un isomorphisme.

Pour que $R^0 f'_! \underline{\mathbb{Z}}/n = 0$, il suffit que $f'$ soit quasi-affine; pour que $Tr_{f'}$ soit un isomorphisme, il suffit que les fibres géométriques de $f'$ soient connexes (1.1.9); grâce à 1.6.8, ces propriétés de $f'$ sont faciles à obtenir, localement sur $S$ pour la topologie étale. Il reste à démontrer pour $X$ à fibres géométriques connexes, l'existence d'un diagramme (1.6.9.1) pour lequel la flèche $Tr_u$ considérée soit nulle : il suffira de rétrécir $U$ et $V$ pour que les deux autres propriétés requises de $f'$ soient vérifiées.

Le problème est local sur $S$ au voisinage de $s$; par XVII 5.2.6 (changement de base), on se ramène aussitôt au cas $S$ noethérien. Par passage à la limite, et grâce à XVII 5.3.6 (constructibilité) on se ramène au cas $S$ strictement local noethérien, de point fermé image de $s$.

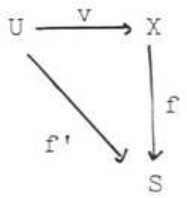
Soit $t$ un point géométrique de $S$. D'après 1.6.7, il existe un revêtement principal de degré premier à l'exposant caractéristique $p$ de $k(s)$ $u : X'_t \longrightarrow X_t$, tel que la flèche

$$Tr_u : H_c^1(X_t^1, \mathbb{Z}/n) \longrightarrow H_c^1(X_t, \mathbb{Z}/n)$$

soit nulle. D'après le théorème d'acyclicité XV 2.1 (ou XV 2.6), il existe un voisinage étale $v : U \longrightarrow X$ de $x$ dans $X$ tel que $X_t^1$ splitte au-dessus de $U_t$, de sorte que : $v_t : U_t \longrightarrow X_t$ se factorise par $X_t^1$. On a donc encore

$$Tr_{v_t} = 0 \quad : \quad H_c^1(U_t, \mathbb{Z}/n) \longrightarrow H_c^1(X_t, \mathbb{Z}/n) \quad .$$

Pour tout point géométrique $t$ de $S$, il existe donc un voisinage étale de $x$ dans $X$




tel que la fibre en $t$ de

(1.6.9.2) $$Tr_v : R^1 f_! \mathbb{Z}/n \longrightarrow R^1 f_! \mathbb{Z}/n$$

soit nulle (XVII 5.2.6).

Pour U variable, les images des flèches (1.6.9.2) forment un système décroissant filtrant de sous-faisceaux du faisceau constructible $R^1 f_! \mathbb{Z}/n$, qui devient nul en un quelconque point géométrique de S. Par récurrence noethérienne, on vérifie qu'un tel système est toujours stationnaire, de valeur stationnaire nulle. Il existe donc U tel que (1.6.9.2) soit nul, et ceci achève la démonstration de 1.6.9.

## 2. Le morphisme trace

Le présent § est consacré à la démonstration des théorèmes 2.9 et 2.12 . La démonstration de 2.9 n'utilise que le n°1 du § 1.

Lemme 2.1. Soit $f : X \longrightarrow S$ un morphisme compactifiable (XVII 3.2.1) de dimension relative $\leqslant d$ et $j : U \hookrightarrow X$ un sous-schéma ouvert de type fini de X, dont le complément est fibre par fibre de dimension $< d$ (par exemple : U dense fibre par fibre dans X). Si F est un faisceau de torsion sur X, la flèche canonique

$$R^{2d}(fj)_! \, j^*F \xrightarrow{\sim} R^{2d}f_!F$$

est un isomorphisme.

Soit i l'inclusion de Y = X-U dans X. La suite exacte (XVII 5.1.16.2) nous fournit une suite exacte

$$R^{2d-1}(fi)_! i^*F \longrightarrow R^{2d}(fj)_! j^*F \longrightarrow R^{2d}f_!F \longrightarrow R^{2d}(fi)_! i^*F$$

dont les termes extrêmes sont nuls en vertu de (XVII 5.2.8.1).

Lemme 2.2. Soient $f : X \longrightarrow S$ un morphisme compactifiable de dimension relative $\leqslant d$, et $u_i : X_i \longrightarrow X$ une famille de morphismes étales, séparés, de type fini; soit $u_{ij} : X_{ij} = X_i \times_X X_j \longrightarrow X$. Pour tout faisceau de torsion F sur X, la suite

$$\bigoplus_{i,j} R^{2d}(fu_{ij})_! u_{ij}^* F \rightrightarrows \bigoplus_i R^{2d}(fu_i)_! u_i^* F \longrightarrow R^{2d}f_!F \longrightarrow 0$$

de flèches (XVII 6.2.7.2) est exacte.

Résulte aussitôt de l'exactitude à droite du foncteur $R^{2d}f_!$ et de XVII 6.2.9.

Lemme 2.3. Soit $f : X \longrightarrow S$ un morphisme plat de présentation finie. L'ouvert de X sur lequel f est de Cohen-Macaulay (EGA IV 6.8.1 et 12.2.1(vii)) est relativement de présentation finie et dense fibre par fibre.

La question est locale sur S, qu'on se ramène à supposer noethérien, d'où la 1ère assertion. La seconde se vérifie fibre par fibre, donc pour S spectre d'un corps. Les anneaux locaux de X aux points maximaux de X sont artiniens, donc de Cohen-Macaulay, d'où l'assertion puisque "Cohen-Macaulay" est une propriété "ouverte".

Lemme 2.4. Soit $f : X \longrightarrow S$ un morphisme plat de présentation finie et de Cohen-Macaulay, avec S quasi-séparé. Tout point de X a un voisinage ouvert (de Zariski) U tel qu'il existe un S-morphisme quasi-fini et plat de présentation finie de U dans le fibré vectoriel type $\mathbb{E}_S^d$.

C'est un cas particulier de EGA IV 15.4.3.

Lemme 2.5. Soient $\underline{u} = (u_1,\ldots,u_d)$ et $\underline{v} = (v_1,\ldots,v_d)$ deux systèmes de paramètres d'un anneau local de Cohen-Macaulay A, de dimension d et d'idéal maximal $\underline{m}$. Il existe une suite $\underline{w}_o \ldots \underline{w}_n$ de systèmes de paramètres de A, telle que $\underline{w}_o = \underline{u}$, $\underline{w}_n = \underline{v}$ et que chaque $\underline{w}_{i+1}$ se déduise de $\underline{w}_i$, en modifiant un seul des paramètres.

On raisonne par récurrence sur d, l'assertion étant vide pour $d < 2$; on suppose donc $d \geqslant 2$. Pour qu'un élément $x \in \underline{m}$ soit $A/u_1$ - régulier (resp. $A/v_1$ - régulier) il faut et il suffit que x n'appartienne à aucun élément de $\mathrm{Ass}(A/u_1)$ (resp. $\mathrm{Ass}(A/v_1)$); aucune réunion finie d'idéaux premiers $\neq \underline{m}$ n'étant égale à $\underline{m}$, il existe $x \in \underline{m}$ qui soit $A/u_1$ - et $A/v_1$ - régulier, donc aussi des systèmes de paramètres $\underline{a} = (u_1,x,\ldots)$ et $\underline{b} = (v_1,x,\ldots)$. On conclut en appliquant l'hypothèse de récurrence à $\underline{u}-\{u_1\}$ et $\underline{a}-\{u_1\}$ dans $A/u_1$, à $\underline{a}-\{x\}$ et $\underline{b}-\{x\}$ dans $A/x$ et à $\underline{b}-\{v_1\}$ et $\underline{v}-\{v_1\}$ dans $A/v_1$.

Lemme 2.6. Soient X un schéma de Cohen-Macaulay de type fini sur un corps algébriquement clos k et $u,v : X \longrightarrow \mathbb{E}_k^d$ deux morphismes quasi-finis et plats de X dans un fibré vectoriel type. Tout point fermé x de X a un voisinage ouvert (de Zariski) U, tel qu'il existe une

suite de morphismes $w_o \ldots w_n : U \longrightarrow E^d_k$, telle que $w_o = u|U, w_n = v|U$ et que $w_{i+1}$ ne diffère de $w_i$ que par une seule coordonnée.

Supposons tout d'abord que $u(x) = v(x) = 0$. Les germes en x de morphismes quasi-finis plats de X dans $\mathbb{A}^d_k$, envoyant x en 0, s'identifient alors aux systèmes de paramètres de l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ et 2.6 résulte de 2.5. Dans le cas général, on commence à joindre u et u-u(x) (resp. v et v-v(x)) par la chaîne des morphismes $u - (u_1(x),\ldots,u_i(x),0,\ldots 0)$ (resp. $v - (v_1(x),\ldots,v_i(x),0\ldots 0)$).

2.7. Soit un couple de morphismes S-compactifiables composables $X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} S$. Supposons que f soit de dimension relative $\leqslant d$ et g de dimension relative $\leqslant e$. Pour tout faisceau de torsion F sur X, la suite spectrale de composition

$$R^p f_! \, R^q g_! \, F \Longrightarrow R^{p+q}(fg)! \, F \tag{2.7.1}$$

nous fournit alors (argument du cycle maximum) un isomorphisme

$$R^{2d} f_! \, R^{2e} g_! \, F \simeq R^{2(d+e)}(fg)_! \, F \ . \tag{2.7.2}$$

2.8. Soit

$$a^d : \mathbb{E}^d_S \longrightarrow S$$

le fibré vectoriel type sur un schéma cohérent (i.e. quasi-compact quasi-séparé) S. Si F est un faisceau de torsion sur S, premier aux caractéristiques résiduelles de S, on définit comme suit, par récurrence sur d, un morphisme trace

$$\mathrm{Tr}_{a^d} : R^{2d} a^d_! \, F(d) \xrightarrow{\sim} F \ . \tag{2.8.1}$$

Pour $d = 0$, $\mathrm{Tr}_{a^0}$ est l'identité. Pour $d = 1$, $\mathrm{Tr}_{a^1}$ est l'isomorphisme (1.1.6) (cf.1.1.9). Enfin, on a un isomorphisme canonique

$$\mathbb{E}^{d+1}_S \simeq \mathbb{E}^1_S \times_S \mathbb{E}^d_S = \mathbb{E}^1 \mathbb{E}^d_S$$

et on définit $Tr_{a_{d+1}}$ comme le composé des isomorphismes $Tr_{a_S^d}$ et $Ra^d_{S!}(Tr_{a_{\mathbb{E}_S^d}^1})$. (cf. le diagramme Var 3 de 2.9).

La source (et le but) de 2.8.1 sont de formation compatible à tout changement de base. Tout groupe algébrique sur S agissant sur $\mathbb{E}_S^d$ agit donc sur ces faisceaux; un groupe algébrique connexe agit nécessairement de façon triviale. Le groupe des permutations des coordonnées, contenu dans le groupe affine, agit donc trivialement sur la source (et le but) de 2.8.1.

(2.8.2) L'isomorphisme 2.8.1 est invariant par permutation des coordonnées.

Ce point pourrait aussi se vérifier en interprétant (2.8.1) en termes de cup-produits (XVII 5.4.2.2 et 5.4.3.5.).

Théorème 2.9 Considérons les triples (f, d, F) formés d'un morphisme compactifiable (XVII 6.3.) $f : X \longrightarrow Y$, d'un entier d et d'un faisceau de torsion F sur Y premier aux caractéristiques résiduelles de Y, le morphisme f vérifiant la condition : $(*)_d$ Il existe un ouvert U de X tel que la restriction de f à U soit un morphisme plat de présentation finie à fibres de dimension $< d$, et tel que les fibres X - U soient de dimension $< d$.

Il est d'une et d'une seule façon possible d'associer à chaque triple (f, d, F) comme plus haut un morphisme trace

$$Tr_f : R^{2d}f_! f^* F(d) \longrightarrow F$$

de telle sorte que les conditions suivantes soient vérifiées :

(Var 1) (Fonctorialité). Le morphisme trace est fonctoriel en F.

(Var 2) (Compatibilité aux changements de base). Quel que soit le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y' & \xrightarrow[g]{} & Y \end{array}$$

avec Y' quasi-compact quasi-séparé, le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} R^{2d}f'_!f'^{*}\, g^{*}\, F(d) & = & R^{2d}f'_!\, g'^{*}\, f^{*}\, F(d) & \xleftarrow{\sim} & g^{*}\, R^{2d}f_!\, f^{*}\, F(d) \\ \downarrow{\scriptstyle Tr_{f'}} & & & & \downarrow{\scriptstyle g^{*}(Tr_f)} \\ g^{*}F & = & & = & g^{*}F \end{array}$$

dans lequel l'isomorphisme horizontal est la flèche de changement de base (XVII 5.5.2.1), est commutatif.

(Var 3) (Compatibilité à la composition). Quels que soient le couple de morphismes Z-compactifiables composables

$$X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z \quad ,$$

les entiers d et e tels que f vérifie $(^{*})_d$ et que g vérifie $(^{*})_e$, et le faisceau de torsion F sur Z, le morphisme composé fg vérifie $(^{*})_{d+e}$ et le diagramme

$$\begin{array}{ccc} R^{2d}f_!\, R^{2e}g_!\, g^{*}\, f^{*}F(d)(e) & \xrightarrow{R^{2d}f_!(Tr_g)} & R^{2d}f_!\, f^{*}F(d) \\ \wr\uparrow\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Tr_f} \\ R^{2(d+e)}(fg)_!\, (fg)^{*}\, F(d+e) & \xrightarrow{Tr_{fg}} & F \end{array}$$

dans lequel l'isomorphisme vertical est la flèche (2.7.2), est commutatif.

(Var 4) (Normalisations).

(I) Si f est fini localement libre de rang n et si d = 0, le morphisme composé

$$F \longrightarrow f_{*}f^{*}F \;=\; f_!f^{*}F \xrightarrow{tr_f} F$$

est la multiplication par n.

(II) Si f est la droite affine type $f : \mathbb{E}^1_Y \longrightarrow Y$, et si d = 1, le morphisme trace

$$Tr_f \qquad R^2 f_! f^* F(1) \longrightarrow F$$

est l'isomorphisme (2.8.1)

a) Pour d = 0, la condition $(*)_d$ est que f soit quasi-fini plat de présentation finie. En vertu de (XVII 6.2.3), pour d = 0, le morphisme trace doit coïncider avec le morphisme construit en loc. cit.

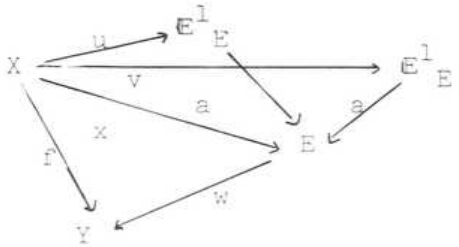
Lorsque f est la projection de l'espace affine type $\mathbb{A}^d_S$ sur S, il résulte de (Var 4 (II) et (Var 3) que $Tr_f$ doit être l'isomorphisme (2.8.1).

- b) Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme compactifiable vérifiant la condition: $(**)_d$ Il existe un Y-morphisme quasi-fini et plat de présentation finie u de X dans le fibré vectoriel type $a^d : \mathbb{E}^d_Y \longrightarrow Y$.

Soit t(f,u) le morphisme "composé" des morphismes trace (2.8.1) et (SGA XVII 6.2.3 ) (cf. (Var 3))

$$t(f,u) = Tr_{a^d} \circ R^{2d} a^d_! (Tr_u) \quad .$$

Ce morphisme t(f,u) vérifie (Var 1) et (Var 2). Par changement de base, pour vérifier que t(f,u) ne dépend que de f et de d, et non de u, il suffit de le vérifier pour Y spectre d'un corps algébriquement clos k. D'après 2.2, la question est locale sur X, de sorte que d'après 2.6, il suffit de montrer que t(f,u) = t(f,v) lorsque u et v ne diffèrent que par une seule coordonnée que, par 2.8.2, on peut supposer être la première. Posant $E = \mathbb{E}^{d-1}_Y$, on dispose donc d'un diagramme commutatif



On a par construction (2.8)

$$Tr_{wa} = Tr_w \circ R^{2(d-1)}w_!(Tr_a) \quad ;$$

on en déduit que t(f,u) est le composé" de $Tr_w$ et de t(x,u) :

$$\begin{aligned} t(f,u) &= Tr_{wa} \circ R^{2d}(wa)_! (Tr_u) \\ &= Tr_w \circ R^{2(d-1)}w_! (Tr_a) \circ R^{2d}(wa)_! (Tr_u) \\ &= Tr_w \circ R^{2(d-1)}w_! (Tr_a \circ R^2 a_! (Tr_u)) \quad . \end{aligned}$$

De plus (1.1.7), t(x,u) n'est autre que le morphisme $Tr_x$ de 1.1.6; on a donc $t(x,u) = t(x,v) = Tr_x$ et $t(f,u) = t(f,v)$.

On désignera par $Tr_f$ le morphisme t(f,u) construit plus haut. D'après XVII 6.2.3, ce morphisme trace vérifie (Var 1), (Var 2), (Var 3) pour e = 0, et (Var 4). Quand il est défini, il coïncide nécessairement avec le morphisme trace cherché, si ce dernier existe.

c) Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme compactifiable de Cohen-Macaulay, plat de présentation finie, purement de dimension relative d. Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de X par des ouverts quasi-compacts, tels qu'il existe un Y-morphisme quasi-fini et plat de $U_i$ dans $E_Y^d$ (2.4). D'après 2.2 et b), il existe alors un et un seul morphisme $Tr_f$ rendant commutatif le diagramme suivant, où sont employées les notations de 2.2 :

$$\begin{array}{ccccc} \bigoplus_{i,j} R^{2d}(fu_{ij})_!(fu_{ij})^* F(d) & \rightrightarrows & \bigoplus_i R^{2d}(fu_i)_!(fu_i)^* F(d) & \longrightarrow & R^{2d} f_! f^* F(d) \\ & & \bigoplus_i Tr_{fu_i} \searrow & & \downarrow Tr_f \\ & & & & F \end{array}$$

Ce morphisme trace ne dépend pas du recouvrement ouvert choisi (comparer les deux au recouvrement somme); il vérifie les conditions (Var 1), (Var 2), (Var 3) pour e = 0, (Var 4), comme il résulte aussitôt de b).

d) Soient $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme compactifiable vérifiant $(^*)_d$, et

$j : U \hookrightarrow X$ l'ouvert promis par $(^*)_d$. D'après 2.3, quitte à remplacer U par un ouvert plus petit, on peut supposer que fj est de Cohen-Macaulay, et purement de dimension d.

D'après 2.1, le morphisme canonique

$$R^{2d}(fj)_!(fj)^*F(d) \xrightarrow{\sim} R^{2d}f_!f^*F(d)$$

est un isomorphisme, et on définit $Tr_f$ comme étant le composé

$$Tr_f : R^{2d}f_!f^*F(d) \xleftarrow{\sim} R^{2d}(fj)_!(fj)^*F(d) \xrightarrow{Tr_{fj}} F .$$

Il est immédiatement, grâce à (Var 3) pour e = 0 établi en c), que $Tr_f$ ne dépend pas du choix de U. Le morphisme trace vérifie (Var 1), (Var 2), (Var 3) pour e = 0, (Var 4), et est le seul à pouvoir vérifier les conditions imposées. Reste à prouver qu'il vérifie (Var 3), et pour ce faire on se ramène, par les arguments qui précèdent, à ne considérer que des couples (f,d), (g,e) vérifiant $(\overset{*}{*})_d$ et $(\overset{*}{*})_e$ .

Le lecteur qui voudrait polir les raisonnements qui suivent vérifiera au préalable le

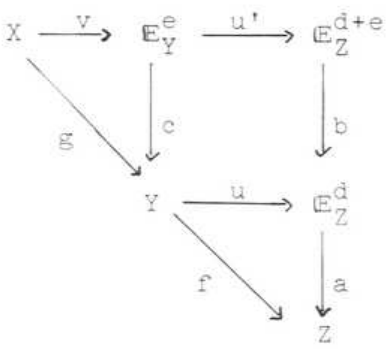
Lemme 2.9.1. Soient (f,g,h) trois morphismes T-compactifiables composables, vérifiant $(^*)_k$, $(^*)_\ell$ et $(^*)_m$.

$$X \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{f} T .$$

Si les couples (f,g) et (g,h) vérifient (Var 3), alors pour que (f,gh) vérifie (Var 3), il faut et il suffit que (fg,h) vérifie (Var 3).

La condition envisagée dans la conclusion signifie encore que $Tr_{fgh}$ est "composé" de $Tr_f$, $Tr_g$ et $Tr_h$.

e) Soit un diagramme commutatif :



Le morphisme trace relatif à fg est le "composé" des morphismes traces relatifs à ab et u'v; c'est encore, par construction pour ab, et d'après XVII 6.2.3 pour u'v, le "composé" des morphismes trace relatifs à a, b, u' et v. D'autre part, le "composé" des morphismes trace relatifs à f et g est le "composé" de ceux relatifs à a, u, e et v. Il s'agit donc de vérifier que pour tout diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} E'^{e}_{S} & \xrightarrow{u'} & E'^{e}_{T} \\ \downarrow{\scriptstyle b'} & & \downarrow{\scriptstyle b} \\ S & \xrightarrow{u} & T \end{array} \tag{2.9.2}$$

avec u quasi-fini et plat de présentation finie, le diagramme de morphismes trace (2.8.1) et XVII 6.2. )

$$\begin{array}{ccccc} R^{2e}b_{!}\, u'_{!}\, u'^{*}b^{*}\, F(e) & \xrightarrow{R^{2e}b_{!}(Tr_{u'})} & R^{2e}b_{!}\, b^{*}\, F(e) & \xrightarrow{Tr_{b}} & F \\ \| & & & & \| \\ u_{!}\, R^{2e}b'_{!}\, b'^{*}\, u^{*}\, F(e) & \xrightarrow{u_{!}(Tr_{b'})} & u_{!}\, u^{*}\, F & \xrightarrow{Tr_{u}} & F \end{array} \tag{2.9.3}$$

est commutatif.

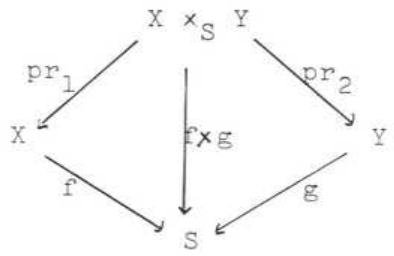
Par changement de base, il suffit de le vérifier pour T spectre d'un corps algébriquement clos k. Si S est somme de schémas $S_i$, on se ramène à ne vérifier la commutativité de (2.9.3) que pour les diagrammes (2.9.2) de base $u_i : S_i \longrightarrow T$. Ceci permet de supposer que S est le spectre d'une k-algèbre artinienne locale A, de degré fini $n = [A : k]$. Si on identifie alors les faisceaux sur T (resp. sur $E'^{e}_{T}$) avec les faisceaux sur S (resp. sur $E'^{e}_{S}$) par le foncteur $u^{*}$ (resp. $u'^{*}$) (VIII 1.1), le morphisme $Tr_b$ s'identifie au morphisme $Tr_{b'}$ (compatibilité de (2.8.1) aux changements de base), tandis que $Tr_u$ et $Tr_{u'}$ s'identifient à la multiplication par n, d'où l'assertion. Ceci achève la démonstration de 2.9.

