SEMINAIRE DE GEOMETRIE ALGEBRIQUE DU BOIS MARIE

1962/64

SCHEMAS EN GROUPES

(SGA 3)

Un séminaire dirigé par

M. DEMAZURE et A. GROTHENDIECK

avec la collaboration de

M. ARTIN, J.E. BERTIN, P. GABRIEL, M. RAYNAUD, J.P. SERRE

TOME III

(STRUCTURE DES SCHEMAS EN GROUPES REDUCTIFS)

TABLE DES MATIERES

EXPOSE XIX — GROUPES REDUCTIFS. GENERALITES, par M. DEMAZURE. 1

1 - Rappels sur les groupes sur un corps algébriquement clos 2

2 - Schémas en groupes réductifs. Définition et premières propriétés 11

3 - Racines et systèmes de racines des schémas en groupes réductifs 16

4 - Racines et schémas en groupes vectoriels 20

5 - Un exemple instructif 26

6 - Existence locale des tores maximaux. Le groupe de Weyl 31

EXPOSE XX — GROUPES REDUCTIFS DE RANG SEMI-SIMPLE 1, par M. DEMAZURE. 35

1 - Systèmes élémentaires. Les groupes P_r et P_{-r} 35

2 - Structure des systèmes élémentaires 47

3 - Le groupe de Weyl 60

4 - Le théorème d'isomorphisme 71

5 - Exemples de systèmes élémentaires, applications 73

6 - Générateurs et relations pour un système élémentaire 80

EXPOSE XXI — DONNEES RADICIELLES, par M. DEMAZURE. 85

1 - Généralités 