On a vu au courant de la démonstration que l'on a :

Proposition 2.10. Les morphismes trace XVII 6.2.3, 1.1.6 et (2.8.1) sont des cas particuliers du morphisme trace 2.9.

Remarque 2.10.1. On peut montrer sans difficulté que le morphisme trace de 2.9 est un isomorphisme si et seulement si les fibres géométriques de f ont exactement une composante irréductible de dimension d, et la "multiplicité" de celle-ci est première à n. Nous ne donnerons pas ici la démonstration directe de ce fait qui résultera de façon immédiate du "théorème de dualité globale" du § 3.

2.11. Soient $f : X \longrightarrow S$ et $g : Y \longrightarrow S$ deux morphismes S-compactifiables vérifiant respectivement $(*)_d$ et $(*)_e$.




L'isomorphisme de Kunneth (XVII 5.4.3)

$$Rf_!(Z/n) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{Z/n} Rg_!(Z/n) \xrightarrow{\sim} R(f\times g)_!(Z/n)$$

induit un isomorphisme

$$R^{2d}f_!\mathbb{Z}/n \otimes R^{2e}g_!\mathbb{Z}/n \xrightarrow{\sim} R^{2(d+e)}(f\times g)_!(\mathbb{Z}/n) \tag{2.11.1}$$

Il est clair que $f\times g$ vérifie $(*)_{d+e}$; on a la compatibilité :

Proposition 2.12. Le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} R^{2d}f_!\mathbb{Z}/n(d) \otimes R^{2e}g_!\mathbb{Z}/n(e) & \xrightarrow{\sim} & R^{2(d+e)}(f\times g)_!\mathbb{Z}/n(d+e) \\ \downarrow{\scriptstyle Tr_f \otimes Tr_g} & & \downarrow{\scriptstyle Tr_{f\times g}} \\ \mathbb{Z}/n & = & \mathbb{Z}/n \end{array} \tag{2.12.1}$$

dans lequel la première flèche horizontale est une forme tordue de

(2.11.1), est commutatif.

Pour le vérifier, il suffit d'utiliser (Var 3), et l'interprétation asymétrique de la flèche de Kunneth utilisée dans la démonstration de XVII 5.4.3. (XVII 5.4.3.5).

2.13. Soient $f : X \longrightarrow S$ un morphisme S-compactifiable vérifiant $(^*)_d$, $\mathcal{A}$ un faisceau d'anneaux sur S et n un entier inversible sur S tel que $n\mathcal{A} = 0$.

Pour tout $K \in D(S,\mathcal{A})$, on a (XVII 5.2.6)

$$K \overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}/n} Rf_!\mathbb{Z}/n(d) \xrightarrow{\sim} Rf_!(f^*K(d)) \quad . \tag{2.13.1}$$

Le morphisme trace

$$Tr_f : R^{2d}f_!\mathbb{Z}/n(d) \longrightarrow \mathbb{Z}/n$$

peut encore s'interpréter comme un morphisme

$$Tr_f : Rf_!\mathbb{Z}/n(d)[2d] \longrightarrow \mathbb{Z}/n \quad .$$

Par tensorisation avec K, ce morphisme définit, via (2.13.1), un morphisme trace

$$Tr_f : Rf_!(f^*K(d)[2d]) \longrightarrow K \quad . \tag{2.13.2}$$

Comme nous le verrons en 3.2.5. le théorème suivant est essentiellement équivalent au théorème de dualité globale en cohomologie étale.

Théorème 2.14. Soient f : X ⟶ S un morphisme lisse et compactifiable purement de dimension relative d, et n un entier ⩾ 1 inversible sur S. Quel que soit le point géométrique x de X d'image s dans S, il existe un voisinage étale V de s dans S et un voisinage étale U de x dans $f^{-1}(V)$

(2.14.1)

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{j} & f^{-1}(V) & \longrightarrow & X \\ & \searrow^{f'_V} & \downarrow{\scriptstyle f_V} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ & & V & \longrightarrow & S \end{array}$$

**tel** que le morphisme (XVII 6.2.7.2)

$$R^i f'_{V!}\mathbb{Z}/n \longrightarrow R^i f_V \mathbb{Z}/n$$

**soit** nul pour $i < 2d$, et que le morphisme

$$Tr_{f'_V} : R^{2d} f'_{V!}\mathbb{Z}/n(d) \longrightarrow \mathbb{Z}/n$$

**soit** un isomorphisme.

Prouvons tout d'abord le

**Lemme** 2.14.2. Soient $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne, k un entier $\geqslant 0$, $(K_i)_{0 \leqslant i \leqslant 2k}$ des objets de $D^b(\mathcal{A})$ tels que $H^p(K_i) = 0$ pour $p \notin [0,k]$, $f_i : K_i \longrightarrow K_{i+i}$ $(0 \leqslant i \leqslant 2k-1)$ des morphismes et f leur composé. Si $H^p(f_i) = 0$ pour $p < k$, alors il existe dans $D^b(\mathcal{A})$ un morphisme $\varphi$ du complexe $H^k(K_o)[-k]$, réduit à $H^k(K_o)$ placé en degré k, dans $K_{2k}$, qui rende commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K_o & \xrightarrow{\quad f \quad} & K_{2k} \\ \downarrow & & \uparrow \varphi \\ \sigma_{\geqslant k}(K_o) & = & H^k(K_o)[-k] \end{array} \quad .$$

Le lemme est trivial pour $k = 0$. Prouvons-le par récurrence sur k. L'hypothèse de récurrence appliquée aux complexes $\sigma_{\geqslant 1}(K_i)[1]$ fournit l'existence d'un morphisme $\varphi' : H^k(K_o)[-k] \longrightarrow \sigma_{\geqslant 1} K_{2k-2}$ qui rende commutatif le diagramme suivant, où $f' = f_{2k-3} \cdots f_o$ :

$$\begin{array}{ccc} K_o & \xrightarrow{\quad f' \quad} & \sigma_{\geqslant 1} K_{2k-2} \\ \downarrow & & \uparrow \varphi' \\ \sigma_{\geqslant k}(K_o) & = & H^k(K_o)[-k] \end{array} \quad .$$

Pour tout complexe L, le triangle distingué

$$\begin{array}{ccc} & \sigma_{\geqslant 1}(L) & \\ \swarrow & & \nwarrow \\ \sigma_{\leqslant o}(L) & \longrightarrow & L \end{array}$$

...

fournit, pour tout complexe M, une suite exacte

$$\ldots \longrightarrow \mathrm{Hom}(M,\sigma_{\leqslant o}(L)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M,L) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M,\sigma_{\geqslant 1}L) \xrightarrow{j} \mathrm{Ext}^1(M,\sigma_{\leqslant o}L) \ .$$

En particulier, on dispose d'un diagramme

(2.14.3)

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Hom}(\sigma_{\geqslant k}K_o,\sigma_{\leqslant o}K_{2k-2}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\sigma_{\geqslant k}K_o,K_{2k-2}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\sigma_{\geqslant k}K_o,\sigma_{\geqslant 1}K_{2k-2}) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1(\sigma_{\geqslant k}K_o,\sigma_{\leqslant o}K_{2k-2}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Hom}(K_o,\sigma_{\leqslant o}K_{2k-2}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(K_o,K_{2k-2}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(K_o,\sigma_{\geqslant 1}K_{2k-2}) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1(K_o,\sigma_{\leqslant o}K_{2k-2})
\end{array}$$

qui s'envoie dans les diagrammes analogues relatifs à $K_{2k-1}$ et $K_{2k}$. Par hypothèse, le morphisme f' en ① a une image en ② qui se relève en ③. L'obstruction ④ à ce que l'élément ③ se relève en ⑤ a une image nulle dans le diagramme (2.14.3) relatif à $K_{2k-1}$. Dans ce nouveau diagramme, ③ se relève donc en ⑤, et la différence entre ① et l'image de ⑤ a une image nulle en ⑥, donc est l'image d'un élément ⑦. Cet élément ⑦ a une image nulle dans le diagramme (2.12.3) relatif à $K_{2k}$; dans ce nouveau diagramme, f est donc image de ⑤, et ceci résoud le problème posé.

Prouvons que, pour une valeur donnée de d, l'énoncé 2.14 implique le

Corollaire 2.14.4. Sous les hypothèses de 2.14, il existe un diagramme (2.14.1) tel que le morphisme XVII 6.2.4, dans $D^b(V,\mathbb{Z}/n)$ admette une factorisation

$$\begin{array}{ccc}
Rf'_{V!}\mathbb{Z}/n(d) & \longrightarrow & Rf_{V!}\mathbb{Z}/n(d) \\
& {\scriptstyle t}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle \varphi} & \\
& \mathbb{Z}/n[-2d] &
\end{array} \ ,$$

où t est la flèche

$$t : Rf'_{V!}\mathbb{Z}/n(d) \longrightarrow \sigma_{\geqslant 2d}Rf'_V\mathbb{Z}/n(d) = H^{2d}(Rf'_V\mathbb{Z}/n(d))[-2d] \xrightarrow{Tr} \mathbb{Z}/n[-2d] \ .$$

Posons $f'_o = f$ et construisons, par récurrence, 4d diagrammes

(2.14.1)

$$\begin{array}{ccccc} U'_{i+1} & \longrightarrow & f_i^{1-1}(V'_{i+1}) & \longrightarrow & U'_i \\ & \searrow^{f'_{i+1}} & \downarrow & & \downarrow f'_i \\ & & V'_{i+1} & \longrightarrow & V'_i \end{array}$$

vérifiant 2.14. Posons $V = V'_{4d}$ et $U_i = U'_i \times_{V'_i} V$. On obtient un diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} U_{4d} & \to \cdots \to & U_1 & \longrightarrow & U_o & \longrightarrow & X \\ & \searrow^{f_{4d}} & & \searrow^{f_1} & \downarrow f_o & & \downarrow f \\ & & & & V & \longrightarrow & S \end{array} ,$$

avec $U_o = f^{-1}(V)$, tel que les flèches

$$R^i f_{k+1!}\mathbb{Z}/n(d) \longrightarrow R^i f_{k!}\mathbb{Z}/n(d)$$

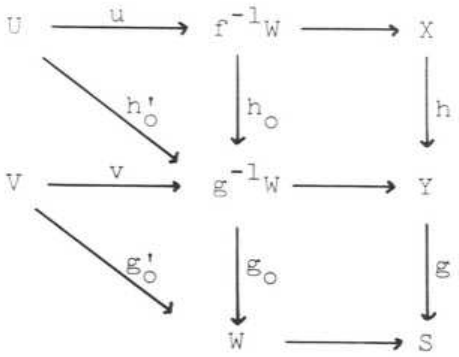
soient nulles et que la flèche

$$Tr : R^{2d} f_{4d!}\underline{\mathbb{Z}}/n(d) \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}}/n$$

soit un isomorphisme. D'après 2.14.2, le corollaire est vérifié pour $U = U_{4d}$.

Nous sommes prêt, maintenant, à prouver 2.14 par récurrence sur d. Le cas d = 0 est trivial et le cas d = 1 n'est autre que 1.4.7. Supposons donc $d \geq 2$.

Le problème étant de nature locale sur X et S, on peut supposer que f admet une factorisation f = gh, avec g et h lisses compactifiables, purement de dimension d' et d" et que d', $d'' < d = d' + d''$. Appliquons 2.14.4 à g et aux morphismes déduits de h par changement de base, de façon à obtenir un diagramme



tel que les morphismes (XVII 6.2.7.3) admettent des factorisations

$$Rh'_{o!}\mathbb{Z}/n(d'') \xrightarrow{Tr} \mathbb{Z}/n[-2d''] \xrightarrow{\Phi} Rh_{o!}\mathbb{Z}/n(d'')$$

$$Rg'_{o!}\mathbb{Z}/n(d') \xrightarrow{Tr} \mathbb{Z}/n[-2d'] \xrightarrow{\Psi} Rg_{o!}\mathbb{Z}/n(d')$$

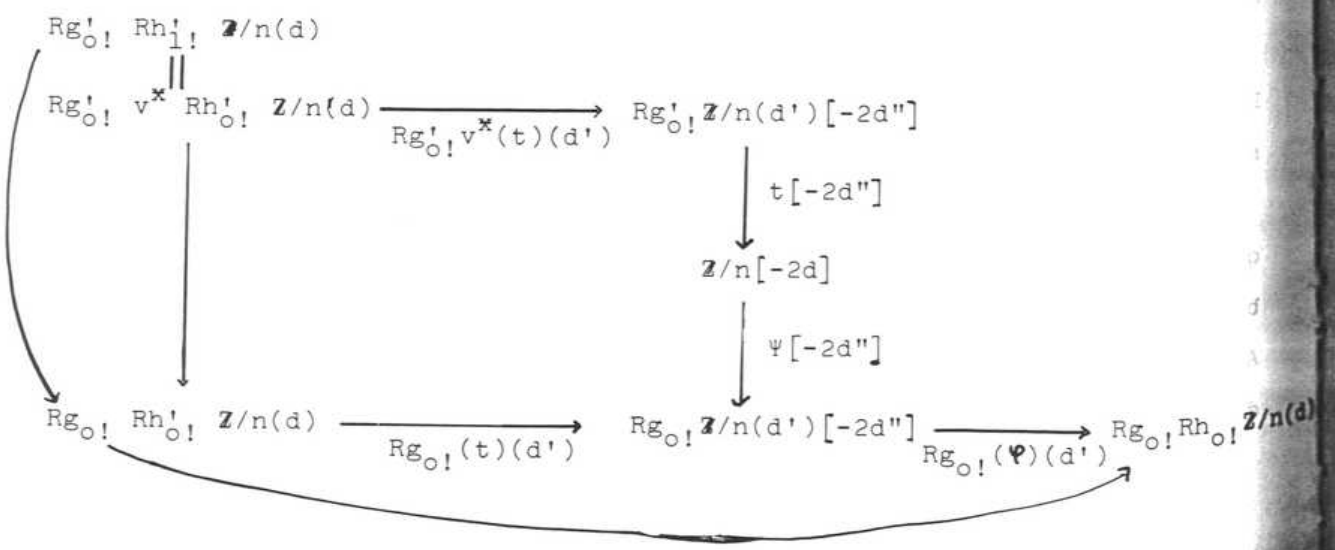
et que $Tr_{h'}$ et $Tr_{g'}$ soient des isomorphismes.

Soient $h_1$ et $h'_1$ les morphismes déduits de $h_o$ et $h'$ par le changement de base V, et soit $f' = g'_o h'_1$, $f_w = g_o h_o$ .

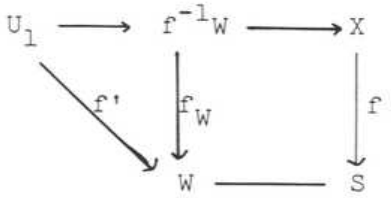
Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} Rf'\mathbb{Z}/n(d) & & \longrightarrow & & Rf_{W!}\mathbb{Z}/n(d) \\ \| & & & & \| \\ Rg'_{o!}\ Rh'_{1}\mathbb{Z}/n(d) & \longrightarrow & Rg_{o!}\ Rh'_{o!}\mathbb{Z}/n(d) & \longrightarrow & Rg_{o!}\ Rh_{o!}\mathbb{Z}/n(d) \end{array} ,$$

ainsi que le diagramme



Pour le diagramme




,

la flèche canonique de $Rf_!\mathbb{Z}/n(d)$ dans $Rf_W\mathbb{Z}/n(d)$ se factorise donc par $\mathbb{Z}/n[-2d]$ ; les flèches de $R^if_!\mathbb{Z}/n(d)$ dans $R^if_W\mathbb{Z}/n(d)$ sont donc nulles pour $i < 2d$. Enfin, $Tr_{f'}$ est un isomorphisme en tant que composé des isomorphismes $Tr_{g'_o}$ et $Rg'_o\ Tr_{h'_1}$.

Ceci achève la démonstration de 2.14.

## 3. Le théorème de dualité globale

### 3.1. Le foncteur $Rf^!$

Nous aurons besoin d'une variante des résolutions flasques canoniques.

Lemme 3.1.1. Soit X un schéma cohérent (i.e. quasi-compact quasi-séparé). Le foncteur lim induit une équivalence entre la catégorie des Ind-objets de la catégorie des faisceaux d'ensembles (resp. de groupes, resp. de groupes abéliens) constructibles et la catégorie des faisceaux d'ensembles (resp. de groupes Ind-finis, resp. abéliens de torsion).

Résulte de IX 2.7.2 et IX 2.7.3 .

3.1.2. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau abélien de torsion sur un schéma X, limite inductive filtrante de faisceaux constructibles $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$, et $X_o$ un ensemble conservatif de points de X. On définit la résolution flasque canonique modifiée de $\mathcal{F}$ par la formule

$$C^*_\ell(\mathcal{F}) = \varinjlim_i C^*(\mathcal{F}_i) \quad ,$$

où les $C^*(\mathcal{F}_i)$ sont les résolutions flasques canoniques de XVII 4.2.2 . D'après 3.1.1., pour X cohérent, cette définition ne dépend pas du choix des $\mathcal{F}_i$. Elle commute de plus à la localisation; ce fait permet de définir $C^*_\ell(\mathcal{F})$ par globalisation pour $\mathcal{F}$ faisceau de torsion sur un schéma X quelconque, non nécessairement cohérent.

Le complexe $C^*_\ell(\mathcal{F})$ est une résolution de $\mathcal{F}$, fonctorielle en $\mathcal{F}$, dont la formation commute à la localisation et aux limites inductives filtrantes; les foncteurs $C^n_\ell$ sont exacts.

Il en résulte que pour un faisceau d'anneaux $\mathcal{A}$ sur X, les foncteurs $C^n_\ell$ transforment $\mathcal{A}$-Modules en $\mathcal{A}$-Modules; ils transforment de même faisceaux de torsion en faisceaux de torsion. Il est bien connu que

**Lemme** 3.1.3. Soit $\mathcal{A}$ une $\mathcal{U}$-catégorie abélienne ayant un petit ensemble générateur et telle que les limites inductives indexées par un petit ensemble ordonné filtrant soient représentables dans $\mathcal{A}$, et soient exactes. Pour qu'un foncteur F de $\mathcal{A}^\circ$ dans (Ens) soit représentable, il faut et il suffit qu'il transforme petites limites inductives (quelconques) en limites projectives.

Cf. p.ex. SGA 4 I 8.12.5, où on ne suppose pas $\mathcal{A}$ abélienne ni les $\varinjlim$ filtrantes exactes.

On appliquera ce lemme à la catégorie $\mathrm{Mod}(X,\mathcal{A})$ des faisceaux de modules sur un site annelé $(X,\mathcal{A})$. Dans ce cas particulier, si le foncteur F est représenté par le faisceau $\underline{F}$, on a

(3.1.3.1) $$\underline{F}(U) = F(\mathcal{A}_U) \quad .$$

Cette description de $\underline{F}$ permet une vérification directe de 3.1.3 dans le cas considéré.

Rappelons que si $f : X \longrightarrow S$ est un morphisme compactifiable (XVII 3.2.), alors S est quasi-compact quasi-séparé (sic), et la dimension des fibres de f est bornée.

Théorème 3.1.4. Soient $f : X \longrightarrow S$ un morphisme compactifiable et $\mathcal{A}$ un faisceau d'anneaux de torsion sur S. Alors, le foncteur

(3.1.4.1) $$Rf_! : D(X,f^*\mathcal{A}) \longrightarrow D(S,\mathcal{A})$$

admet un adjoint à droite partiel

(3.1.4.2) $$Rf^! : D^+(S,\mathcal{A}) \longrightarrow D^+(X,f^*\mathcal{A}) :$$

pour $K \in \mathrm{Ob}\ D(X,f^*\mathcal{A})$ et $L \in \mathrm{Ob}\ D^+(S,\mathcal{A})$, on a un isomorphisme fonctoriel

(3.1.4.3) $$\mathrm{Hom}(Rf_!K,L) \simeq \mathrm{Hom}(K,Rf^!L) \quad .$$

Muni du morphisme de translation rendant commutatif le diagramme

(3.1.4.4)
$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}(Rf_!(K[1]),\ L) & \xleftarrow[\text{adj.}]{\sim} & \mathrm{Hom}(K[1], Rf^!L) & \simeq & \mathrm{Hom}(K,(Rf^!L)[-1]) \\ \Big\downarrow\Big\uparrow & & & & \Big\downarrow\Big\uparrow \\ \mathrm{Hom}(Rf_!K)[1],\ L) & \simeq & \mathrm{Hom}(Rf_!K, L[-1] & \xleftarrow[\text{adj.}]{\sim} & \mathrm{Hom}(K,\ Rf^!(L[-1])), \end{array}$$

ce foncteur $Rf^!$ est un foncteur triangulé.

N.B. La notation $Rf^!$ est abusive en ce que $Rf^!$ n'est en général pas le dérivé d'un foncteur $f^!$.

Démonstration Soit d un entier tel que toute fibre de f soit de dimension < d, et choisissons une compactification

$$\begin{array}{ccc} X & \xhookrightarrow{j} & \bar{X} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle \bar{f}} & \\ S & & \end{array} .$$

Si K est un complexe de $f^*\mathcal{A}$-Modules sur X, on a

$$Rf_!\ K \ \simeq\ R\bar{f}_*(j_!K) .$$

Pour tout faisceau F sur X, les composants $F^i$ du complexe $\tau_{\leqslant 2d} C^* j_! F$ vérifient

(3.1.4.5)
$$R^k\bar{f}_* F^i = 0 \text{ pour } k > 0 .$$

En effet, pour $i \neq 2d$, $F^i$ est limite inductive de faisceaux flasques, et pour $i = 2d$ et $k > 0$, on a (XVII 5.2.8.1)

$$R^k\bar{f}_* F^{2d} = R^{k+2d} f_! F = 0 .$$

Le complexe simple associé au double complexe résolution flasque canonique modifiée tronquée de K est une résolution de K. En vertu de (3.1.4.5), on a donc (notation de XVII 1.1.15)

(3.1.4.6)
$$R\bar{f}_*(j_!K) \xleftarrow{\sim} \bar{f}_*\ \tau''_{\leqslant 2d}\ C^*_{\ell}\ j_!K .$$

Désignons par $f_!^!$ le foncteur des faisceaux de modules sur X dans

les complexes de faisceaux sur S défini par

(3.1.4.7) $$f_!^*(F) = \bar{f}_* \tau_{\leqslant 2d} C_\ell^* j_! F \quad .$$

Lemme 3.1.4.8. (i) Les foncteurs $f_!^i$ sont exacts et commutent aux limites inductives filtrantes; on a $f_!^i = 0$ pour $i \notin [0,2d]$.

(ii) Le foncteur $f_!^*$, étant borné à composantes exactes, se dérive (XVII 1.2.10) trivialement en $Rf_!^*$ ou simplement $f_!^* : D(X, f^*\mathcal{A}) \longrightarrow D(S,\mathcal{A})$. La flèche 3.1.4.6 est un isomorphisme de foncteurs

$$Rf_!^* \xrightarrow{\sim} Rf_! \quad .$$

Les foncteurs $C_\ell^i$ sont exacts et commutent aux limites inductives filtrantes (3.1.2). Ils transforment tout faisceau en un faisceau acyclique. Les foncteurs $\bar{f}_*$ et $j_!$ commutent aux limites inductives filtrantes. On en déduit que

a) les foncteurs $\bar{f}_* C_\ell^i j_!$, donc aussi les foncteurs $f_!^i$, commutent aux limites inductives filtrantes;

b) pour $i < 2d$, les foncteurs $f_!^i = \bar{f}_* C_\ell^i j_!$ sont exacts. Pour $i = 2d$, on vérifie que $f_!^i$ est exact par (3.1.4.5).

Les assertions restantes de 3.1.4.8 sont triviales.

Remarque 3.1.4.9. La définition de $f_!^*$ est indépendante du faisceau d'anneau $\mathcal{A}$, et garde un sens pour tout faisceau abélien. L'assertion 3.1.4.8 (i) reste valable dans les catégories de faisceaux abéliens de torsion sur X et S.

D'après 3.1.4.8 et 3.1.3, le foncteur

$$f_!^i : \mathrm{Mod}(X, f^*\mathcal{A}) \longrightarrow \mathrm{Mod}(S,\mathcal{A})$$

a un adjoint à droite $f_i^!$; puisque $f_!^i$ est exact, $f_i^!$ transforme injectifs en injectifs.

Avec la convention de signe (XVII 1.1.12), les foncteurs $f_i^!$ forment un complexe de foncteurs exacts à gauche, nul en degré cohomologique $n \notin [-2d,0]$ :

(3.1.4.10) $\qquad f_!^! : \mathrm{Mod}(S,\mathcal{A}) \longrightarrow C^b(X,f^*\mathcal{A})$ .

Le foncteur $f_!^!$ se dérive (XVII 1.2.10) en un foncteur triangulé

(3.1.4.11) $\qquad Rf^! : D^+(S,\mathcal{A}) \longrightarrow D^+(X,f^*\mathcal{A})$ ,

adjoint à droite au foncteur $Rf_!$ ($=Rf_!^! = Lf_!^!$) ("formule triviale de dualité"). Plus précisément, si $I \in \mathrm{Ob}C^+(S,\mathcal{A})$ est un complexe de faisceaux injectifs de $\mathcal{A}$-modules, les $\mathcal{A}$-modules $f_i^! I^n$ sont injectifs, et on dispose d'un isomorphisme de triples complexes (XVII 1.1.12)

(3.1.4.12) $\qquad \mathrm{Hom}^\cdot(f_!^! K, I) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}^\cdot(K, f_!^! I)$ .

Passant au $H^0$ du complexe simple associé (calculé par produits), on obtient l'énoncé d'adjonction. On laisse au lecteur le soin de vérifier la compatibilité (3.1.4.4).

Remarque 3.1.5. Supposons que le foncteur $Rf^!$ soit d'amplitude cohomologique finie. D'après XVII 1.2.10 le foncteur $f_!^!$ admet alors un dérivé

(3.1.5.1) $\qquad Rf^! : D(S,\mathcal{A}) \longrightarrow D(X,\mathcal{A})$ .

Ce dérivé est encore adjoint à droite au foncteur $Rf_!$ (3.1.4.1). En effet, on a

$$\mathrm{Hom}_{D(S)}(Rf_!K,L) \simeq \varinjlim_{L \xrightarrow{\sim} L'} \mathrm{Hom}_{K(S)}(f_!^!K,L') \simeq \varinjlim_{\substack{K' \xrightarrow{\sim} K \\ L \xrightarrow{\sim} L'}} \mathrm{Hom}_{K(S)}(f_!^!K',L')$$

$$\mathrm{Hom}_{D(X)}(K,Rf^!L) \simeq \varinjlim_{K' \xrightarrow{\sim} K} \mathrm{Hom}_{K(X)}(K',Rf^!L) \simeq \varinjlim_{\substack{K' \xrightarrow{\sim} K \\ L \xrightarrow{\sim} L'}} \mathrm{Hom}_{K(X)}(K',f_!^!L')$$

et, par adjonction,

$$\mathrm{Hom}_{K(S)}(f_!^!K',L') = H^0\mathrm{Hom}(f_!^!K',L') \simeq H^0\mathrm{Hom}(K',f_!^!L') = \mathrm{Hom}_{K(X)}(K',L') \ .$$

Définition 3.1.6. Le foncteur triangulé

$$Rf^! : D^+(S,\mathcal{A}) \longrightarrow D^+(X,f^*\mathcal{A})$$

(ou, sous les hypothèses de 3.1.5 ,

$$Rf^! : D(S,\mathcal{A}) \longrightarrow D(X,f^*\mathcal{A}) \quad ),$$

adjoint à droite au foncteur $Rf_!$ (3.1.4.1) s'appelle le foncteur image inverse extraordinaire.

Proposition 3.1.7. Supposons le morphisme compactifiable $f : X \longrightarrow S$ de dimension relative $\leqslant d$.

(i) Si $L \in ObD^+(S,\mathcal{A})$ vérifie $H^i(L) = 0$ pour $i \leqslant k$, alors $H^iRf^!L = 0$ pour $i \leqslant k-2d$ .

(ii) Pour $L \in ObD^b(S,\mathcal{A})$, on a

$$\dim \text{inj } (Rf^!L) \leqslant \dim \text{inj } (L) .$$

Le foncteur $Rf^!$ est le dérivé droit de $f^!_\cdot : Mod(S,\mathcal{A}) \longrightarrow C^bMod(X,f^*\mathcal{A})$. L'assertion (i) résulte de ce que $(f^!_\cdot)^i = 0$ pour $i < -2d$, et l'assertion (ii) résulte de ce que $(f^!_\cdot)^i = 0$ pour $i > 0$, et que les foncteurs $f^!_i$ transforment injectif en injectif.

Proposition 3.1.8. Soit $f : X \longrightarrow S$ un morphisme compactifiable quasi-fini.

(i) Le foncteur $f_! : Mod(X,f^*\mathcal{A}) \longrightarrow Mod(S,\mathcal{A})$ admet un adjoint à droite $f^! : Mod(S,\mathcal{A}) \longrightarrow Mod(X,f^*\mathcal{A})$, et $Rf^!$ est le foncteur dérivé du foncteur $f^!$.

(ii) Si $f$ est une immersion fermée, alors $f^!$ est le foncteur "sections à support dans $X$ ".

(iii) Si $f$ est étale, alors $f^!$ s'identifie au foncteur $f^*$, avec

$$Tr_f : f_!f^*F \longrightarrow F$$

comme morphisme d'adjonction.

L'assertion (i) résulte aussitôt du cas particulier $d = 0$ de la démonstration de 3.1.4 : on $f^!_! = f_!$ et $f^!_\cdot = f^!$ . De façon équivalente, l'existence d'un foncteur adjoint $f^!$ résulte de 3.1.3 et de ce que $f_!$

est exact et commute aux limites inductives filtrantes; l'adjonction $(f_!, Rf^!)$ est une "formule triviale de dualité".

L'assertion (ii) est claire, et (iii) est XVII 6.2.

3.1.9. Soient $f : X \longrightarrow S$ un morphisme compactifiable, $\mathcal{A}$ un faisceau d'anneaux de torsion sur S, et annelons X par l'image réciproque de $\mathcal{A}$. Soient $K \in \mathrm{Ob}\ D^-(X, f^*\mathcal{A})$, $L \in \mathrm{Ob}\ D^+(X, f^*\mathcal{A})$ et représentons L par un complexe borné inférieurement de faisceaux injectifs, de sorte que

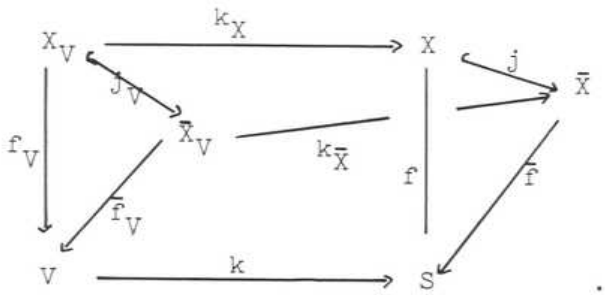
$$R\underline{\mathrm{Hom}}(K,L) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(K,L) \quad .$$

Le complexe Hom(K,L) est à composantes flasques, et donc

$$(3.1.9.1) \qquad Rf_*R\underline{\mathrm{Hom}}(K,L) \simeq f_*\underline{\mathrm{Hom}}(K,L) \quad .$$

Choisissons une compactification de f et un entier d comme dans la démonstration de 3.1.4, d'où un foncteur $f_!^!$ (3.1.4.7) .

(3.1.9.2)




Pour tout $V \in \mathrm{Ob}\ S_{et}$, on a un isomorphisme

$$(3.1.9.3) \qquad k^*f_!^! \xrightarrow{\sim} f_{V!}^!\, k_X^* \quad ,$$

de sorte que

$$\underline{\mathrm{Hom}}^\cdot(f_!^!K, f_!^!L)(V) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}^\cdot(f_{V!}^!(k_X^*K), f_{V!}^!(k_X^*L)) \quad .$$

La fonctorialité de $f_{V!}^!$ nous fournit

$$\underline{\mathrm{Hom}}^\cdot(K,L)(X_V) = \mathrm{Hom}^\cdot(k_X^*K, k_X^*L) \longrightarrow \mathrm{Hom}^\cdot(f_{V!}^!(k_X^*K), f_{V!}^!(k_X^*L)) \quad ,$$

d'où une flèche, au niveau des complexes,

$$(3.1.9.4) \qquad f_*\underline{\mathrm{Hom}}^\cdot(K,L) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}^\cdot(f_!^!K, f_!^!L) \quad .$$

D'après (3.1.9.1), cette flèche se dérive en

(3.1.9.5) $\quad Rf_* \, R\underline{Hom}(K,L) \longrightarrow R\underline{Hom}(Rf_!K, Rf_!L)$ .

Soient maintenant $K \in Ob\ D^-(X,\mathcal{A})$ et $L \in Ob\ D^+(S,\mathcal{A})$. La flèche d'adjonction de $Rf_!Rf^!L$ dans L et (3.1.9.4) fournissent une flèche composée

$$Rf_*R\underline{Hom}(K,Rf^!L) \longrightarrow R\underline{Hom}(Rf_!K, Rf_!Rf^!L) \longrightarrow R\underline{Hom}(Rf_!K,L) ,$$

forme locale sur S de l'isomorphisme d'adjonction :

(3.1.9.6) $\quad Rf_* \, R\underline{Hom}(K,Rf^!L) \longrightarrow R\underline{Hom}(Rf_!K,L)$ .

Proposition 3.1.10. La flèche 3.1.9.6 est un isomorphisme.

Soit $V \in Ob\ S_{et}$ et reprenons les notations de (3.1.9.2). L'isomorphisme ("de transitivité")

$$k_! \, Rf_{V!} \simeq Rf_! \, k_{X!} ,$$

dont l'existence est la racine de la théorie du foncteur $Rf_!$, se transpose en un isomorphisme de localisation (3.1.8.(iii))

(3.1.10.1) $\quad k_X^* \, Rf^! \simeq Rf_V^! k^*$ ,

représenté au niveau des complexes par un morphisme

$$k_X^* \, f_\cdot^! \longrightarrow f_{V\cdot}^! \, k^* .$$

Pour vérifier que 3.1.9.6 est un isomorphisme, il suffit de vérifier que pour tout $V \in Ob S_{et}$ , (3.1.9.6) induit un isomorphisme

(3.1.10.2) ; $\mathrm{Hom}(k_X^*K, k_X^*Rf^!L) \simeq H^0(V, Rf_*R\underline{Hom}(K,Rf^!L))$

$$\longrightarrow H^0(V, R\mathrm{Hom}(Rf_!K,L)) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(k^*Rf_!K, k^*L)$$

Pour V = X, ceci n'est autre que 3.1.4.3. Le cas général en résulte via la compatibilité suivante, que le rédacteur n'a pas vérifiée :

Lemme 3.1.10.3. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(k_X^*K, k_X^*Rf^!L) & \xrightarrow{(3.1.10.2)} & \mathrm{Hom}(k^*Rf_!K, k^*L) \\ \wr\downarrow (3.1.10.1) & & \wr\downarrow (\text{localisation}) \\ \mathrm{Hom}(k_X^*K, Rf_V^!k_X^*L) & \xleftarrow[\sim]{(3.1.4.3 \text{ sur } V)} & \mathrm{Hom}(Rf_!k^*K, k^*L) \end{array}$$

est commutatif.

3.1.11. Soient un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S' & \xrightarrow{g} & S \end{array} \quad , \tag{3.1.11.1}$$

avec f compactifiable, $\mathcal{A}$ un faisceau d'anneaux de torsion sur S, $\mathcal{B}$ un faisceau d'anneaux de torsion sur S' et M un complexe de $(f^*\mathcal{A}, \mathcal{B})$ - bimodules, borné supérieurement. On dispose alors, au niveau des complexes, d'un morphisme de foncteurs en K ($K \in \mathrm{Ob}C(X, f^*\mathcal{A})$)

$$M \otimes_{\mathcal{A}} g^*f_!^!K \longrightarrow f_!^!(f'^*M \otimes_{\mathcal{A}} g'^*K) \quad , \tag{3.1.11.2}$$

qui se transpose en un morphisme de foncteurs en L ($L \in \mathrm{Ob}C(S', \mathcal{B})$)

$$g_*' \, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{B}}(f'^*M, f'^!L) \longrightarrow f^!g_*\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(M, L) \quad . \tag{3.1.11.3}$$

Ce morphisme se dérive en morphisme de foncteurs en L, de $D^+(S', \mathcal{B})$ dans $D^+(X, f^*\mathcal{A})$ :

$$Rg_*' \, R\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{B}}(f'^*M, Rf'^!L) \longrightarrow Rf^!Rg_*R\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(M, L) \quad , \tag{3.1.11.4}$$

qui rend commutatif le diagramme suivant, où $K \in \mathrm{Ob}\, D^-(X, f^*\mathcal{A})$ et $L \in \mathrm{Ob}\, D^+(S', \mathcal{B})$ :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}(K, Rg_*'R\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{B}}(f'^*M, Rf'^!L)) & \xrightarrow{①} & \mathrm{Hom}(K, Rf^!Rg_*R\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{B}}(M, L)) & \xleftrightarrow[\text{adj}]{} & \mathrm{Hom}(Rf_!K, Rg_*R\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(M, L)) \\ \updownarrow & & & & \updownarrow \\ \mathrm{Hom}(g'^*K, R\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(f'^*M, Rf'^!L)) & & & & \mathrm{Hom}(g^*Rf_!K, R\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(M, L)) \\ \updownarrow & & & & \updownarrow \\ \mathrm{Hom}(f'^*M \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{A}} g'^*K, Rf'^!L) & \xleftrightarrow[\text{adj}]{} & \mathrm{Hom}(Rf_!^!(f'^*M \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{A}} g'^*K), L) & \xrightarrow{②} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(M \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{A}} g^*Rf_!K, L) \end{array} \quad .$$

Dans ce diagramme, ② (déduit de la flèche XVII 5.2.2.1) est un isomorphisme (XVII 5.2.6). La flèche ① est donc un isomorphisme quel que soit K, et ceci implique que (3.1.11.4) soit un isomorphisme.

Le théorème de changement de base pour un morphisme propre se transpose donc en la

Proposition 3.1.12. La flèche 3.1.11.4 est un isomorphisme.

On appelle cet isomorphisme l'isomorphisme d'induction.

En voici 3 cas particuliers.

Corollaire 3.1.12.1. Soient $f : X \longrightarrow S$ un morphisme compactifiable, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux faisceaux d'anneaux de torsion sur S, et $\varphi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ un homomorphisme. Désignons par $\rho$ la restriction des scalaires de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{A}$. On a alors, pour $K \in \mathrm{Ob}\ D^+(S,\mathcal{B})$

$$\rho Rf^! K \xrightarrow{\sim} Rf^!(\rho K) \quad .$$

Il suffit dans 3.1.11.3 de prendre S = S', X = X', $\mathcal{A} = \mathcal{A}$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}$, $M = \mathcal{A}$.

On voit donc que le faisceau d'anneaux joue un rôle bidon dans la construction de $Rf^!$.

Corollaire 3.1.12.2. Soient $f : X \longrightarrow S$ un morphisme compactifiable, $\mathcal{A}$ un faisceau d'anneaux de torsion sur S et $K \in \mathrm{Ob}\ D^-(S,\mathcal{A})$, $L \in \mathrm{Ob}\ D^+(S,\mathcal{A})$. On a la formule d'induction

$$R\underline{\mathrm{Hom}}(f^*K, Rf^!L) \xrightarrow{\sim} Rf^! R\underline{\mathrm{Hom}}(K,L)$$

(faire S = S', X = X') .

Corollaire 3.1.12.3. Pour tout carré 3.1.11, et tout $L \in \mathrm{Ob}\ D^+(S',\mathcal{A})$, on a

$$Rg'_* Rf'^! L \xrightarrow{\sim} Rf^! Rg_* L$$

(faire $\mathcal{B} = f^*\mathcal{A} = M$) .

3.1.13. Pour un composé gh de morphismes S-compactifiables

$$X \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{g} Z$$

l'isomorphisme de composition

$$c_{g,h} : Rg_! \, Rh_! \xrightarrow{\sim} R(gh)_!$$

se transpose en un morphisme de composition

(3.1.13.1) $$c'_{g,h} : Rh^! \, Rg^! \xrightarrow{\sim} R(gh)^!$$

vérifiant la condition de cocycle habituelle pour un composé triple. En d'autres termes, les catégories $D^+(X, f^*\mathcal{A})$ forment les fibres d'une catégorie fibrée et cofibrée sur la catégorie d'objets les S-schémas $f : X \longrightarrow S$, ayant pour flèches les morphismes S-compactifiables, les foncteurs image directe (resp. image réciproque) étant les foncteurs $Rf_!$ (resp. $Rf^!$). Pour tout carré commutatif de morphismes compactifiables,

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g} & X \\ \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S' & \xrightarrow{g'} & S \end{array} ,$$

on dispose donc d'un morphisme de cochangement de base (XVII 2.1.3 )

(3.1.13.2) $$ch^! : Rf'_! \, Rg^! \longrightarrow Rg^! \, Rf_! \quad .$$

3.1.14. Soit un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S' & \xrightarrow{g} & S \end{array}$$

avec f compactifiable, et soit $\mathcal{A}$ un faisceau d'anneaux de torsion sur S. On annèle S', X et X' par les images réciproques de $\mathcal{A}$, encore

désignées par $\mathcal{A}$ par abus de notation. L'isomorphisme de changement de base

$$g^{*}Rf_{!} \xrightarrow{\sim} Rf'_{!}g'^{*} \tag{3.1.14.1}$$

permet de considérer les catégories $D(S,\mathcal{A})$, $D(X,\mathcal{A})$, $D(S',\mathcal{A})$ et $D(X',\mathcal{A})$ comme les fibres d'une catégorie cofibrée sur la catégorie du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \longleftarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longleftarrow & X \end{array} ,$$

les foncteurs images directes étant les foncteurs $Rf_{!}$, $Rf'_{!}$, $g^{*}$ et $g'^{*}$ (sic). Lorsqu'on se restreint aux catégories $D^{+}$, on obtient même une catégorie fibrée et cofibrée sur ce diagramme, les foncteurs images directes étant les foncteurs $Rf^{!}$, $Rf'^{!}$, $Rg_{*}$ et $Rg'_{*}$ (sic). On en déduit

a) un "isomorphisme de transitivité" (sic) pour les foncteurs "images inverses"

$$Rg_{*}\, Rf^{!} \xrightarrow{\sim} Rf^{!}\, Rg_{*}$$

déjà obtenu en 3.1.12.3 (avec la même définition par transposition de (3.1.14.1).

b) un "morphisme de changement de base" (XVII 2.1.3 )

$$g'^{*}\, Rf^{!} \longrightarrow Rf'^{!}\, g^{*} \tag{3.1.14.2}$$

qui, d'après loc. cit., peut se décrire des deux façons suivantes :

a) par adjonction, se donner un morphisme (3.1.14.2) revient à se donner un morphisme

$$Rf'_{!}\, g'^{*}\, Rf^{!} \longrightarrow g^{*} \quad .$$

Le théorème de changement de base fournit un tel morphisme comme composé

$$Rf'_{!}\, g'^{*}\, Rf^{!} \xleftarrow{\sim} g^{*}\, Rf_{!}\, Rf^{!} \xrightarrow{g^{*} * \text{adj.}} g^{*} \quad .$$

b) par adjonction, se donner un morphisme (3.1.14.2) revient à se donner un morphisme

$$Rf^! \longrightarrow Rg'_* Rf'^! g^* \quad .$$

L'isomorphisme (3.1.12.3) fournit un tel morphisme comme composé

$$Rf^! \xrightarrow[Rf^!* \text{ adj.}]{} Rf^! Rg_* g^* \xleftarrow{\sim} Rg'_* Rf'^! g^* \quad .$$

D'après leurs interprétations en terme de catégorie fibrée et cofibrée, il est clair que les morphismes (3.1.12.3), (3.1.13.2) et (3.1.14.2) vérifient chacun deux compatibilité du type XII 4.4 pour f ou g composé de deux morphismes.

Les résultats de topologie générale qui suivent seront utilisés au n° suivant.

3.1.15. Soit $f : X \longrightarrow S$ un morphisme de sites. Désignons par $\Gamma(f)$ le site suivant

a) La catégorie $\Gamma(f)$ est la catégorie des triples $(U,V,\varphi)$ avec

$$U \in Ob(X), \quad V \in Ob\ S, \qquad \varphi \in Hom(X, \varphi^* V) \quad .$$

b) Une famille de morphismes $(u_i, v_i) : (U_i, V_i, \varphi_i) \longrightarrow (U,V,\varphi)$ est couvrante si, dans X, les morphismes $u_i : U_i \longrightarrow U$ couvrant U.

On a alors

(3.1.15.1) Le foncteur de $\Gamma(f)$ dans X donné par

$$(U,V,\varphi) \longmapsto U$$

est une équivalence de sites $\gamma : X \longrightarrow \Gamma(f)$ .

(3.1.15.2) Le foncteur $f^*_\Gamma$ de S dans $\Gamma(f)$

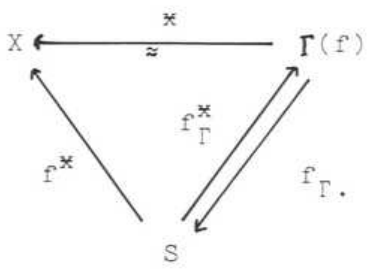
$$V \longmapsto (f^* V, V, Id_{f^* V})$$

est un morphisme de site, noté $f_\Gamma : \Gamma(f) \longrightarrow S$, ou simplement f par abus de notation. Il vérifie $f_\Gamma \gamma = f$ . Le foncteur $f^*_\Gamma$ admet un adjoint à droite $f_{\Gamma *}$ :

$$f_{\Gamma *} : (U,V,\varphi) \longmapsto V \quad .$$

Le foncteur $f_{\Gamma .}$ est donc un comorphisme de site de $\Gamma(f)$ dans S, et définit le même morphisme de topos que le morphisme de site $f_{\Gamma}$ .

(3.1.15.3)




On en déduit la règle suivante pour calculer l'image inverse d'un faisceau

(3.1.15.4) Soient $\mathcal{F}$ un faisceau sur S, $f_{\Gamma}^{!}\mathcal{F}$ le préfaisceau sur $\Gamma(f)$ donné par

$$f_{\Gamma}^{!}\mathcal{F}(U,V,\varphi) = \mathcal{F}(V) \quad ,$$

et $af_{\Gamma}^{!}\mathcal{F}$ le faisceau engendré. Alors

$$f^{*}\mathcal{F}(U) \simeq af_{\Gamma}^{!}\mathcal{F}(U,V,\varphi) \quad .$$

3.1.16. Soient $f : X \longrightarrow S$ un morphisme de sites, $\mathcal{A}$ un faisceau d'anneaux sur S, $\mathcal{B}$ un faisceau d'anneaux sur X et d un entier. Soit un objet K du type suivant

(3.1.16.1) K associe à chaque objet U de X un complexe K(U) de $(\mathcal{A}, f_{*}(\mathcal{B}|U))$ -modules sur S, nul en degré $> d$, et K(U) est un foncteur covariant de U.

Pour tout faisceau de $\mathcal{A}$-modules $\underline{F}$ sur S, on désignera par $K^{!}\underline{F}$ le complexe de faisceaux sur X engendré par le complexe de préfaisceaux de $\mathcal{B}$-modules :

$$U \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(K(U), \underline{F}) \quad .$$

On désignera par $RK^{!}$ le dérivé de $K^{!}$

$$RK^{!} : D^{+}(S,\mathcal{A}) \longrightarrow D^{+}(X,\mathcal{B}) \quad .$$

Si $U : K_1 \longrightarrow K_2$ est un morphisme d'objets (3.1.11.1), alors U in-

duit des morphismes de foncteurs

$$ {}^t u : K_2^! \longrightarrow K_1^! \quad \text{et} \quad RK_2^! \longrightarrow RK_1^! \quad . $$

Sous les hypothèses précédentes, on a

Proposition 3.1.17. (i) Pour tout point x de X et pour tout $L \in \mathrm{Ob}\ D^+(S,\mathcal{A})$, on a, désignant par V(x) la catégorie des voisinages de x

$$ (3.1.17.1) \qquad \underline{H}^n(RK^!L)_x \simeq \varinjlim_{U \in \mathrm{Ob}V(x)} \mathrm{Ext}^n(K(U),L) \quad . $$

(ii) On a donc une suite spectrale

$$ (3.1.17.2) \qquad E_2^{pq} = \varinjlim_{U \in \mathrm{Ob}V(x)} \mathrm{Ext}^p(\underline{H}^{-q}(K(W)),L) \Longrightarrow \underline{H}^n(K^!L)_x \quad . $$

(iii) Si $X^\circ$ est un ensemble conservatif de points de X, et $u : K_1 \longrightarrow K_2$ un morphisme d'objets (3.1.11.1), alors, pour que

$$ {}^t u : RK_2^! \longrightarrow RK_1^! $$

soit un isomorphisme, il faut et il suffit que pour tout n et tout $x \in X^\circ$, le morphisme de pro-objets de Mod(S,$\mathcal{A}$)

$$ (3.1.17.3) \qquad u_x : \text{"}\varprojlim_{U \in \mathrm{Ob}V(x)}\text{"}\ \underline{H}^n K_1(U) \longrightarrow \text{"}\varprojlim_{U \in \mathrm{Ob}V(x)}\text{"}\ \underline{H}^n K_2(U) $$

soit un isomorphisme.

Pour prouver (i), on prend pour L un complexe d'injectifs, de sorte que (3.1.17.1) est trivial; il est clair que (i)$\Longrightarrow$(ii).

Que la condition (3.1.17.3) de (iii) soit suffisante résulte aussitôt de (3.1.17.2). Nous n'aurons pas à faire usage de ce qu'elle est nécessaire. Si ${}^t u$ est un isomorphisme, alors, d'après (3.1.16.1), pour tout faisceau injectif I sur (S,$\mathcal{A}$), on a

$$ \mathrm{Hom}(\text{"}\varprojlim_{V(x)}\text{"}\ \underline{H}^n\ K_2(U),\ I) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\text{"}\varprojlim_{V(x)}\text{"}\ \underline{H}^n\ K_1(U),\ I) \quad , $$

et on conclut en notant que dans toute catégorie abélienne ayant assez d'injectifs (ici, Mod(S,$\mathcal{A}$)), les foncteurs Hom(x,I) pour I injectif de $\mathcal{A}$ forment un système conservatif de foncteurs sur Pro($\mathcal{A}$).

Exemple 3.1.18. Soient $f : X \longrightarrow S$ un morphisme compactifiable de schémas, et $\mathcal{A}$ un faisceau d'anneaux de torsion sur S. On annèle X par $f^*\mathcal{A}$. Choisissons un entier d qui majore la dimension des fibres de f, ainsi qu'une compactification de f, et posons (3.1.4.7))

(3.1.18.1) $$K(U) = f_!^!((f^*\mathcal{A})_U) \quad .$$

D'après la formule (3.1.3.1) pour l'adjoint de $f_!^!$, on a un isomorphisme

(3.1.18.2) $$f_!^! \simeq K^! : \mathrm{Mod}(S,\mathcal{A}) \longrightarrow C^b\mathrm{Mod}(X,f^*\mathcal{A}) \quad .$$

et donc

(3.1.18.3) $$Rf^! = RK^! : D^+(S,\mathcal{A}) \longrightarrow D^+(X,f^*\mathcal{A}) \quad .$$

Exemple 3.1.19. Soient $f : X \longrightarrow S$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et d comme en 3.1.16. Soit K un objet de type suivant

(3.1.19.1) Pour tout $W = (U,V,\varphi) \in \mathrm{Ob}\Gamma(f)$ (3.1.15), K(W) est un complexe de $(\mathcal{A}_V, \varphi_*B|U)$-Modules sur V, fonctoriel en W : pour tout morphisme $(u,v) : W_1 = (U_1,V_1,\varphi_1) \quad W_2 = (U_2,V_2,\varphi_2)$ il est donné

$$K(u,v) : K(W_1) \longrightarrow v^*K(W_2) \quad , \quad \text{i.e.}$$

$$K(u,v) : v_!K(W_1) \longrightarrow K(W_2) \quad .$$

A tout objet K (3.1.19.1) est associé un objet K' (3.1.16.1) relatif à $f_\Gamma : \Gamma(f) \longrightarrow S$, donné par

(3.1.19.2) $$K'(U,V,\varphi) = j_! K(U,V,\varphi)$$

pour j "morphisme d'inclusion" de V dans S. On pose

$$K^! \underset{\text{defn}}{=} K'^! \quad \text{et} \quad RK^! \underset{\text{defn}}{=} Rk'^! \quad .$$

Exemple 3.1.20. Avec les notations de 3.1.19, faisons $\mathcal{B} = f^*\mathcal{A}$ et posons

(3.1.20.1) $$K(U,V,\varphi) = \mathcal{A}_V \quad \text{(en degré 0)}$$

D'après 3.1.15.4, on a alors des isomorphismes de foncteurs

(3.1.20.2) $\qquad K^! \simeq f^*$

(3.1.20.3) $\qquad RK^! \simeq f^*$ .

3.2. Dualité de Poincaré.

3.2.1. Soit f un morphisme plat compactifiable purement de dimension relative d (ou, plus généralement, vérifiant la condition $(^*)_d$ de 2.9) :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\ j\ } & \bar{X} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle \bar{f}} & \\ S & & \end{array} \quad .$$

Soit n un entier $\geqslant 1$ inversible sur S et supposons S annelé par un faisceau d'anneaux $\mathcal{A}$ tel que $n\mathcal{A} = 0$. D'après 3.1.18, le foncteur $Rf^! : D^+(S,\mathcal{A}) \longrightarrow D^+(X,\mathcal{A})$ peut se calculer par le procédé de 3.1.16, pour K donné par (3.1.18.1).

Soit K' le foncteur du type (3.1.19.1) qui à $(U,V,\varphi) \in \mathrm{Ob}\Gamma(f)$ associe le complexe de faisceaux $\mathbb{Z}/n(-d)[-2d]$ sur V, réduit $\mathbb{Z}/n(-d)$ placé en degré 2d, et soit K" l'objet du type (3.1.16.1) correspondant (3.1.19.2), relatif à $f : \Gamma(f) \longrightarrow S$.

On peut regarder K et K" comme des objets 3.1.16.1 relatif à $\Gamma(f) \longrightarrow S$. De plus, pour tout $(U,V,\varphi) \in \mathrm{Ob}\Gamma(f)$, le morphisme trace 2.9 définit un morphisme de faisceaux sur V

$$\mathrm{Tr} : R^{2d}\varphi_! \mathbb{Z}/n \longrightarrow \mathbb{Z}/n(-d) \quad ,$$

d'où, désignant par j le morphisme de V dans S, un morphisme de foncteurs

(3.2.1.1) $\quad K(U) = \bar{f}_* \tau_{\leqslant 2d}\, C^*_\ell\, \mathbb{Z}/n_U \longrightarrow \underline{H}^{2d}(K(U))[-2d] \simeq$

$$R^{2d}f_!(\mathbb{Z}/n)_U \simeq j_!\, R^{2d}\varphi_!\, \mathbb{Z}/n \xrightarrow{\mathrm{Tr}_\varphi} j_!\mathbb{Z}/N(-d) = K"(U,V,\varphi)) \cdot$$

Une forme tordue de 3.1.20 montre que

$$RK''^{!} = Rf^{*}(d)[2d] \quad .$$

D'après 3.1.16, on dispose donc d'un morphisme composé

(3.2.1.2) $\qquad t_f : Rf^{*}(d)[2d] \simeq RK''^{!} \longrightarrow Rk^{!} \simeq Rf^{!} \quad .$

Remarque 3.2.2. Si le foncteur $Rf^{!}$ est de dimension cohomologique finie, alors t est encore défini en tant que morphisme entre foncteurs de $D(S,\mathcal{A})$ dans $D(X,f^{*}\mathcal{A})$, (définition en 3.1.5).

On dispose d'une autre méthode pour construire une flèche (3.2.1.2), par adjonction à partir de (2.13.2)

$$Tr : Rf_{!}(f^{*}L(d)[2d]) \longrightarrow L \quad .$$

Ces deux flèches coïncident :

Lemme 3.2.3. Pour $L \in Ob D^{+}(S,\mathcal{A})$ (resp. $D(S,\mathcal{A})$ si le foncteur $Rf^{!}$ est de dimension cohomologique finie), le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Rf_{!}(f^{*}L(d)[2d]) & \xrightarrow{Rf_{!}(t_f)} & Rf_{!}\, Rf^{!}L \\ \downarrow{\scriptstyle Tr_f} & & \downarrow{\scriptstyle \text{adjonction}} \\ L & = & L \end{array}$$

est commutatif.

Donnons tout d'abord une variante de la définition de t, en termes du foncteur $f_{\cdot}^{!}$ (3.1.9.10). Soient $U \in Ob X_{et}$, $V \in Ob S_{et}$ et $\varphi \in Hom_{f}(U,V)$. Par définition,

$$f_{\cdot}^{!}(L)\,(U) = Hom(f_{!}\mathcal{A}_{U}, L) \quad ;$$

le morphisme trace définit un morphisme

$$Tr_f : f_{!}\mathcal{A}_{U} \longrightarrow \mathcal{A}_{V}(-d)[-2d]$$

qui se transpose en

$$t_\varphi : f_{\cdot}^{!}(L)\,(U) \longleftarrow L(d)[2d](V).$$

Les morphismes $t_\varphi$ définissent un morphisme

$$t_f : f^*L(d)[2d] \longrightarrow f^!L$$

dont au laisse au lecteur le soin de vérifier que, dans la catégorie dérivée, il coïncide avec (3.2.1.2). Cette description montre que les diagrammes suivants sont commutatifs au niveau des complexes, pour L complexe de Modules :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}^{\cdot}(\mathcal{A}_V, L) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}^{\cdot}(f^*\mathcal{A}_V(d)[2d], f^*L(d)[2d]) \\ \downarrow \mathrm{Tr}_f & & \downarrow t_f \\ \mathrm{Hom}(f_!f^*\mathcal{A}_V(d)[2d], L) & \simeq & \mathrm{Hom}^{\cdot}(f^*\mathcal{A}_V(d)[2d], f^!L) \end{array} .$$

Par fonctorialité des flèches de ce diagramme en $\mathcal{A}_V$, on déduit que pour tout faisceau, ou tout complexe de faisceaux K, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}^{\cdot}(K,L) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}^{\cdot}(f^*K(d)[2d], f^*L(d)[2d] \\ \downarrow \mathrm{Tr}_f & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}^{\cdot}(f_!f^*K(d)[2d], L) & \xleftrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}^{\cdot}(f^*K(d)[2d], f^!L) \end{array} .$$

Prenant K = L et Id : L⟶L, on trouve 3.2.3 au niveau des complexes.

Je serais reconnaissant à toute personne ayant compris cette démonstration de me l'expliquer.

3.2.4. On déduit aussitôt de ce lemme et de la définition (3.1.13) des isomorphismes de composition par adjonction que si f est le composé de deux morphismes plats de présentation finie compactifiables et purement de dimension relative $d_1$ et $d_2$ : f = gh, et si $d = d_1 + d_2$, alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} h^*(g^*L(d_2)[2d_2])(d_1)[2d_1]) & \xrightarrow{\sim} & (gh)^*L(d)[2d] \\ \downarrow{\scriptstyle t_h{}^*t_g} & & \downarrow{\scriptstyle t_{gh}} \\ Rh^!\ Rg^!\ L & \xrightarrow{\sim} & R(gh)^!L \end{array}$$

est commutatif.

Théorème 3.2.5. (dualité de Poincaré). Soient $f : X \longrightarrow S$ un morphisme lisse compactifiable (S est donc quasi-compact quasi-séparé(sic)), d la fonction localement constante sur X "dimension relative de f ", $n \geqslant 1$ un entier inversible sur S, et $\mathcal{A}$ un faisceau d'anneaux sur S vérifiant $n\mathcal{A} = 0$. Alors le foncteur

$$Rf_! : D(X,f^*\mathcal{A}) \longrightarrow D(S,\mathcal{A})$$

admet pour adjoint à droite le foncteur de $D(S,\mathcal{A})$ dans $D(X,f^*\mathcal{A})$ :

$$K \longmapsto f^*K(d)[2d]$$

avec le morphisme (2.13.2)

$$Tr_f : Rf_!\ f^*K(d)[2d] \longrightarrow K$$

pour flèche d'adjonction :

$$Hom(K,f^*L(d)[2d]) \xrightarrow{\sim} Hom(Rf_!K,L) \quad .$$

Démonstration. On se ramène au cas d constant. D'après la description 3.2.1 de la flèche $t_f$ (3.2.1.2), le théorème 2.14, joint au critère 3.1.17. (iii), implique que la flèche $t_f$ est un isomorphisme (pour $L \in D^+(S,\mathcal{A})$)

$$t_f : f^*L(d)[2d] \xrightarrow{\sim} Rf^!L \quad .$$

En particulier, le foncteur $Rf^!$ est de dimension cohomologique finie, donc est défini sur la catégorie dérivée entière. Le morphisme $t_f$ reste un isomorphisme pour $L \in D(S,\mathcal{A})$.

Par définition, $Rf^!$ est l'adjoint à droite du foncteur $Rf_!$ ; d'après 3.2.3, la flèche d'adjonction de $Rf_! Rf^! K$ dans K s'identifie, via $t_f$, à $Tr_f$, et ceci achève la démonstration de 3.2.5.

On identifiera dorénavant à l'aide de $t_f$ les foncteurs $f^*L(d)[2d]$ et $Rf^!L$.

3.2.6. Soient S le spectre d'un corps algébriquement clos k, X un schéma compactifiable et lisse sur k purement de dimension relative d, n un entier inversible dans k et F un faisceau de $\mathbb{Z}/n$-modules localement constant constructible, i.e. un "système de coefficients" tué par n. Désignant par $^\vee$ un $\mathbb{Z}/n$-dual, on a

$$R\underline{\mathrm{Hom}}(F,\mathbb{Z}/n) = F^\vee \quad \text{(en degré 0)} \quad .$$

Cette formule résulte de ce que $\mathbb{Z}/n$ est un $\mathbb{Z}/n$-module injectif. L'isomorphisme 3.2.5.1, ou,plutôt l'isomorphisme qui s'en déduit

$$R\Gamma\, R\underline{\mathrm{Hom}}(F,\mathbb{Z}/n(d)[2d]) \xrightarrow{\sim} \mathrm{RHom}(R\Gamma_c(F),\mathbb{Z}/n) \quad ,$$

s'écrit donc ici

(3.2.6.1) $$R\Gamma\,(F^\vee(d)[2d]) \xrightarrow{\sim} \mathrm{RHom}(R\Gamma_c(F),\mathbb{Z}/n) \quad .$$

Passant aux groupes de cohomologie, et utilisant à nouveau que $\mathbb{Z}/n$ est un $\mathbb{Z}/n$-module injectif, ceci donne

(3.2.6.2) $$H^{2d-i}(X,F^\vee(d)) \xrightarrow{\sim} H^i_c(X,F)^\vee \quad ,$$

qui est la forme habituelle de la dualité de Poincaré.

## Bibliographie

J. GIRAUD [1] Cohomologie non abélienne. Columbia university.

A. GROTHENDIECK [1] Le groupe de Brauer III. dans : dix exposés sur la cohomologie des schémas. North Holl. Publ. Co.

L. ILLUSIE [1] Thèse

D. MUMFORD [1] Geometric invariant theory. Springer-Verlag 1965.

M. RAYNAUD [1] Faisceaux amples sur les schémas en groupes et les espaces homogènes. Lecture notes in math. 119. Springer-Verlag.

J.P. SERRE [1] Groupes algébriques et corps de classe.Publ. Inst. Math. Nancago. Hermann 1959.

J.L. VERDIER [1] Dualité dans la cohomologie des espaces localement compacts. Sém. Bourbaki 300. Nov. 1965.

J.L. VERDIER [1] A duality theorem in the etale cohomology of schemes. Woods-hole seminar on alg.geometry. July 1964.

[C.D.] Catégories dérivées, par J.L. VERDIER. Notes miméographiées par l'IHES.

E X P O S E XIX

# Cohomologie des préschémas excellents d'égales caractéristiques.

par M. ARTIN

Sommaire.

1. Pureté pour l'anneau $k[[x_1, \cdots, x_n]]$ .

2. Le cas d'un anneau strictement local.

3. Pureté.

4. Acyclicité locale d'un morphisme régulier.

5. Théorème de finitude.

6. Dimension cohomologique des morphismes affines.

7. Morphismes affines - fin de la démonstration.

Dans cet exposé on développe la théorie de la cohomologie étale pour les préschémas excellents (EGA IV 7.8.1 ) d'égales caractéristiques, en admettant le théorème de résolution des singularités

pour de tels préschémas, sous la forme suivante :

Soit $X = \operatorname{Spec} A$ un schéma local excellent d'égales caractéristiques, et soit $U \subset X$ un ouvert régulier. Il existe un morphisme propre et birationnel $f : X' \longrightarrow X$ et une immersion ouverte $U \longrightarrow X'$ au-dessus de $X$ tel que $X'$ soit régulier et que $Y = X - U$ soit partout de codimension 1, à intersections transversales.

Les démonstrations sont donc valables, "pour l'instant", seulement en caractéristique zéro [4] . On pourrait aussi en déduire des résultats pour les préschémas de caractéristique $p > 0$ dans les basses dimensions [1] .

Sous l'hypothèse de résolution, on obtiendra des résultats plus ou moins satisfaisants pour les préschémas d'égales caractéristiques et pour les coefficients premiers à la caractéristique (cf. 3.2 , 4.1 , 5.1 , 6.1) . Par contre, on ne connaît presque rien sur la cohomologie des préschémas généraux d'inégales caractéristiques, même en dimension 2, où on dispose de la résolution [2] . Par exemple, on ne connaît le théorème de pureté 2.1 pour aucun anneau complet d'inégales caractéristiques de dimension $> 1$ . Ce résultat, pour les anneaux de séries formelles $k[[x_1, \ldots, x_n]]$ (1.2), est un des outils principaux dans la théorie. Notons d'ailleurs que pour la démonstration de 1.2 , on ne se sert pas du théorème de résolution. Ce théorème est donc démontré en caractéristique quelconque.

On va utiliser souvent sans mention explicite les propriétés

des schémas excellents qui sont développés dans EGA IV 7.8 , tels que la stabilité par rapport aux extensions de type fini (EGA IV 7.8.3 (ii)) et par rapport aux localisations strictes. Ce dernier fait résulte de la résolution et de EGA IV 7.9.5 .

## 1. Pureté pour l'anneau $k[[x_1, \ldots, x_n]]$ .

Rappelons le corollaire suivant de XVI 3.7 :

Corollaire 1.1 . Soit A un anneau strictement local, et notons $A\{x\}$ le localisé strict de $A[x]$ en l'idéal premier engendré par rad A et x . Soit $U = \operatorname{Spec} A\{x\}[1/x]$ . Alors pour n premier à la caractéristique résiduelle de A , on a

$$H^q(U, \mu_n) \simeq \begin{cases} \mu_n(A) & \text{si} \quad q = 0 \\ \mathbb{Z}/n & \text{si} \quad q = 1 \\ 0 & \text{si} \quad q > 1 \end{cases} .$$

En effet, soit $X = \operatorname{Spec} A[x]$ , et $Y = V(x)$ le lieu des zéros de x dans X . Alors (Y,X) est un couple lisse (XVI 3.1) au-dessus de Spec A . D'après (V 4, VIII 5), $H^q(U, \mu_n)$ s'identifie à la fibre du faisceau $\underline{H}^{q+1}_Y(X, \mu_n)$ en un point géométrique au-dessus du point (rad A, x) de X , et le corollaire résulte donc immédiatement de (XVI 3.7). Notons que $\mu_n$ , $\mathbb{Z}/n$ sont tous les deux des groupes cycliques d'ordre n . On les a mis ici pour donner les

formules canoniques (cf. 3.4).

Théorème 1.2 . Soit $k$ un corps séparablement clos, et $U = \mathrm{Spec}\, k[[x_1, \ldots, x_r]][1/x_r]$ . Alors pour $n$ premier à la caractéristique de $k$ , on a

$$H^q(U, \mu_n) = \begin{cases} \mu_n(A) & \text{si} \quad q = 0 \\ \mathbb{Z}/n & \text{si} \quad q = 1 \\ 0 & \text{si} \quad q > 1 \end{cases} .$$

Remarque. La démonstration vaut également pour l'anneau de séries convergentes, dans le cas $k = \underline{C}$ . De plus, on évite facilement l'hypothèse que $k$ soit séparablement clos en faisant l'énoncé avec un peu plus de soin. Mais pour établir le théorème de pureté générale 3.2 (sous l'hypothèse de résolution des singularités, bien entendu), nous avons besoin du résultat seulement dans le cas $k$ séparablement clos, et ces autres assertions sont des corollaires de ce théorème 3.2.

Pour les dimensions 0, 1, on peut démontrer le résultat pour chaque anneau régulier strictement local :

Lemme 1.3 . Soit $A$ un anneau régulier strictement local et $x \in \mathrm{rad}\, A$ un paramètre local. Soit $U = \mathrm{Spec}\, A[1/x]$ . Alors $H^0(U, \mu_n) = \mu_n(A)$, et on a des isomorphismes canoniques

$$\mathbb{Z}/n \simeq H^0(U, \underline{G}_m)/(H^0(U, \underline{G}_m))^n \simeq H^1(U, \mu_n) ,$$

où le générateur de $\mathbb{Z}/n$ est le "résidu" de $x \in H^0(U,\underline{G}_m)$ .

Démonstration. Pour $q = 0$ , l'assertion est que $U$ soit connexe et non-vide. C'est vrai. Pour $q = 1$ , appliquons la suite exacte de Kummer (IX 3.7). On a $\mathrm{Pic}\, U = 0$ parce que $A$ est régulier et factoriel, et que $U$ est un ouvert de $X = \mathrm{Spec}\, A$ . Il s'ensuit qu'on a la suite exacte

$$H^0(U,\underline{G}_m) \xrightarrow{n} H^0(U,\underline{G}_m) \longrightarrow H^1(U,\underline{\mu}_n) \longrightarrow 0 \ ,$$

et il reste à démontrer que $H^0(U,\underline{G}_m)/(H^0(U,\underline{G}_m))^n$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/n$ et engendré par le résidu de $x$ . Or on a une suite exacte évidente

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(X,\underline{G}_m) & \longrightarrow & H^0(U,\underline{G}_m) & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\ & & \wr & & \wr & & & & \\ & & A^* & & A\left[1/x\right]^* & & & & \end{array}$$

où l'image d'une section $a \in H^0(U,\underline{G}_m)$ dans $\mathbb{Z}$ est l'ordre du zéro de $a$ de long de $\{ x = 0 \}$ . Le groupe $A^*$ est divisible par $n$ , parce que $A$ est strictement local et que $n$ est premier à la caractéristique résiduelle. En effet, si $u \in H^0(X,\underline{G}_m)$ , l'équation $Y^n - u = 0$ définit une extension finie étale de $A$ , qui est donc complètement décomposée. Il s'ensuit que $H^1(U,\underline{\mu}_n) \simeq \mathbb{Z}/n$ , d'où le lemme.

Démonstration de 1.2 . Il reste à traiter le cas $q > 1$ . Rappelons la terminologie de (V, appendice). On a

$$H^q(U,\underline{\mu}_n) = \varinjlim_{\mathfrak{U}} H^q(\mathfrak{U},\underline{\mu}_n)$$

où $\mathbb{U} = \left\{ U_o \leftarrow\!\!\leftarrow U_1 \;\substack{\leftarrow\\ \leftarrow}\; \ldots \right\}$ parcourt la catégorie (filtrante, à homotopie près) des hyper-recouvrements de $U$ . Soit $\mathbb{U}$ un tel hyper-recouvrement, et prenons des $U_i$ séparés et de type fini. Puisqu'on veut démontrer que $H^q(U, \mu_n) = 0$ , il suffit de trouver un hyper-recouvrement $\mathbb{V}$ et un morphisme $\mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{U}$ tel que le morphisme induit

$$H^q(\mathbb{U}, \mu_n) \longrightarrow H^q(\mathbb{V}, \mu_n)$$

soit le morphisme nul.

Soit $\{ W_1, \ldots, W_m \}$ l'ensemble des composantes connexes de tous les $U_i$ pour $i \leqslant q+1$ , et soit $B_j$ l'anneau normalisé de $A = k[[x_1, \ldots, x_r]]$ dans le corps $R(W_j)$ des fonctions rationelles sur $W_j$ . Alors, puisque $W_j \longrightarrow U$ est étale, le schéma $W_j$ est un ouvert de Spec $B_j$ , disons l'ouvert complémentaire à Spec $C_j$ , où $C_j$ est l'anneau réduit quotient de $B_j$ convenable.

Choisissons en plus un élément $b_j$ de $B_j$ tel que $b_j$ engendre l'extension séparable $R(W_j)$ de $k((x_1, \ldots, x_r))$ . Soit $f_j(Y) \in A[Y]$ le polynôme unitaire irréductible de $b_j$ au-dessus de $A$ , de sorte que $B_j$ soit isomorphe au normalisé de l'anneau $A[Y]/(f_j)$ . Soit enfin $d_j \in A$ le discriminant de $f_j(Y)$ , qui est un élément non-nul de $A$ .

Or il est permis de remplacer les $x_i$ pour $i < r$ par d'autres éléments de $A$ , la seule condition étant que $\{x_1, \ldots, x_r\}$ doivent former un système de paramètres de $A$ .

Il est facile de voir qu'en changeant au besoin ces éléments,

on peut supposer que les hypothèses suivantes sont satisfaites :

(1.4) (i) Pour chaque j tel que $d_j$ ne soit pas une unité, $x_1,\ldots,x_{r-1}$, $d_j$ engendrent un idéal primaire pour rad A.

(ii) Pour chaque $j$ , les images des $x_1, \ldots, x_{r-1}$ dans $C_j$ engendrent un idéal primaire pour rad $C_j$ .

Alors on a le lemme suivant :

Lemme 1.5 . Soit $A^\circ = k[[x_1, \ldots, x_{r-1}]]\ \{x_r\}$ le hensélisé de $k[[x_1, \ldots, x_{r-1}]][x_r]$ en le point $(x_1, \ldots, x_r)$ , soient $X^\circ = \operatorname{Spec} A^\circ$ et $U^\circ = \operatorname{Spec} A^\circ\left[1/x_r\right]$ . Sous les conditions 1.4 ci-dessus, il existe un hyper-recouvrement $\mathbb{U}^\circ$ de $U^\circ$ (d'ordre q+1) et un isomorphisme $\mathbb{U}^\circ \times_{X^\circ} X \simeq \mathbb{U}$ .

Admettons le lemme. Or l'anneau $A^\circ$ est excellent (EGA IV 7.8.3 (ii), 7.9.5), et par conséquent, les composantes connexes des $U_i^\circ$ et des $U_i$ sont en correspondance biunivoque (EGA IV 7.8.3 (vii)). L'isomorphisme $\mathbb{U}^\circ \times_{X^\circ} X \simeq \mathbb{U}$ donne donc un isomorphisme

$$H^q(\mathbb{U}^\circ, \mu_n) \simeq H^q(\mathbb{U}, \mu_n) .$$

Puisque $k$ est séparablement clos, $A^\circ$ est un anneau strictement local, et on peut appliquer 1.1 à l'anneau $A^\circ$ . Il s'ensuit que $H^q(U^\circ, \mu_n) = 0$ . Mais

$$H^q(U^\circ, \mu_n) \simeq \varinjlim_{\mathbb{V}^\circ} H^q(\mathbb{V}^\circ, \mu_n) ,$$

où $\mathbb{V}^\circ$ parcourt la catégorie des hyper-recouvrements de $U^\circ$ d'ordre

$q+1$ , et $H^q(\mathbb{U}^\circ, \mu_n)$ est un groupe fini. Par conséquent, il existe un morphisme de hyper-recouvrements $\mathbb{V}^\circ \longrightarrow \mathbb{U}^\circ$ tel que le morphisme induit

$$H^q(\mathbb{U}^\circ, \mu_n) \longrightarrow H^q(\mathbb{V}^\circ, \mu_n)$$

soit le morphisme nul. Posons $\mathbb{V} = \mathbb{V}^\circ \times_{X^\circ} X$ . Alors $H^q(\mathbb{V}^\circ, \mu_n) \simeq H^q(\mathbb{V}, \mu_n)$ (même raisonnement que pour $\mathbb{U}^\circ$), donc

$$H^q(\mathbb{U}, \mu_n) \longrightarrow H^q(\mathbb{V}, \mu_n)$$

est également le morphisme nul, cqfd.

Démonstration de 1.5 . Il suffit de trouver des $A^\circ$ -algèbres finies $B_j^\circ$ , $C_j^\circ$ et des $A$ -isomorphismes

$$B_j^\circ \otimes_{A^\circ} A \xrightarrow{\sim} B_j$$

$$C_j^\circ \otimes_{A^\circ} A \xrightarrow{\sim} C_j \quad .$$

En effet, d'après ( [3] 1.4) le morphisme $B_j \longrightarrow C_j$ est induit par un morphisme $B_j^\circ \longrightarrow C_j^\circ$ , donc l'ouvert $W_j \subset \operatorname{Spec} B_j$ est induit par un ouvert $W_j^\circ \subset \operatorname{Spec} B_j^\circ$ . De plus, les $U$ -morphismes entre les $W_j$ sont induits par des morphismes entre les $A$ -algèbres $B_j$ , donc ( [3] 1.4) par des morphismes entre les $B_j^\circ$ , donc par des $U^\circ$ -morphismes des $W_j^\circ$ . Il s'ensuit que les $W_j^\circ$ forment l'ensemble des composantes connexes d'un objet simplicial $\mathbb{U}^\circ$ au-dessus de $U^\circ$ qui induit $\mathbb{U}$ , et on voit immédiatement que c'est un hyper-recouvrement de $U^\circ$ .

Or 1.4 (ii) implique bien que $C_j$ est induit par une $A^\circ$ -

algèbre $C_j^\circ$ , comme on vérifie facilement (*). Pour $B_j$ , il suffit de trouver un polynôme unitaire $f_j^\circ(Y) \in A^\circ[Y]$ tel que les deux $A$ - algèbres

$$A[Y]/(f_j) \quad \text{et} \quad A[Y]/(f_j^\circ) = A \otimes_{A^\circ} A^\circ[Y]/(f_j^\circ)$$

soient isomorphes. En effet, $A^\circ[Y]/(f_j^\circ)$ est alors réduit, et on prend pour $B_j^\circ$ le normalisé (EGA IV 7.8.3 (vi)) de $A[Y]/(f_j^\circ)$ . L'anneau $B_j^\circ \otimes_{A^\circ} A$ est encore normal (EGA IV 7.8.3 (vii)) et birationel à $B_j$ , donc égal à cet anneau.

D'après 1.4 (i), l'idéal $I_j \subset A$ engendré par $d_j$ est induit par un idéal de $k[[x_1, \ldots, x_{r-1}]][x_r]$ (th. de prép. de Weierstrass [5] [6]), donc par un idéal $I_j^\circ$ de $A^\circ$ . De plus, $A/I_j$ est une $k[[x_1, \ldots, x_{r-1}]]$ -algèbre finie, donc est isomorphe à $A^\circ/I_j^\circ$ . Ce dernier anneau est donc complet, et par conséquent, l'anneau complété $I_j^\circ$ -adique de $A^\circ$ est complet et isomorphe à $A$ . On peut donc trouver un polynôme unitaire $f_j^\circ \in A^\circ[Y]$ tel que dans $A[Y]$ , on ait

$$f_j \equiv f_j^\circ \quad (\text{modulo } d_j^2 \operatorname{rad} A) .$$

D'après ( [3] , 1.3), $A[Y]/(f_j) \simeq A[Y]/(f_j^\circ)$ , d'où le lemme.

2. Le cas d'un anneau strictement local.

Le théorème est le suivant :

---

(*) En effet, 1.4 (ii) implique que $C_j$ est fini sur $k[[X_1, .., X_{r-1}]]$, et a fortiori sur $A^\circ$, et il suffit de prendre $C_j^\circ = C_j$ avec la structure de $A^\circ$-module obtenue par restriction des scalaires.

Théorème 2.1(*). Soit A un anneau excellent, régulier, strictement local, d'égales caractéristiques, et soit x un "paramètre local" (**) de A . Soit U = Spec A $[1/x]$ . Alors pour n premier à la caractéristique de A , on a

$$H^q(U, \mu_n) = \begin{cases} \mu_n(A) & \text{si } q = 0 \\ \mathbb{Z}/n & \text{si } q = 1 \\ 0 & \text{si } q > 1 \end{cases} .$$

La démonstration se fait par récurrence sur q . Nous notons par P(N) l'énoncé de 2.1 pour les valeurs de $q \leq N$ . D'après 1.3 , l'assertion P(1) est vraie.

Lemme 2.2 . Supposons que P(N) soit vrai. Soit A $\longrightarrow$ A' un morphisme local d'anneaux excellents, réguliers, strictement locaux, d'égales caractéristiques. Soit $\{x_1, \ldots, x_r\}$ une partie d'un système régulier de paramètres de A dont l'ensemble des images dans A est encore une partie d'un système régulier de paramètres. Soient

$$U = \text{Spec } A\left[1/x_1, \ldots, 1/x_r\right]$$

$$U' = \text{Spec } A'\left[1/x'_1, \ldots, 1/x'_r\right] .$$

Alors le morphisme canonique

$$H^q(U, \mu_n) \longrightarrow H^q(U', \mu_n)$$

---

(*) Dépend de la résolution des singularités (cf. Introduction).

(**) Par quoi on entend ici : élément faisant partie d'un système régulier de paramètres.

est bijectif pour chaque $q \leq N$ .

Démonstration. (*) Récurrence sur $r$ : L'assertion est triviale pour $r = 0$ . Soit $r > 0$ et supposons que le théorème est démontré pour $r - 1$ . Soient $B = A/(x)$ , $V = \mathrm{Spec}\ A\left[1/x_1, \ldots, 1/x_{r-1}\right]$ , $Y = \mathrm{Spec}\ B\left[1/x_1, \ldots, 1/x_{r-1}\right]$ (où on dénote par le même symbole l'image de $x_i$ dans $B$). Il y a une immersion ouverte $i : U \longrightarrow V$ et $Y$ est l'ensemble fermé complémentaire, défini par l'élément $x_r$ .

En appliquant $P(N)$ aux anneaux localisés stricts de $V$ en les points géométriques de $Y$ , on trouve que

$$(2.3) \qquad R^q i_*(\mu_n)_U = \begin{cases} (\mu_n)_V & \text{si} \quad q = 0 \\ (\mathbb{Z}/n)_Y & \text{si} \quad q = 1 \\ 0 & \text{si} \quad 1 < q \leq N \end{cases},$$

parce que ces localisés stricts sont des anneaux réguliers excellents d'égales car., et que l'élément $x_r$ est un paramètre local en chaque point de $Y$ .

Notons avec un "prime" les objets analogues déduits de $A'$ . On trouve un morphisme de suites spectrales

---

(*) Une démonstration plus courte que celle qui suit, mais utilisant le formalisme du cup-produit, consisterait à montrer que sous l'hypothèse $P(N)$, la cohomologie $H^*(U, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est, en dimension $\leq N$ , l'algèbre extérieure (sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) de $H^1(U, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^r$ , ce qui ramène à établir 2.2 pour $q = 1$, cas bien connu. Le calcul indiqué sous l'hypothèse P(N) est explicité par exemple dans SGA 7.

$$\begin{array}{ccccc} E_2^{pq} = H^p(V,R^qi_*\mu_n) & \Longrightarrow & H^{p+q}(U,\mu_n) \\ \downarrow \varphi_2^{pq} \quad \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ E'^{pq}_2 = H^p(V',R^qi'_*\mu_n) & \Longrightarrow & H^{p+q}(U',\mu_n) \end{array} .$$

Or il est évident par 1.3 et 2.3 que le changement de base $V \xleftarrow{g} V'$ induit un isomorphisme

$$g^*R^qi_*\mu_n \xrightarrow{\sim} R^qi'_*\mu_n$$

pour $q \leqslant N$ (ce n'est que pour $q = 0,1$ qu'il y a quelque petite chose à vérifier). Par suite, l'hypothèse de récurrence, appliquée au morphisme

$$H^q(V,\mu_n) \longrightarrow H^q(V',\mu_n) ,$$

implique que $\varphi_2^{pq}$ est un isomorphisme pour $q = 0$ et $p \leqslant N$ .

De même, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence au morphisme d'anneaux $B \longrightarrow B'$ - ce sont des anneaux rég., exc., str. loc., d'égales car., et les éléments $x_1, \ldots, x_{r-1}$ forment une partie d'un système de paramètres. Donc

$$H^q(Y,\mu_n) \xrightarrow{\sim} H^q(Y',\mu_n) \quad \text{si} \quad q \leqslant N .$$

Puisque $(\mu_n)_Y \simeq (\mathbb{Z}/n)_Y$ , il s'ensuit que $\varphi_2^{pq}$ est également bijectif pour $p \leqslant N$ et pour $q = 1$ .

Du fait que $R^qi_*\mu_n = R^qi'_*\mu_n = 0$ si $1 < q \leqslant N$ , on trouve $E_2^{pq} = E'^{pq}_2 = 0$ si $1 < q \leqslant N$ , et le morphisme de suites spectrales se réduit donc pour $1 \leqslant m \leqslant N$ à un morphisme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
H^{m-2}(Y,\mathbb{Z}/n) & \longrightarrow & H^m(V,\mu_n) & \longrightarrow & H^m(U,\mu_n) & \xrightarrow{e} & H^{m-1}(Y,\mathbb{Z}/n) & \longrightarrow & H^{m+1}(V,\mu_n) \\
\downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c & & \downarrow d & & \downarrow \\
H^{m-2}(Y',\mathbb{Z}/n) & \longrightarrow & H^m(V',\mu_n) & \longrightarrow & H^m(U',\mu_n) & \longrightarrow & H^{m-1}(Y',\mathbb{Z}/n) & \longrightarrow & H^{m+1}(V',\mu_n)\ .
\end{array}$$

Or on a déjà vu que a , b , d sont bijectifs, et il s'ensuit que c est <u>injectif</u> . Pour démontrer que c' est <u>surjectif</u>, il suffit de démontrer que le morphisme

$$H^m(U,\mu_n) \xrightarrow{e} H^{m-1}(Y,\mathbb{Z}/n)$$

est surjectif pour $m \leqslant N$ .

Soit $k \subset A$ un corps séparablement clos arbitraire,et soit $A^\circ = k\{x_1, \ldots, x_r\}$ le hensélisé de $k[x_1, \ldots, x_r]$ à l'origine. Alors les hypothèses de 2.1 sont satisfaites pour le morphisme $A^\circ \longrightarrow A$ et pour les éléments $x_i$ . Avec les notations évidentes, on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc}
H^m(U^\circ,\mu_n) & \xrightarrow{e^\circ} & H^{m-1}(Y^\circ,\mathbb{Z}/n) \\
\downarrow c^\circ & & \downarrow d^\circ \\
H^m(U,\mu_n) & \xrightarrow{e} & H^{m-1}(Y^\circ,\mathbb{Z}/n)
\end{array}$$

et on sait déjà que la flèche $d^\circ$ est bijective. Il suffit ainsi de démontrer que le morphisme $e^\circ$ est surjectif. On est donc ramené (en laissant tomber les $^\circ$) à vérifier la surjectivité dans le cas $A = k\{x_1, \ldots, x_r\}$ .

Pour cet anneau, qui est limite de schémas lisses sur $k$ , on avait démontré le théorème de pureté dans XVI 3.7. On a

donc $R^q i_* \mu_n = 0$ pour chaque $q > 1$ , et par conséquent une suite exacte

$$H^m(U, \mu_n) \xrightarrow{e} H^{m-1}(Y, \mathbb{Z}/n) \longrightarrow H^{m+1}(V, \mu_n) \xrightarrow{f} H^{m+1}(U, \mu_n)$$

pour chaque $m \geqslant 1$ . La surjectivité de e équivaut donc à l'injectivité de f .

Soit $Z = \operatorname{Spec} k\{x_1, \ldots, x_{r-1}\}\left[1/x_1, \ldots, 1/x_{r-1}\right]$ . Le morphisme $\operatorname{Spec} k\{x_1, \ldots, x_r\} \longrightarrow \operatorname{Spec} k\{x_1, \ldots, x_{r-1}\}$ donné par l'inclusion d'anneaux est acyclique. C'est l'acyclicité locale d'un morphisme lisse (XVI 1.1). Puisque l'ouvert V de $\operatorname{Spec} k\{x_1, \ldots, x_r\}$ est l'image inverse de Z , le morphisme

$$H^q(Z, \mu_n) \longrightarrow H^q(V, \mu_n)$$

est bijectif pour chaque q (XV 1.3). Il suffit donc de démontrer que le morphisme

$$H^q(Z, \mu_n) \longrightarrow H^q(U, \mu_n)$$

est injectif pour chaque q .

Or $k\{x_1, \ldots, x_r\}$ est limite inductive d'anneaux $A_\alpha$ étales au-dessus de $k\{x_1, \ldots, x_{r-1}\}\left[x_r\right]$ , avec un relèvement du point $x_1 = x_2 = \ldots = x_r = 0$ à cet anneau. Par conséquent, U est limite projective des ouverts $U_\alpha = \operatorname{Spec} A_\alpha\left[1/x_1, \ldots, 1/x_r\right]$ , et on a

$$H^q(U, \mu_n) = \varinjlim_\alpha H^q(U_\alpha, \mu_n) .$$

Mais puisque $A_\alpha\left[1/x_r\right]$ est lisse au-dessus de l'anneau hensélien

$k\{x_1, \ldots, x_{r-1}\}$ , et que la fibre fermée de $A[1/x_r]$ est non-vide, on voit immédiatement que la $k\{x_1, \ldots, x_{r-1}\}$-algèbre $A_\alpha[1/x_r]$ admet des sections. Donc $U_\alpha$ admet des sections au-dessus de $Z$ , et il s'ensuit que

$$H^q(Z, \mu_n) \longrightarrow H^q(U_\alpha, \mu_n)$$

est injectif pour chaque $q$ , donc que

$$H^q(Z, \mu_n) \longrightarrow H^q(U, \mu_n)$$

est aussi injectif, d'où le lemme.

Lemme 2.4 . Supposons que P(N) soit vrai. Soient $A \longrightarrow A'$ un morphisme régulier (EGA IV 6.8.1) d'anneaux excellents, strictement locaux, d'égales caractéristiques (pas nécessairement réguliers), et $U \subset \operatorname{Spec} A$ un ouvert qui est régulier. Soit $U' = U \times_{\operatorname{Spec} A} \operatorname{Spec} A'$ . Alors pour $n$ premier à la car. rés. de $A$ , le morphisme

$$H^q(U, \mu_n) \longrightarrow H^q(U', \mu_n)$$

est bijectif pour $q \leqslant N$ .

Démonstration. Soit $f : X \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ une résolution des singularités de $\operatorname{Spec} A$ telle que l'ouvert $U$ de $\operatorname{Spec} A$ se relève en un ouvert $i : U \longrightarrow X$ , et que l'ensemble fermé $Y = X - U$ soit purement de codimension 1 et à intersections transversales. Notons par un ' le changement de base induit par $A \longrightarrow A'$ . Le morphisme $g : X' \longrightarrow X$ est régulier (EGA IV 6.8.3), donc $f' : X' \longrightarrow \operatorname{Spec} A'$ est une résolution de $\operatorname{Spec} A$ , $i' : U' \longrightarrow X'$ une immersion ouverte,

et $Y' = X' - U'$ est purement de codimension 1, à intersections transversales. Tous ces schémas sont excellents.

Soit $p'$ un point de $X'$ et $p$ son image dans $X$. Puisque $Y$ est à intersections transversales dans $X$, il existe des éléments $x_1, \ldots, x_r \in O_{X,p}$ tels que $\{x_1, \ldots, x_r\}$ soit une partie d'un système de paramètres de $O_{X,p}$ et que $\operatorname{Spec} O_{X,p} \cap Y = V(x_1, \ldots, x_r)$. De plus, il résulte immédiatement du fait que $g : X' \longrightarrow X$ est régulier que les images $x'_i$ des $x_i$ dans $O_{X',p'}$ forment une partie d'un système de paramètres de cet anneau, et qu'on a $\operatorname{Spec} O_{X',p'} \cap Y = V(x'_1, \ldots, x'_r)$.

Soit $B'$ le localisé strict de $O_{X',p'}$ en un point géométrique $\bar{p}$ au-dessus de $p'$, et soit $B$ le localisé strict de $O_{X,p}$ au point géométrique de $X$ correspondant (ce sont des anneaux excellents (EGA IV 7.8.3 (ii), 7.9.5)). Soient

$$U_{\bar{p}} = \operatorname{Spec} B\left[1/x_1, \ldots, 1/x_r\right] , \quad U'_{\bar{p}} = \operatorname{Spec} B'\left[1/x'_1, \ldots, 1/x'_r\right] .$$

Lemme 2.2 est applicable, et on déduit que les morphismes

$$(*) \qquad H^q(U_{\bar{p}}, \mu_n) \longrightarrow H^q(U'_{\bar{p}}, \mu_n)$$

sont bijectifs pour $q \leqslant N$.

Calculons les faisceaux $R^q i_* \mu_n$, $R^q i'_* \mu_n$ pour les immersions ouvertes $i : U \longrightarrow X$ et $i' : U' \longrightarrow X'$ : la fibre $(R^q i'_* \mu_n)_{\bar{p}}$ au point géométrique $\bar{p}$ n'est autre que $H^q(U'_{\bar{p}}, \mu_n)$ (VIII 5). De même, $(R^q i_* \mu_n)_{\bar{p}} = H^q(U_{\bar{p}}, \mu_n)$. Donc $(*)$ implique que les morphismes de changement de base

$$(**) \qquad g^* R^q i_* \mu_n \longrightarrow R^q i'_* \mu_n$$

sont bijectifs pour $q \leqslant N$ .

D'après le théorème de changement de base pour un morphisme propre (XII 5.5), on a (puisque $X$ et $X'$ sont propres au-dessus des spectres d'anneaux strictement locaux, et que les fibres fermées de $X$ et $X'$ sont égales)

$$H^q(X,F) \xrightarrow{\sim} H^q(X',g^*F)$$

quel que soit le faisceau de torsion $F$ , pour chaque $q$ . Par conséquent, $(**)$ implique que dans le morphisme de suites spectrales

$$\begin{array}{ccccc} E_2^{pq} & = & H^p(X,R^qi_*\mu_n) & \Longrightarrow & H^{p+q}(U,\mu_n) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_2^{pq}} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ E'^{pq}_2 & = & H^p(X',R^qi'_*\mu_n) & \Longrightarrow & H^{p+q}(U',\mu_n) \end{array} ,$$

les flèches $\varphi_2^{pq}$ sont bijectives pour chaque $q \leqslant N$ . On voit facilement que cela implique que $\varphi_\infty^{pq}$ est bijectif si $q \leqslant N$ et $p+q \leqslant N+1$ . Par conséquent, le morphisme des aboutissements

$$H^m(U,\mu_n) \longrightarrow H^m(U',\mu_n)$$

est bijectif pour $m \leqslant N$ , d'où le lemme.

Le lemme suivant achevera la démonstration de 2.1 :

Lemme 2.5. $P(N) \Longrightarrow P(N+1)$.

Démonstration. Soient $A$ strictement local, régulier, excellent,

d'égales caractéristiques, $x \in \text{rad } A$ un paramètre local, $U = \text{Spec } A[1/x]$ . Soient $\hat{A}$ le complété de $A$ , $\hat{x}$ l'élément image de $x$ , $\hat{U} = \text{Spec } \hat{A}[1/x]$ , et $g : \hat{U} \longrightarrow U$ le morphisme canonique. Il suffit de démontrer qu'on a

$$g_*(\mu_n)_{\hat{U}} \simeq (\mu_n)_U \quad \text{et}$$

(2.6)

$$R^q g_* \mu_n = 0 \quad \text{si} \quad 1 \leqslant q \leqslant N \quad .$$

En effet, la suite spectrale de Leray

$$E_2^{pq} = H^p(U, R^q g_* \mu_n) \Longrightarrow H^{p+q}(U', \mu_n)$$

donnera des isomorphismes

$$H^q(U, \mu_n) \xrightarrow{\sim} H^q(U', \mu_n)$$

pour $q \leqslant N$ , et une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^{N+1}(U, \mu_n) \longrightarrow H^{N+1}(U', \mu_n) \longrightarrow H^0(U, R^{N+1} g_* \mu_n) \quad .$$

Mais on sait déjà que $P(1)$ est vrai (1.3), et il s'agit donc de démontrer que $H^q(U, \mu_n) = 0$ si $1 < q \leqslant N+1$ . On peut ainsi remplacer $A$ par $\hat{A}$ , qui est isomorphe à un anneau de séries formelles $\hat{A} \simeq k[[x_1, \ldots, x_r]]$ avec $k$ séparablement clos et $\hat{x} = x_r$ . On a traité ce cas dans 1.2 .

Vérifions donc (2.6) : le fait que $g_*(\mu_n)_{\hat{U}} \simeq (\mu_n)_U$ n'est que l'assertion de (2.3) pour $q = 0$ . Rappelons que $R^q g_* \mu_n$ est le faisceau associé au préfaisceau $\mathcal{R}^q$ , où

$$\mathcal{R}^q(V) = H^q(\hat{V}, \mu_n)$$

pour $V \longrightarrow U$ étale. Il suffit de prendre $V$ séparé et de type fini, alors $V$ est somme de schémas intègres, et il suffit de regarder de tels $V$. Soit $B$ le normalisé de $A$ dans le corps des fractions de $\Gamma(V,\mathcal{O}_V)$. Alors $B$ est une $A$-algebre finie (EGA IV 7.8.3 (vi)) et on voit immédiatement que $V$ est un ouvert régulier de Spec $B$ et que $\hat{V}$ est l'ouvert correspondant de Spec $\hat{B}$, ou $\hat{B} = B \otimes_A \hat{A}$. Il s'ensuit que les hypothèses de 2.4 sont satisfaites pour l'ouvert $V \subset$ Spec $B$, et pour le morphisme $B \longrightarrow \hat{B}$. On a donc

$$\mathcal{R}^q(V) \simeq H^q(V, \mu_n) \simeq H^q(\hat{V}, \mu_n)$$

pour $q \leqslant N$. Or le faisceau associé au préfaisceau $V \longmapsto H^q(V, \mu_n)$ est évidemment nul, d'où le lemme.

## 3. Pureté.

Nous adopterons une terminologie analogue à celle de XVI 3 :

Définition 3.1. On appelle couple régulier $(Y,X)$ de codimension $c$ une immersion fermée $i : Y \longrightarrow X$ de schémas localement noethériens réguliers tel que pour chaque $y \in Y$ on ait $\operatorname{codim}_y(Y,X) = c$ (alors il existe un voisinage ouvert $X'$ de $y$ dans $X$ et des sections $x_1, \ldots, x_c \in \Gamma(X',\mathcal{O}_X)$ qui engendrent l'idéal de $Y$, et qui forment une partie d'un système régulier de paramètres de $X$ en chaque point de $Y \cap X'$). On note $U = X - Y$, et $j : U \longrightarrow X$ l'immersion ouverte correspondante.

Un morphisme $(Y',X') \longrightarrow (Y,X)$ de couples réguliers de codimension $c$ est un morphisme $X' \longrightarrow X$ tel que $Y' = Y \times_X X'$ . On définit d'une façon analogue évidente la notion de triple régulier, de morphisme de triple régulier, etc ...

Théorème 3.2 (*). (Pureté cohomologique) Soit $(Y,X)$ un couple régulier de codimension $c > 0$ , où $X$ est un préschéma excellent d'égales caractéristiques. Soit $F$ un faisceau sur $X$ localement constant de groupes cycliques d'ordre $n$ premiers à la caractéristique de $X$ . Alors on a, dans la notation de (V 4, VIII 5)

$$\underline{H}^q_Y(X,F) = (R^q i^!)F = 0 \quad \text{si} \quad q \neq 2c \ ,$$

$$(R^q j_*)j^*F = 0 \quad \text{si} \quad q \neq 0, 2c-1 \ , \quad \text{et}$$

$$\underline{H}^{2c}_Y(X,F) = i^*(R^{2c-1}j_*)j^*F$$

est un faisceau localement constant de groupes cycliques d'ordre $n$ sur $Y$.

Démonstration. (cf. XVI 3.7). On voit immédiatement qu'on a

$$\underline{H}^q_Y(X,F) = 0 \quad \text{si} \quad q = 0,1 \ .$$

D'après (V 4.5)

$$\underline{H}^q_Y(X,F) = (R^q i^!)F \simeq i^*(R^{q-1}j_*)j^*F \quad \text{si} \quad q > 1 \ ,$$

donc les assertions pour les trois faisceaux sont équivalentes. Puisque les assertions sont locales sur $X$ pour la topologie étale, on peut

---

(*) Dépend de la résolution des singularités (cf Introduction).

supposer que $F = \mu_n$ .

Pour le cas $c = 1$ , le calcul des fibres (VIII 5) de $(R^q j_*)j^* \mu_n$ nous ramène à la situation envisagée dans 2.1 , d'où

$$((R^q j_*)j^* \mu_n)_{\bar{y}} = \begin{cases} \mathbb{Z}/n & \text{si} \quad q = 1 \\ 0 & \text{si} \quad q > 1 \end{cases}$$

pour chaque point géométrique $\bar{y}$ de $Y$ . Puisque ces faisceaux sont nuls en dehors de $Y$ en tout cas, cela démontre l'assertion pour $q > 1$ . Pour $q = 1$ $(= 2c-1)$ , on applique le critère de (IX 2.13 (i)) et le calcul explicite de 1.3 .

Le cas $c > 1$ se traite par récurrence (cf. XVI 3.7) : Soit $(Y,X)$ un couple régulier de codimension $c > 1$ . D'après la définition, il est clair que, localement sur $X$ , on peut trouver un triple régulier $(Y,Z,X)$ où $(Z,X)$ est de codimension 1 et $(Y,Z)$ est de codimension $c-1$ . Soient

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{u} & Z \\ & {\scriptstyle i}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle v} & \\ & X & \end{array}$$

les immersions fermées. On a la suite spectrale

$$E_2^{pq} = (R^p u^!)(R^q v^!)F \Longrightarrow (R^{p+q} i^!)F \ .$$

Par hypothèse de récurrence, $(R^q v^!)F = 0$ si $q \neq 2$ , et est localement constant etc ... si $q = 2$ . Donc, encore par hypothèse de récurrence, appliqué au morphisme $u$ , $(R^p u^!)(R^q v^!)F = 0$ si

$(p,q) \neq (2c-2,2)$ et est loc. const. etc ... si $(p,q) = (2c-2,2)$ , d'où le résultat pour l'aboutissement $(R^{p+q}i^!)F$ , cqfd.

3.3. Il reste maintenant à déterminer les faisceaux localement constants de (3.2) à isomorphisme <u>canonique</u> près. Nous introduisons pour chaque préschéma $S$ les faisceaux localement constants $(\mu_n^{\otimes r})_S$ = le produit tensoriel $r$ -ième du faisceau $(\mu_n)_S$ au-dessus du faisceau constant d'anneaux $\mathbb{Z}_S$ . Posons aussi $(\mu_n^{\otimes 0})_S = (\mathbb{Z}/n)_S$ . On constate immédiatement que si $n$ est inversible sur $S$ , alors $(\mu_n^{\otimes r})_S$ est un faisceau localement constant de groupes cycliques d'ordres $n$ . On a des formules du type $(\mu_n^{\otimes r}) \otimes (\mu_n^{\otimes s}) = (\mu_n^{\otimes r+s})$ , et si $S' \longrightarrow S$ , alors $(\mu_n^{\otimes r})_{S'}$ est canoniquement isomorphe à l'image inverse sur $S'$ de $(\mu_n^{\otimes r})_S$ . Nous omettrons souvent le symbole $S$ s'il n'y a pas de confusion à craindre.

Soit $(Y,X)$ un couple régulier de codimension 1 , et supposons que $Y$ soit défini par une équation $x = 0$ . On a la suite exacte de faisceaux

$$0 \longrightarrow (\underline{G}_m)_X \longrightarrow j_*(\underline{G}_m)_U \longrightarrow \mathbb{Z}_Y \longrightarrow 0 ,$$

d'où en appliquant (1.3), des isomorphismes canoniques

$$(3.3.1) \qquad (R^1 j_*)\mu_n) \simeq j_*(\underline{G}_m)_U/(j_*(\underline{G}_m)_U)^n \simeq (\mathbb{Z}/n)_Y ,$$

qui ne dépendent évidemment pas du choix de $x$ . Par conséquent, on a un isomorphisme canonique

$$(3.3.2) \qquad \varphi : \mathbb{Z}/n \xrightarrow{\sim} (R^* i^!)\mu_n \simeq i^*(R^1 j_*)\mu_n .$$

Théorème 3.4 (*). Soit C la famille des couples réguliers de schémas excellents, d'égales caractéristiques. Il existe une fonction et une seule $\varphi$ donnant pour chaque couple régulier $(Y,X)$ de codimension $c$ un isomorphisme (dit canonique) de faisceaux

$$\varphi(Y,X) = \varphi : \mathbb{Z}/n \xrightarrow{\sim} H^{2c}_Y(X, \mu_n^{\otimes c}) = (R^{2c}i^!)\mu_n^{\otimes c}$$

tel que $\varphi$ satisfasse aux conditions suivantes :

(i) Si $c = 1$, et si $Y$ est défini dans $X$ par une équation $x = 0$, alors $\varphi$ est le morphisme (3.3') .

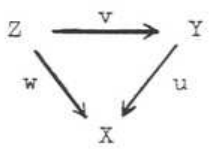
(ii) $\varphi$ est compatible avec les morphismes de couples lisses, c'est-à-dire, si $(Y',X') \to (Y,X)$ est un morphisme, soit $g:Y' \to Y$ le morphisme induit. Le diagramme de $Y'$-faisceaux

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/n & \xrightarrow{\varphi(Y',X')} & (R^{2c}i^!)\mu_n^{\otimes c} \\ \uparrow & & \uparrow \\ g^*(\mathbb{Z}/n) & \xrightarrow{g^*\varphi(Y,X)} & g^*(R^{2c}i^!)\mu_n^{\otimes c} \end{array}$$

est commutatif (ce qui implique en particulier que la flèche verticale de droite est un isomorphisme).

(iii) Transitivité : soit $(Z,Y,X)$ un triple régulier, c'est-à-dire, un diagramme commutatif d'immersion fermée de préschémas réguliers etc ...,

(*) Dépend de la résolution des singularités (cf. Introduction). Ce théorème peut être considéré aussi comme la conjonction de 3.2 et de la théorie de variance de Exp XVIII par les "classes fondamentales locales", où on étudie des homomorphismes $\varphi(Y,X)$ (pas nécessairement bijectifs) pour $Y$ localement intersection complète dans $X$.




.

Soient a,b,c les codimensions de u,v,w respectivement (donc c=a+b). On a un isomorphisme

$$\varphi(Y,X) \otimes \mu_n^{\otimes b} : \mu_n^{\otimes b} \longrightarrow (R^{2a}u^!)\mu_n^{\otimes a} \otimes \mu_n^{\otimes b} \simeq$$

$$\simeq (R^{2a}u^!)\mu_n^{\otimes c} \quad .$$

La suite spectrale $(R^pv^!)(R^qu^!)F \Longrightarrow (R^{p+q}w^!)F$ donne un isomorphisme

$$\xi : (R^{2b}v^!)(R^{2a}u^!)\mu_n^{\otimes c} \xrightarrow{\sim} (R^{2c}w^!)\mu_n^{\otimes c} \quad .$$

On obtient ainsi un diagramme d'isomorphismes

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/n & \xrightarrow{\varphi(Z,Y)} & (R^{2b}v^!)\mu_n^{\otimes b} \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi(Z,X)} & & \downarrow{\scriptstyle \eta = (R^{2b}v^!)((Y,X)\otimes\mu_n^{\otimes b})} \\ (R^{2c}w^!)\mu_n^{\otimes c} & \xleftarrow{\xi} & (R^{2b}v^!)(R^{2a}u^!)\mu_n^{\otimes c} \end{array} \quad , \tag{3.4.1}$$

et l'assertion de transitivité est que ce diagramme est commutatif.

Démonstration. La démonstration de l'existence et l'unicité se fait par récurrence sur la codimension c . Pour c = 1 , on définit le morphisme $\varphi$ localement avec (3.3.1) Puisque ce morphisme ne dépend pas du choix du paramètre x , on obtient un isomorphisme $\varphi$ pour chaque (Y,X) de codimension 1 par recollement, et il est clair, d'après la définition du morphisme et de 1.3 , que le $\varphi$ ainsi construit satisfait à (ii). La transitivité n'intervient pas pour c = 1 .

Supposons maintenant que l'existence et l'unicité sont déjà démontrées si la codimension est $< c$ , et que $c > 1$ . En appliquant l'hypothèse de récurrence, on constate immédiatement que dans la situation de 3.4 (iii) les trois flêches de 3.4.1 qui sont déjà définies, i.e. $\varphi(Z,Y)$, $\xi$ , $\eta$ sont compatibles avec les morphismes de triples réguliers. Posons dans cette situation

$$\Psi(Z,Y,X) = \xi\,\eta\varphi(Z,Y) \quad ,$$

donc $\Psi$ est également compatible avec les morphismes de triples. Or si $(Z,X)$ est un couple régulier de codimension $c > 1$ , on peut, localement sur $X$ , trouver un triple $(Z,Y,X)$ avec $0 < \mathrm{codim}(Y,X) < c$ . Tout revient donc à démontrer que la flêche $\Psi(Z,Y,X)$ est indépendante de $Y$ . En effet, cela démontrera l'unicité de $\varphi$ pour la codimension $c$ , et l'existence résultera par recollement.

Si $(Z,Y,X)$ est arbitraire tel que $\mathrm{codim}\,(Y,X) > 1$ , on peut, localement sur $X$ , trouver un triple régulier $(Y,W,X)$ où la codimension de $(W,X)$ est égale à 1. Par une chasse de diagramme de transitivité, que nous laissons au lecteur, on se ramène donc à vérifier l'indépendance de $Y$ lorsque $(Y,X)$ est de codimension 1.

Soient $(Z,Y_o,X)$ et $(Z,Y_1,X)$ deux tels triples. Il suffit de faire la vérification fibre par fibre, et on est donc ramené au cas $X$ strictement local, et $Y_i$ défini par une équation, disons $f_i = 0$ $(i=0,1)$ . Soient $\bar{X} = \underline{\mathrm{Spec}}\ O_X[t]$ , $\bar{Z} = Z \times_X \bar{X}$ , et $\bar{Y}$ le sous-schéma fermé de $\bar{X}$ défini par l'équation

$$(f_1 - f_o)t + f_o = 0 \quad .$$

Alors $\bar{Y}$ est évidemment régulier en les points au-dessus des sections $\mathcal{E}_o : \{t=0\}$ et $\mathcal{E}_1 : \{t=1\}$ de $\bar{X}/X$ . Soit C le sous-ensemble fermé (EGA IV 7.8.3 (iv)) de $\bar{Y}$ des points où $\bar{Y}$ n'est pas régulier, et remplaçons $\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}$ par $\bar{X} - C$ , $\bar{Y} - C$ , $Z - C\cap\bar{Z}$ respectivement. Alors $(\bar{Z},\bar{Y},\bar{X})$ est un triple régulier, et les sections $\mathcal{E}_i$ donnent des morphismes de triples

$$(Z,Y_i,X) \longrightarrow (\bar{Z},\bar{Y},\bar{X}) \qquad (i=0,1) \ .$$

Soit $F = (R^{2c}w^!)\mu_n^{\otimes c}$ le faisceau sur Z . C'est un faisceau localement constant, isomorphe à $\mathbb{Z}/n$ (par l'un ou l'autre des isomorphismes $\Psi(Z,Y_i,X)$ , et on constate immédiatement que le faisceau $\bar{F} = (R^{2c}\bar{w}^!)\mu_n^{\otimes c}$ sur $\bar{Z}$ est l'image inverse sur $\bar{Z}$ de F . Puisque les fibres de $\bar{Z} \longrightarrow Z$ sont connexes non-vides et que $\bar{Z} \longrightarrow Z$ est lisse, donc ouvert, il s'ensuit que le morphisme déduit

$$H^o(Z,F) \longrightarrow H^o(\bar{Z},\bar{F})$$

est <u>bijectif</u>, donc que chacun des morphismes

$$(*) \qquad H^o(Z,F) \longrightarrow H^o(\bar{Z},\bar{F}) \begin{cases} \xrightarrow{\mathcal{E}_o^*} H^o(Z,F) \\ \xrightarrow{\mathcal{E}_1^*} H^o(Z,F) \end{cases}$$

est bijectif, donc que $\mathcal{E}_o^* = \mathcal{E}_1^*$ .

Or donner un isomorphisme d'un faisceau F avec $\mathbb{Z}/n$ équivaut à donner une section globale (image de 1) qui est un générateur. Soient $\bar{\alpha}$ , $\alpha_i$ les sections globales de $\bar{F}$ , F données par les

isomorphismes $\Psi(\bar{Z},\bar{Y},\bar{X})$ , $\Psi(Z,Y_i,X)$ respectivement. Puisque $\Psi(.,.,.)$ est compatible avec les morphismes, le diagramme (*) implique que

$$\alpha_o = \varepsilon_o^*(\bar{\alpha}) = \varepsilon_1^*(\bar{\alpha}) = \alpha_1 ,$$

d'où $\Psi(Z,Y_o,X) = \Psi(Z,Y_1,X)$ , cqfd.

## 4. Acyclicité locale d'un morphisme régulier.

Théorème 4.1 (*) (acyclicité locale). Soit $g : X' \longrightarrow X$ un morphisme régulier (EGA IV 6.8.1) de schémas excellents d'égales caractéristiques. Alors $g$ est universellement localement acyclique pour $n$ premier à la caractéristique.

Démonstration. L'hypothèse étant stable par changement de base de type fini, il résulte aussitôt de XV 1.13 ii) qu'il suffit de prouver que $g$ est localement acyclique pour $n$ . Appliquons le critère de XV 1.17 : Soient $\bar{x}'$ un point géométrique de $X'$ et $\bar{x}$ le point géométrique de $X$ correspondant. Il résulte immédiatement de la définition de morphisme régulier que le morphisme des localisés stricts en ces points induit par $g$ est encore régulier. On est donc ramené au cas où $X = \mathrm{Spec}\ A$ et $X' = \mathrm{Spec}\ A'$ sont strictement locaux, $g$ et un morphisme local, et d'après XV 1.17 il suffit de démontrer que

---

(*) Dépend de la résolution des singularités (cf. Introduction).

les fibres géométriques de $g$ sont acycliques pour $n$ . En remplaçant $X$ par un sous-schéma fermé intègre et $X'$ par le fermé correspondant, on se ramène au cas de la fibre géométrique générique $X'_{\bar{x}}$ . Prenons $\bar{x} = \operatorname{Spec} \bar{K}$ où $\bar{K}$ est la clôture séparable du corps de fonctions rationelles sur $X$ . Alors on a

$$\bar{x} = \varprojlim_{\alpha} U_\alpha$$

où $U_\alpha$ parcourt une catégorie filtrante de $X$ -schémas étales connexes, qu'on peut supposer réguliers (EGA IV 7.8.3 (v)). Soit $B_\alpha$ le normalisé de $A$ dans le corps des fonctions rationnelles $R(U_\alpha)$ . Posons $U'_\alpha = X' \times_X U_\alpha$ et $B'_\alpha = A' \otimes_A B_\alpha$ . Alors $U_\alpha$ est un ouvert régulier de $\operatorname{Spec} B_\alpha$ et $B_\alpha \longrightarrow B'_\alpha$ est régulier, donc par 2.3

$$H^q(U_\alpha, \mu_n) \xrightarrow{\sim} H^q(U'_\alpha, \mu_n)$$

pour chaque $q$ . Or la fibre $X'_{\bar{x}}$ est limite des $U'_\alpha$ , donc

$$\begin{aligned} H^q(X'_{\bar{x}}, \mu_n) &= \varinjlim_{\alpha} H^q(U'_\alpha, \mu_n) \\ &= \varinjlim_{\alpha} H^q(U_\alpha, \mu_n) \\ &= H^q(\bar{x}, \mu_n) = 0 \quad \text{si} \quad q > 0 \quad , \text{ cqfd.} \end{aligned}$$

Corollaire 4.2 (changement de base par un morphisme régulier). Soit

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{g} & X' \\ \downarrow f & & \downarrow f' \\ Y & \xleftarrow{g} & Y' \end{array}$$

un diagramme cartésien, $g : Y' \longrightarrow Y$ étant un morphisme régulier de préschémas excellents d'égales caractéristiques, $f$ quasi-compact et

quasi-séparé. Alors pour chaque faisceau F abélien de torsion premier à la caractéristique, les morphismes de changement de base (XII 4.2)

$$g^*(R^q f_*)F \longrightarrow (R^q f'_*)g'^*F$$

sont bijectifs pour chaque $q \geqslant 0$ .

Cela résulte de 4.1 et de XVI 1.1 .

De 4.1 et XV 1.17 on déduit immédiatement

Corollaire 4.3 . Soient A un aneau strictement local excellent d'égales caractéristiques, et $f : X \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ un morphisme. Soit $A \longrightarrow A'$ un morphisme régulier, où A' est également strictement local, excellent, d'égales caractéristiques. Notons par un ' le changement de base induit par $A \longrightarrow A'$ . Pour chaque faisceau de torsion F sur X , premier à la caractéristique de A , on a

$$H^q(X,F) \xrightarrow{\sim} H^q(X',F')$$

pour chaque $q \geqslant 0$ .

Ce corollaire s'applique notamment dans le cas où A' est le complété $\hat{A}$ de A . (Dans ce cas, on peut d'ailleurs remplacer l'hypothèse "A strictement local" par "A local hensélien", comme on constate immédiatement .)

## 5. Théorème de finitude.

Théorème 5.1 (*)(finitude). Soit $f : X \longrightarrow S$ un morphisme de type fini de schémas excellents d'égales caractéristiques, et soit $F$ un faisceau abélien de torsion premier à la caractéristique sur $X$, qui est un faisceau constructible. Alors les $(R^q f_*)F$ sont également constructibles pour chaque $q$.

Ce résultat généralise le théorème de XVI 5.1 . La démonstration est à peu près la même : on applique le résultat de pureté 3.2. au lieu de XVI 3.7 .

Corollaire 5.2 . Soit $A$ un anneau excellent strictement local d'égales caractéristiques et $f : X \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ un morphisme de type fini. Soit $F$ un faisceau abélien sur $X$ de torsion premier à la caractéristique de $A$, et constructible. Alors les $H^q(X,F)$ sont des groupes finis pour chaque $q$.

## 6. Dimension cohomologique des morphismes affines.

Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de type fini de préschémas excellents, et $F$ un faisceau sur $X$. Rappelons qu'on a défini (XIV 2.2) un entier $\delta(F)$ dans le cas où $Y$ est local. On peut donc

---

(*) Dépend de la résolution des singularités (cf. Introduction).

regarder $\delta$ comme fonction $\delta(F,f)$ sur un $Y$ arbitraire, en posant

$$\delta(F,f,y) = \delta(F') \quad , \tag{6.0}$$

ou $Y' = \operatorname{Spec} O_{Y,y}$ , $X' \longrightarrow Y'$ est le morphisme déduit de $f$ par le changement de base $Y' \longrightarrow Y$ , et $F'$ est le faisceau image inverse de $F$ sur $X'$ .

On a le résultat suivant, qui généralise XVI 3.1 :

Théorème 6.1 (*). Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme affine de type fini, où $Y$ est un schéma excellent d'égales caractéristiques, et soit $F$ un faisceau abélien de torsion sur $X$ . Alors $R^q f_* F$ est nul en chaque point $y \in Y$ tel que $\delta(F,f,y) < q$ .

La variante locale, évidemment équivalente à 6.1 , est la suivante :

Théorème 6.1 bis (*). Soient $A$ un anneau strictement local excellent d'égales caractéristiques, et $f : X \longrightarrow Y = \operatorname{Spec} A$ un morphisme affine de type fini. Soit $F$ un faisceau de torsion sur $X$ . Alors

$$H^q(X,F) = 0 \quad \text{si} \quad q > \delta(F) \quad .$$

Rappelons (X 5.1) qu'il n'y a pas d'intérêt dans de telles assertions pour les $F$ de $p$ -torsion, où $p$ est égale à la carac-

---

(*) Dépend de la résolution des singularités (cf. Introduction).

téristique. On peut donc supposer $F$ premier à la caractéristique.

On a le corollaire suivant :

Corollaire 6.2 . Soit $A$ un anneau hensélien, excellent, d'égales caractéristiques, à corps résiduel $k$ , et soit $U \subset \operatorname{Spec} A$ un ouvert affine. Soit $\ell \in \mathbb{P}$ . On a

$$\operatorname{cd}_\ell U \leqslant \operatorname{cd}_\ell k + \dim A \ .$$

En effet, soit $\tilde{A}$ le localisé strict de $A$ , qui est un revêtement étale galoisien infini, de groupe $G = G(\bar{k}/k)$ , et soit $\tilde{U}$ l'ouvert affine de $\operatorname{Spec} \tilde{A}$ induit de $U$ . En appliquant la suite spectrale d'Hochschild-Serre (VIII 8.4)

$$H^p(G, H^q(U,.)) \Longrightarrow H^{p+q}(U,.)$$

on se ramène à traiter le cas $A = \tilde{A}$ , et alors c'est un cas spécial de 6.1 bis .

Avec les notations ci-dessus, soit $R(A)$ l'anneau des fonctions rationnelles sur $A$ . On a $\operatorname{Spec} R(A) = \varprojlim_\alpha U_\alpha$ où $U_\alpha$ est un ouvert affine de $\operatorname{Spec} A$ . Il résulte donc de la théorie de passage à la limite qu'on a

Corollaire 6.3 . Soit $A$ hensélien excellent d'égales caractéristiques, à corps résiduel $k$ . Soit $R(A)$ le corps des fonctions rationnelles sur $\operatorname{Spec} A$ . Alors pour $\ell \in \mathbb{P}$ , on a

$$\operatorname{cd}_\ell R(A) \leqslant \operatorname{cd}_\ell k + \dim A$$

avec l'égalité si $\ell$ est inversible dans $k$, et si de plus $\ell \neq 2$ ou $k$ n'est pas ordonnable.

L'égalité dans le dernier cas résulte de X 2.4 .

Enfin, en appliquant X 4.2, 4.4 , on trouve

Corollaire 6.4 . Soient $X$ un schéma noethérien excellent d'égales caractéristiques, et $R(X)$ l'anneau des fonctions rationnelles sur $X$ . Soit $\ell \in \mathbb{P}$ inversible sur $X$ , et supposons que $\ell \neq 2$ ou qu' aucun corps résiduel de $X$ ne soit ordonnable. Alors

$$cd_\ell(X) \leqslant cd_\ell R(X) + \dim X \leqslant 2\, cd_\ell R(X) .$$

Démonstration de 6.1 . On commence par une réduction analogue à celle de XIV 3 . Récurrence sur $\delta$ : Il est clair que 6.1 pour $\delta \leqslant d$ équivaut à (6.1 bis) pour $\delta \leqslant d$ . Pour $\delta = 0$ , c'est trivial. Traitons le cas $\delta \leqslant 1$ , sous la forme 6.1 bis . Puisque $F$ est limite de ses sous-faisceaux constructibles (IX 2.9 (iii)), on peut supposer $F$ constructible, et alors le support de $F$ est contenu dans un fermé $Z \subset X$ avec $\delta(z) \leqslant 1$ pour chaque $z \in Z$ (XIV 2.2). Chaque composante irréductible réduite $Z_i$ de $Z$ est alors, ou bien un schéma affine de type fini de dimension $\leqslant 1$ au-dessus du point fermé $y$ de $Y$ , ou bien un schéma quasi-fini au-dessus d'un sous-schéma fermé réduit $C$ de $Y$ de dimension 1. Dans ce dernier cas, on a $C = \operatorname{Spec} B$ où $B$ est un anneau intègre strictement local de dimension 1. Un tel schéma $Z_i$ est le spectre d'un anneau intègre strictement local, de dimension $\leqslant 1$ , ou d'un corps fini au-dessus du corps des fractions de $B$ . Donc la dimension cohomologique de $Z_i$ est au

plus égal à 1 en tout cas, d'après X 2.3 et IX 5.7 . On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow \prod_i F_i \longrightarrow \varepsilon \longrightarrow 0$$

où $F_i$ est la restriction de $F$ à $Z_i$ , d'où on tire le résultat pour $Z$ .

Supposons maintenant que le théorème soit démontré pour les valeurs de $\delta < d$ , et prouvons-le pour $\delta(F) \leq d$ , supposant $d \geq 2$

Lemme 6.5 . Il suffit de traiter le cas où $X = \mathbb{E}^1_Y = \underline{\mathrm{Spec}}\ \mathcal{O}_Y[t]$ est l'espace affine de dimension 1, et où $Y$ est strictement local.

La démonstration est celle de XIV 4.2 : Il est clair qu'on peut supposer $Y$ strictement local, et que $\delta(F) \leq d$ . Il faut démontrer que $H^q(X,F) = 0$ si $q > d$ . On peut plonger $X$ dans $\mathbb{E}^N_Y$ , donc il suffit de traiter le cas $X = \mathbb{E}^N_Y$ . Récurrence sur $N$ : Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}^N_Y & \xrightarrow{g} & \mathbb{E}^{N-1}_Y \\ & {\scriptstyle f} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle h} & \\ & Y & \end{array}$$

de sorte que $\mathbb{E}^N_Y$ est l'espace affine de dimension 1 sur $\mathbb{E}^{N-1}_Y$ . En appliquant l'hypothèse de récurrence et la suite spectrale de Leray

$$H^p(\mathbb{E}^{N-1}, R^q g_* F) \Longrightarrow H^{p+q}(\mathbb{E}^N, F)$$

on voit qu'il suffit de démontrer que

$$\delta(R^q g_* F) \leq d-q \quad .$$

Cela veut dire que si $z \in \mathbb{E}^{N-1}$ est un point tel que $\delta(z) > d-q$, alors $R^q g_* F = 0$ au point $z$. Mais l'hypothèse de récurrence sur $N$ s'applique au morphisme $g$, et on a donc $R^q g_* F = 0$ au point $z$ si $\delta(F,g,z) < q$. Il suffit ainsi de démontrer l'inégalité

$$\delta(F,g,z) + \delta(z) \leq \delta(F) \quad .$$

Nous laissons ce plaisir au lecteur.

Lemme 6.6. Pour démontrer 6.1 pour les valeurs de $\delta \leq d$, il suffit de démontrer ceci : Soit $B$ un anneau local complet normal d'égales caractéristiques et de dimension $d$. Soit $U \subset \operatorname{Spec} B$ un ouvert affine. Supposons qu'il existe un élément $x \in \operatorname{rad} B$ qui est inversible sur $U$. Alors

$$H^q(U, \mathbb{Z}/\ell) = 0 \quad \text{si} \quad q > d \quad .$$

Ce lemme est d'ailleurs un cas spécial du corollaire 6.2.

Démonstration (cf. XIV 4.4). D'après 6.5, il suffit de traiter le cas $Y$ strictement local et $X = \mathbb{E}^1_Y$. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}^1_Y & \xrightarrow{\ i\ } & \mathbb{P}^1_Y \\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle g} & \\ & Y & \end{array} \quad ,$$

où $\mathbb{P}^1_Y$ est l'espace projectif et $\mathbb{E}^1_Y$ est déduit de $\mathbb{P}^1$ en enlevant la section $Y_\infty$ à l'infini. Soit $F$ un faisceau de torsion sur $\mathbb{E}^1$, avec $\delta(F) \leq d$. On a la suite spectrale

$$H^p(\mathbb{P}^1, R^q i_* F) \Longrightarrow H^{p+q}(\mathbb{E}^1, F) \quad .$$

Or les $R^q i_* F$ pour $q > 0$ sont concentrés sur la section $Y_\infty$ qui est isomorphe à $Y$ . Puisque $Y$ est strictement local, il s'ensuit que $H^p(\mathbb{P}^1, R^q i_* F) = 0$ si $p > 0$ et $q > 0$ . De plus, d'après XII 5.3 , on a $H^p(\mathbb{P}^1, i_* F) = 0$ si $p > 2$ . Comme on veut démontrer que $H^n(\mathbb{E}^1, F) = 0$ si $n > d$ , et que $d \geqslant 2$ , il suffit de démontrer que

$$H^o(\mathbb{P}^1, R^q i_* F) = H^o(Y_\infty, R^q i_* F) = 0 \quad \text{si} \quad q > d \quad .$$

Ce groupe est isomorphe à la fibre de $R^q i_* F$ au point $y_\infty$ à l'infini de $\mathbb{P}^1$ dans la fibre fermée.

Or il suffit (VII 3.3 et IX 2.9 (iii)) de traiter le cas $F$ constructible. Alors puisque $\delta(F) \leqslant d$ , il existe un sous-schéma fermé $X$ de $\mathbb{P}^1$ avec $\dim X \leqslant d$ tel que $X$ contienne le support de $F$ . Soient $\operatorname{Spec} A = \tilde{X}$ le localisé strict de $X$ au point $y_\infty$ , $\tilde{U} = \tilde{X} - \tilde{X} \times_{\mathbb{P}^1} Y_\infty$ , et $\tilde{F}$ le faisceau induit de $F$ sur $\tilde{U}$ . Notons que $U$ est déduit de $\tilde{X}$ en localisant par rapport à un élément $x \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ . On a

$$(R^q i_* F)_{y_\infty} \simeq H^q(\tilde{U}, \tilde{F}) \quad .$$

Il suffit ainsi de démontrer que $H^q(\tilde{U}, \tilde{F}) = 0$ , si $q > d$ , pour chaque faisceau de torsion $\tilde{F}$ sur $\tilde{U}$ .

On peut maintenant appliquer IX 5.6 , avec $\varphi = \delta$ , et on trouve qu'il suffit de démontrer que

$$H^q(V, \mathbb{Z}/\ell) = 0 \quad \text{si} \quad q > \delta(V)$$

pour chaque $V$ fini et intègre au-dessus de $\tilde{U}$ et pour $\ell$ inversible. Soit $\pi : \bar{V} \longrightarrow V$ le normalisé de $V$. On a la suite exacte

$$0 \longrightarrow (\mathbb{Z}/\ell)_V \longrightarrow \pi_*(\mathbb{Z}/\ell)_{\bar{V}} \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

avec $\delta(C) < \delta(V)$, et on tire de cela (par récurrence sur $\delta$) qu'il suffit de prendre $V$ normal.

Soit $B$ le normalisé de $A$ dans le corps des fonctions rationnelles sur $V$. Alors $B$ est un anneau strictement local excellent d'égales caractéristiques, et $V$ est un ouvert affine de Spec $B$, obtenu en localisant par rapport à $x$. Soit $\hat{B}$ le complété de $B$, et $\hat{V}$ l'ouvert induit (qui est obtenu de Spec $\hat{B}$ en localisant par rapport à l'image de $x$ dans $\hat{B}$). D'après 4.3, on a

$$H^q(V,\mathbb{Z}/\ell) \simeq H^q(\hat{V},\mathbb{Z}/\ell) .$$

On est donc ramené à démontrer que

$$H^q(\hat{V},\mathbb{Z}/\ell) = 0 \quad \text{si} \quad q > \delta(V) = \dim B = \dim \hat{B} .$$

Par hypothèse de récurrence, le théorème est vrai si $\delta(V) < d$, donc le théorème 6.1 bis s'applique dans cette situation. Par conséquent, il suffit de traiter le cas $\dim \hat{B} = d$, et puisque $\hat{B}$ est normal, on est dans la situation du lemme, d'où le résultat.

6.7.0. On va d'abord démontrer 6.6 sous des hypothèses supplémentaires, si $B$ est de caractéristique $p > 0$. Soient $A$ un anneau équidimensionel, complet, d'égales caractéristiques et $k \subset A$ un corps tel que $A/\mathrm{rad}\ A$ soit une extension finie de $k$. On dit que

la $k$-algèbre $A$ est formellement séparable s'il existe une sous-$k$-algèbre de $A$ de la forme $k[[x_1, \ldots, x_n]]$ tel que le morphisme Spec $A \longrightarrow$ Spec $k[[x]]$ soit fini et étale au point générique de Spec $k[[x]]$ $(x = (x_1, \ldots, x_n))$.

Lemme 6.7. Soit $k \subset B$ un corps au-dessus duquel $B/\text{rad } B$ soit finie. Sous l'hypothèse de récurrence sur $d$ ci-dessus, la conclusion de 6.6 est valable si les hypothèses de 6.6 sont satisfaites et si de plus l'une ou l'autre des conditions suivantes est satisfaite :

(i) $k$ est de caractéristique 0.

(ii) Il existe un élément $x \in \text{rad } B$ qui est inversible sur $U$ et tel que $\bar{B} = B/(x)$ soit une $k$-algèbre formellement séparable.

Démonstration. Choisissons des éléments $x_1 = x, x_2, \ldots, x_d$ de rad $B$ tels que $\{x_1, \ldots, x_d\}$ engendre un idéal primaire pour rad $B$. Alors $B$ est une $A$-algèbre finie, où $A = k[[x_1, \ldots, x_d]]$, et $\bar{B}$ est la $k[[x_2, \ldots, x_d]] = \bar{A}$-algèbre $B/x_1 B$. Comme dans le cas (ii) $\bar{B}$ est analytiquement séparable, on peut dans ce cas choisir les éléments $x_2, \ldots, x_d$ d'une telle manière que $\bar{B}$ devienne une $k[[x_2, \ldots, x_d]]$ - algèbre génériquement étale. Alors il s'ensuit immédiatement que $B$ est également une $A$-algèbre génériquement étale, ce qui est aussi vrai, bien entendu, dans le cas (i).

Soit $b \in B$ un élément qui engendre l'extension de corps $R(A)$ sur $k((x))$. Soit $\varepsilon \in k[[x]]$ le discriminant de l'équation unitaire irréductible de $b$ au-dessus de $k[[x]]$. Dans le cas (ii), on peut choisir $b$ de façon que $x_1$ ne divise pas $\varepsilon$. Ecrivons de

plus Spec B - U = $V(x_1) \cup Y$ , où Y ne contient aucune composante irréductible de $V(x_1)$ . Soit C l'anneau $\Gamma(Y,\mathcal{O}_Y)$ , où on prend Y avec sa structure induite réduite. En changeant au besoin les $x_2, \ldots, x_d$ , on peut supposer que $V(x_d)$ n'est pas contenu dans l'image de Y dans Spec A , et que de plus dans le cas (ii) $V(x_d)$ n'est pas contenu dans $V(\mathfrak{e})$ .

Lemme 6.8 . Soit $A_o = k[[x_1, \ldots, x_{d-1}]]\{x_d\}$ le localisé strict de $k[[x_1, \ldots, x_{d-1}]][x_d]$ au point $x_1 = x_2 = \ldots = x_d = 0$ . Sous les conditions ci-dessus, il existe une $A^\circ$ -algèbre $B^\circ$ , un ouvert affine $U^\circ \subset \operatorname{Spec} B^\circ$ , et un isomorphisme $A \otimes_{A^\circ} B^\circ \simeq B$ tel que l'ouvert de Spec B induit de $U^\circ$ soit U .

La démonstration de ce lemme est analogue à celle de 1.5 : il suffit de trouver des $A^\circ$ -algèbres $B^\circ$ , $C^\circ$ et des isomorphismes $A \otimes_{A^\circ} B^\circ \simeq B$ , $A \otimes_{A^\circ} C^\circ \simeq C$ , parce qu'alors il existera ( [3] 1.4) un morphisme (surjectif) et un seul $B^\circ \longrightarrow C^\circ$ qui induise le morphisme $B \longrightarrow C$ . On prend donc $U^\circ = \operatorname{Spec} B^\circ - \{(\operatorname{Spec} C^\circ) \cup V(x_1)\}$ , et on constate immédiatement que U est induit de $U^\circ$ . L'existence de $C^\circ$ , et de $B^\circ$ dans le cas (ii), se prouve comme dans 1.5 . L'existence de $B^\circ$ dans le cas (i) est conséquence de ( [3] 5.1).(On peut aussi le démontrer directement en appliquant le lemme de Abyankhar à la ramification le long de $\{x_1 = 0\}$ , et descente).

Nous pouvons maintenant achever la démonstration de 6.7 . En appliquant encore une fois 4.3 , on trouve que

$$H^q(U, \mathbb{Z}/\ell) \simeq H^q(U^\circ, \mathbb{Z}/\ell) ,$$

d'où il résulte qu'il suffit de démontrer que ce dernier groupe est nul pour $q > d$ . Or Spec $A^\circ$ est limite de schémas affines et étales au-dessus de $k[[x_1, \ldots, x_{d-1}]][x_d]$ , donc Spec $B^\circ$ est limite de schémas de type fini au-dessus de Spec $k[[x_1, \ldots, x_{d-1}]]$ dont chaque fibre est de dimension $\leq 1$. Puisque $U^\circ \subset$ Spec $B^\circ[1/x_1]$ , on a

$$U^\circ = \varprojlim U^\circ_\alpha$$

où $U^\circ_\alpha$ est affine de type fini au-dessus du schéma $V^\circ$ = Spec $k[[x_1, \ldots, x_{d-1}]]\ [1/x_1]$ et où chaque fibre de $U^\circ_\alpha / V^\circ$ est de dimension $\leq 1$ .

Soit $f^\circ : U^\circ \longrightarrow V^\circ$ le morphisme structural. Puisque les fibres de $f^\circ_\alpha$ sont toutes de dimension $\leq 1$ , on a pour $v \in V^\circ$

$$\delta ( \mathbb{Z}/\ell, f^\circ_\alpha , v) \leq \dim O_{V^\circ,v} + 1 \leq d-1$$

(parce que $\dim O_{V^\circ,v} \leq d-2$). L'hypothèse de récurrence sur $d$ est donc appliquable au morphisme $f^\circ$ , et on trouve, en appliquant 6.1 ,

$$R^q f^\circ_{\alpha *}(\mathbb{Z}/\ell) = 0 \text{ au point } v \text{ si } q > \dim O_{V^\circ,v} + 1 ,$$

i.e. si $q > d - \dim \bar{v}$ . Donc $R^q f^\circ_{\alpha *}(\mathbb{Z}/\ell) \neq 0$ au point $v$ implique que $\dim \bar{v} \leq d-q$ . Donc pour l'inclusion $i : V^\circ \longrightarrow$ Spec $k[[x_1, \ldots, x_{d-1}]]$ (cf (6.0)) on a

$$\delta (R^q f^\circ_{\alpha *}(\mathbb{Z}/\ell)) \leq d-q ,$$

et l'hypothèse de récurrence, sous la forme 6.1 bis , appliquée au

morphisme $i$ , implique que

$$H^p(V^\circ, R^q f^\circ_{\alpha *}(\mathbb{Z}/\ell)) = 0 \quad \text{si} \quad p+q > d \ .$$

La suite spectrale de Leray

$$E_2^{pq} = H^p(V^\circ, R^q f^\circ_{*}(\mathbb{Z}/\ell)) \Longrightarrow H^{p+q}(U^\circ, \mathbb{Z}/\ell)$$

implique donc que $H^n(U^\circ_\alpha, \mathbb{Z}/\ell) = 0$ si $n > d$ , et comme $U^\circ$ est limite des $U^\circ_\alpha$ , on trouve que de même

$$H^n(U^\circ, \mathbb{Z}/\ell) = 0 \quad \text{si} \quad n > d \ .$$

Ceci achève la démonstration de 6.7 , donc du théorème 6.1 en caractéristique 0 .

## 7. Morphismes affines - fin de la démonstration.

Rappelons que pour terminer la démonstration de 6.1 en caractéristique $p > 0$ (toujours sous l'hypothèse de résolution), on s'était ramené par 6.6 à démontrer l'assertion suivante pour $d \geqslant 2$ :

Lemme 7.1 . Soit B un anneau local complet, normal, d'égales caractéristiques, à corps résiduel séparablement clos, et de dimension d . Soit $U \subset \operatorname{Spec} B$ un ouvert affine tel qu'il existe $x \in \operatorname{rad} B$ qui soit inversible sur U . Alors

$$H^q(U,\mathbb{Z}/\ell) = 0 \quad \text{si} \quad q > d \ .$$

De plus, par hypothèse de récurrence, on peut supposer que 6.1 soit vrai pour les valeurs de $\delta < d$, et que 7.1 soit déjà démontré dans le cas particulier 6.7 (ii).

Notons d'abord que la condition que $B$ soit normal n'est pas importante. En effet, soient $B$ arbitraire, $\pi : \bar{B} \longrightarrow B$ le normalisé de $B$, et $\bar{U} \subset \operatorname{Spec} \bar{B}$ l'image inverse de $U$. On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow (\mathbb{Z}/\ell)_U \longrightarrow \pi_*(\mathbb{Z}/\ell)_{\bar{U}} \longrightarrow C \longrightarrow 0 \ ,$$

où la dimension du support de $C$ est $< d$, donc $H^q(U,C) = 0$ si $q > d-1$. Puisque $H^q(U, \pi_* .) = H^q(\bar{U},.)$ (VIII 5.6), on voit que

(7.2)
$$H^q(U,\mathbb{Z}/\ell) = 0 \quad \text{si} \quad q > d \quad \text{équivaut à}$$
$$H^q(\bar{U},\mathbb{Z}/\ell) = 0 \quad \text{si} \quad q > d \ .$$

7.3.0. On va rappeler brièvement et sans démonstration des propriétés de la notion de séparabilité formelle dont nous avons besoin. Le lecteur peut consulter (EGA IV 18.11.10, 18.11.11) : Soit $A$ une $k$-algèbre locale noethérienne complète dont le corps résiduel soit une extension finie de $k$, et notons $A'$ le complété de l'anneau local $A \otimes_k k'$ (où $k' = k^{1/p}$). Alors l'extension $A \longrightarrow A'$ est radicielle (éventuellement infinie), comme on voit facilement - c'est l'exemple bien connu de Nagata. Il est donc inoffensif pour le calcul de la cohomologie étale de remplacer $A$ par $A'$ (VIII 1).

Or la condition sur une algèbre $A$ équidimensionelle de di-

mension d d'être formellement séparable, c'est-à-dire, d'être une extension finie génériquement étale de $k[[x_1,\dots,x_d]]$, s'exprime en termes du module $\hat{\Omega}^1_{A/k}$ (EGA IV 18.11.10), ou du critère jacobien (EGA $0_{IV}$ 22.6, IV 7.1)(*), et on voit que si A n'est pas analytiquement séparable, alors la k'-algèbre A' n'est pas réduite. On peut par exemple se réduire pour la démonstration au cas où A est donné par une équation $f = 0$, $f \in k[[x_1,\dots,x_{d+1}]]$ et appliquer le critère jacobien et le lemme suivant dont nous laissons la démonstration agréable au lecteur :

Lemme 7.3. Soit $f(x_1,\dots,x_n) \in k[[x_1,\dots,x_n]]$ une série formelle. Supposons que pour chaque $i = 1,\dots,n$ il existe un élément inversible $u_i \in k[[x_1,\dots,x_n]]$ tel que $u_i f$ soit une série en $x_i^p$ et en les $x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n$. Alors il existe un élément inversible $v \in k[[x_1,\dots,x_n]]$ tel que

$$vf \in k[[x_1^p, \dots, x_n^p]] .$$

Il en résulte facilement qu'en appliquant un nombre fini de fois le procédé de remplacer (A,k) par $(\bar{A}',k')$, où $\bar{A}'$ est le normalisé de A', on se ramène à la situation où A est bien formellement séparable. De même, on peut démontrer que pour un $x \in \operatorname{rad} A$ donné, l'anneau $(A/(x))_{réd}$ deviendra une algèbre formellement séparable par le même procédé, appliqué à l'algèbre A.

En appliquant VIII 1.1 et 7.2, on trouve

Corollaire 7.4. Il suffit de demontrer (7.1) sous la condition supplémentaire que B contienne un corps k au-dessus duquel B/rad B soit finie, et tel que la k-algèbre $(B/(x))_{réd}$ soit formellement

(*) Le corédacteur de ce séminaire n'est pas parvenu à élucider la signification de cette référence à une situation qui lui semble bien différente, et la justification de l'assertion qui suit. A. G.

séparable.

La démonstration de 7.1 dans ce cas consiste en une réduction au cas particulier qu'on a traité dans 6.7 (ii) :

Avec les notations de 7.1 , 7.4 , soit

$$D(x) = \sum_i r_i X_i$$

le diviseur de $x$ , de sorte que chaque $X_i$ soit un sous-schéma irréductible fermé de Spec B de codimension 1 qui est formellement séparable au-dessus de k (c'est-à-dire, tel que $B/\mathfrak{J}(X_i)$ soit une k -algèbre formellement séparable, œ qui équivaut d'ailleurs à l'assertion que $(B/(x))_{réd}$ soit formellement séparable). Choisissons $y \in \text{rad } B$ tel que l'on ait

$$D(y) = \sum_i (r_i - 1)X_i + \Gamma$$

où $\Gamma$ ne contient aucun $X_i$ , et considérons l'éclatement

$$f : Z \longrightarrow \text{Spec } B$$

de l'idéal $(x,y)$ . Les spectres des anneaux $B[y/x]$ et $B[x/y]$ forment un recouvrement ouvert affine de $Z$ .

Soit $B_1$ le localisé strict de $B[x/y]$ en l'idéal maximal engendré par $(\text{rad } B, x/y)$ . Pour chaque point fermé $Q$ de la fibre fermée de Spec $B[y/x] \longrightarrow$ Spec B , notons $A_Q$ le localisé strict de $B[y/x]$ en $Q$ , et $U_Q$ l'ouvert affine de Spec $A_Q$ image inverse de $U$ .

631

Lemme 7.5 . Pour démontrer 7.1 pour l'anneau B , il suffit de démontrer que pour $q > d$ ( $\geqslant 2$) on a

(i) $\qquad H^q(\text{Spec } B_1[y/x] , \mathbb{Z}/\ell) = 0$

et

(ii) $\qquad H^q(U_Q, \mathbb{Z}/\ell) = 0$ pour chaque $Q$ .

Démonstration. On a des immersions ouvertes

$$U \hookrightarrow \text{Spec } B[1/x] \hookrightarrow \text{Spec } B[y/x] ,$$

donc un diagramme

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\ i\ } & \text{Spec } B[y/x] \\ & {\scriptstyle k}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle j} & \\ & Z & \end{array} .$$

Si $Q$ est un point fermé de la fibre fermée de $\text{Spec } B[y/x] \longrightarrow \text{Spec } B$ , on a $(R^q i_* \mathbb{Z}/\ell)_Q = 0$ si $q > d$ , par hypothèse. Pour chaque point $P$ de $\text{Spec } B[y/x]$ qui n'est pas fermé dans la fibre fermée de $\text{Spec } B[y/x] \longrightarrow \text{Spec } B$ , on a $\delta(F,i,P) < d$ , où $F = (\mathbb{Z}/\ell)_U$ (notation de (6.0)). Donc en appliquant l'hypothèse de récurrence et 6.1 au morphisme $i$ , on trouve que pour le morphisme $\text{Spec } B[y/x] \longrightarrow \text{Spec } B$ on a

$$(R^q i_* \mathbb{Z}/\ell) \leqslant d-q .$$

Par conséquent, l'hypothèse de récurrence sous la forme 6.1 bis , appliqué à ce dernier morphisme, implique que

$$H^p(\text{Spec } B[y/x] , R^q i_* \mathbb{Z} / \ell) = 0$$

si $q > 0$ et $p > d-q$ . Avec la suite spectrale de Leray

$$E_2^{pq} = H^p(\text{Spec } B[y/x] , R^q i_* \mathbb{Z} / \ell) \Longrightarrow H^{p+q}(U, \mathbb{Z} / \ell) ,$$

on se ramène, pour la démonstration de 7.1 , à démontrer que

$$H^p(\text{Spec } B[y/x] , i_* \mathbb{Z} / \ell) = 0 \quad \text{si} \quad p > d .$$

On a une suite exacte

$$(7.6) \qquad 0 \longrightarrow \mathbb{Z} / \ell \longrightarrow i_*(\mathbb{Z} / \ell)_U \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

où $\delta(C) < d$ . Il suffit donc (encore par récurrence) de démontrer que

$$(7.7) \qquad H^p(\text{Spec } B[y/x] , \mathbb{Z} / \ell) = 0 \quad \text{si} \quad p > d .$$

Or l'immersion ouverte $\text{Spec } B[y/x] \xrightarrow{j} Z$ est obtenue en enlevant de $Z$ le sous-ensemble fermé $C$ "à l'infini", et s'identifie dans l'autre ouvert $\text{Spec } B[x/y]$ de $Z$ à l'ouvert $C = V(x/y)$ . Les $R^q j_* \mathbb{Z} / \ell$ sont concentrés sur $C$ , et le morphisme $C \longrightarrow \text{Spec } B$ est une immersion fermée. Par conséquent, on a $H^p(Z, R^q j_* \mathbb{Z} / \ell) = 0$ si $p$ et $q > 0$ . Puisque la fibre fermée de $Z \longrightarrow \text{Spec } B$ est de dimension 1 et que ce morphisme est propre, XII 5.3 bis implique que $H^p(Z, j_* \mathbb{Z} / \ell) = 0$ si $p > 2$ . La suite spectrale

$$E_2^{pq} = H^p(Z, R^q j_* \mathbb{Z} / \ell) \Longrightarrow H^{p+q}(\text{Spec } B[y/x] , \mathbb{Z} / \ell)$$

donne donc des isomorphismes

$$H^q(\text{Spec } B[y/x], \mathbb{Z}/\ell) \simeq H^0(Z, R^q j_* \mathbb{Z}/\ell) \simeq (R^q j_* \mathbb{Z}/\ell)_P$$

si $q > 2$, où $P$ est le point "à l'infini" de $Z$. Ces fibres ne sont autres (VIII 5) que

$$(R^q j_* \mathbb{Z}/\ell)_P \simeq H^q(\text{Spec } B_1[y/x], j_* \mathbb{Z}/\ell) .$$

D'après 7.7, il suffit donc de démontrer que ces derniers groupes sont nuls si $q > d$ ($\geq 2$). On a une suite exacte analogue à 7.6 qui, jointe à l'hypothèse de récurrence montre qu'il suffit que

$$H^q(\text{Spec } B_1[y/x], \mathbb{Z}/\ell) = 0 \quad \text{si} \quad q > d ,$$

d'où le lemme.

Démonstration de 7.5 (i).

Considérons l'ensemble fermé $C = V(x/y)$ de Spec $B[x/y]$, avec la structure induite réduite. On voit immédiatement que l'immersion fermée de $C$ dans Spec $B$ induite par le morphisme $Z \to$ Spec $B$ identifie $C$ au sous-schéma fermé $X = \bigcup X_i$ de Spec $B$. Puisque

$$D(x) = \sum r_i X_i$$

$$D(y) = \sum (r_i - 1) X_i + \Gamma ,$$

l'élément $x/y$ engendre l'idéal $\mathfrak{J}(X_i)$ localement au point générique de $X_i$, où l'anneau local est un anneau de valuation discrète parce que $B$ est normal. Par conséquent, le morphisme Spec $B[x/y] \to$ Spec $B$ est un isomorphisme au voisinage d'un tel point, et l'élément $x/y$ s'annule avec l'ordre 1 sur chacune des

composantes irréductibles $C_i$ (correspondant à $X_i$) de $C$ .

Puisque l'ensemble fermé $C$ se relève à Spec $B_1$ , cela reste vrai si l'on remplace l'anneau $B[x/y]$ par $B_1$ , donc $B_1/(x/y)$ est un anneau <u>complet</u> qui est une $k$ -algèbre formellement séparable.

Pour démontrer 7.5 (i), on peut d'abord appliquer 4.3 , qui permet de remplacer $B_1$ par son complété $\hat{B}_1$ , ce qui n'affecte pas l'anneau $B_1/(x/y)$ . D'après 7.2 , on peut de plus remplacer $\hat{B}_1$ par son normalisé $\bar{B}_1$ . Puisque $B_1$ (donc $\hat{B}_1$) est déjà régulier aux points génériques des $C_i$ , le morphisme Spec $\bar{B}_1 \to$ Spec $\hat{B}_1$ est un isomorphisme en ces points, donc $\bar{B}_1/(x/y)$ est encore une $k$ -algèbre formellement séparable. On est ainsi ramené au cas particulier 6.7 (ii), d'où le résultat.

<u>Démonstration de</u> 7.5 (ii).

Choisissons le point $Q$ de la fibre fermée de Spec $B[y/x] \longrightarrow$ Spec $B$ . Le localisé strict $A_Q$ s'écrit comme limite

$$A_Q = \varinjlim A$$

où $A$ parcourt une catégorie filtrante d'anneaux étales et de type fini au-dessus de $B[y/x]$ . Soit l'ouvert affine $U_A$ de Spec $A$ , image inverse de $U$ . Puisque $x$ est inversible sur $U_A$ , le morphisme $U_A \longrightarrow$ Spec $B$ est étale, et $U_A$ est normal. Par conséquent, si l'on dénote par $C$ le normalisé de $B$ dans le corps $R(A)$ des fonctions rationnelles sur $A$ , on a une immersion ouverte

$$U_A \longrightarrow \text{Spec } C \ .$$

Il suffit (VII 5.7) de démontrer que pour chaque $A$ , l'image de $H^q(U_A, \mathbb{Z}/\ell)$ dans $H^q(U_Q, \mathbb{Z}/\ell)$ est nulle si $q > d$ . Puisque $x$ est inversible sur $U_Q$ , le morphisme $U_Q \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ se factorise par rapport à $\operatorname{Spec} A[1/f]$ , si $f \in B$ est un élément arbitraire tel que $f$ soit divisible par $x$ dans $B[y/x]$ et que $f/x$ ne s'annule pas au point $Q$ . Il suffit ainsi de démontrer que pour un tel $f$ convenable, on a

$$H^q(U_{A,f}, \mathbb{Z}/\ell) = 0 \quad \text{si} \quad q > d \ ,$$

où $U_{A,f} = U_A - V(f)$ est l'ouvert affine de $\operatorname{Spec} A[1/f]$ , qui est aussi un ouvert affine de $\operatorname{Spec} C$ .

Soit $c \in k$ un élément tel que $y/x + c$ ne s'annule pas en $Q$ , et soit $J$ l'idéal dans $B$ de l'ensemble fermé $\Gamma \cap X$ . Alors si

$$f \equiv y + cx \pmod{J^N} \qquad N > 0 \ , \tag{7.8}$$

l'élément $f$ satisfait à la condition ci-dessus : En effet, on voit immédiatement que dans $\operatorname{Spec} B[y/x]$ on a $V(J) = V(x)$ . Donc (7.8) implique bien que $f$ est divisible par $x$ , d'où

$$f/x \equiv y/x + c \pmod{J} \ .$$

Puisque $J$ s'annule en $Q$ , et que $y/x + c$ n'est pas nul en $Q$ , ceci démontre notre assertion.

Or $\Gamma \cap X$ est un sous-ensemble fermé de $\operatorname{Spec} B$ de co-dimension 2 . Par conséquent, on peut choisir un $f$ satisfaisant à (7.8), appelons-le $z$ , tel que $V(z) \cap V(y)$ soit également de co-

dimension 2. Choisissons aussi des éléments $x_3, \ldots, x_d$ tels que $y,z,x_3, \ldots, x_d$ soit un système de paramètres de l'anneau $B$. Alors $B$, donc $C$ aussi, est une $k[[y,z,x_3, \ldots, x_d]]$-algèbre finie.

Soit $C^\circ$ le normalisé de $k[[y,z,x_3, \ldots, x_d]]$ dans la clôture séparable de $k((y,z,x))$ dans le corps des fonctions rationnelles $R(C)$, de sorte que $C$ soit une extension radicielle de $C^\circ$, et que $C^\circ$ soit une extension génériquement étale de $k((y,z,x))$ (où $x = x_3, \ldots, x_d$).

Choisissons une combinaison linéaire

$$f = az + by \qquad (a,b \in k),$$

telle que le morphisme

$$\operatorname{Spec} C^\circ \longrightarrow \operatorname{Spec} k[[z,y,x]]$$

soit étale au-dessus du point générique de $V(f)$, et tel que $f/x$ ne s'annule pas en $Q$ dans $\operatorname{Spec} B[y/x]$. Il suffit de démontrer que

$$H^q(U_{A,f}, \mathbb{Z}/\ell) = 0 \quad \text{si} \quad q > d,$$

donc (VIII 1.1) de démontrer que

$$H^q(U^\circ_{A,f}, \mathbb{Z}/\ell) = 0 \quad \text{si} \quad q > d,$$

où $U^\circ_{A,f}$ est l'ouvert de $\operatorname{Spec} C^\circ$ correspondant à l'ouvert $U_{A,f}$ de $\operatorname{Spec} C$, qui est un ouvert affine, comme on voit par descente (EGA IV 2.7.1 (xiii)). Mais par construction, l'élément $f$ de $C^\circ$ est inversible sur $U^\circ_{A,f}$, et $C^\circ/(f)$ est une $k$-algèbre formellement séparable. On est donc dans la situation de 6.7 (ii), ce qui achève la démonstration de 7.5 (ii), donc de 6.1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ABYANKHAR, S. Local uniformization on algebraic surfaces over ground fields of characteristic $p \neq 0$ . Annals of Math. vol. 63 (1963), et Résolution of singularities of embedded algebraic surfaces, Academic Press (1966).

[2] ABYANKHAR, S. Resolution of singularities of arithmetical surfaces. Arithmetical Algebraic Geometry, New York (1966).

[3] ARTIN, M. Etale coverings of schemes over hensel rings, Amer. Journal Math. vol 88, n°4 p 915-934 (1966).

[4] HIRONAKA, H. Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero I,II. Annals of Math. vol. 79, n° 1, 2 (1964).

[5] WEIERSTRASS, K. Einige auf die analytischen Functionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze. Mathematische Werke von K. Weierstrass, Bd 2, Berlin (1895).

[6] BOURBAKI, N. Algèbre commutative, Chap. 3.

Index des notations.


| | |
|---|---|
| $cd_{\ell}\ X$ | XIV 2.1.2 |
| $d(F)$ | IX 3.0 |
| $(G_m)_X$ | XII 6.6 |
| $\underline{Isom}_F(P,P')$ | XVII 5.4 |
| $K \boxtimes_{\mathcal{A}} L$ | IX 3.3 |
| $Pic\ X$ | XVII 7.3 |
| $Rf_!$ | XVII 7.1 |
| $R^+f_!$ | XVII 6.2.3 |
| $Tr_f$ | XI 4.0 |
| $X_{cl}$ | XVI 4.1 |
| $\Gamma^k(M)$ | XVII 5.5.2.3 |
| $\delta(F)$ | XIV 2.2 |
| $(\mu_n)_X$ | IX 3.0 |

## Index terminologique


| | |
|---|---|
| Acyclicité locale | XIX 4.1 |
| Acyclique (morphisme, schéma) | XV 1.3 XV 1.7 |
| Asphérique (morphisme, schéma) | XV 1.7 |
| Bon voisinages | XI 3.2 |
| Champ de Picard | XVIII 1.4.10. |
| Changement de base (morphisme de) | XII 4.1 |
| Complexe $I^{uple}$ (naïf ou non) | XVII 0.4 |
| Connexe par arcs | IX 2.12 |
| Constant (faisceau localement) | IX 2.0 |
| Constructible (faisceau) | IX 2.3 |
| Foncteur gradué | XVII 0.3 |
| Foncteur gradué exact | XVII 1.1.3. |
| Ind-p-groupe | IX 1.3 |
| $\ell$-dimension cohomologique | X 1. |
| Morphisme compactifiable | XVII 3.2 |
| Morphisme de KUnneth symétrique | XVII 5.5.17.2 |
| Morphisme trace | XVII 6.2 , XVIII 1.1.6 |
| Pureté | XVI 3.3 , XVI 3.6<br>XVI 3.7 , XIX 1<br>XIX 3.2 |
| Résolution de Godement | XII 3.4 , XVII 4.2 |
| Torsion (faisceau de) | IX 1.1 |
| Trace d'un torseur | XVII 6.3 |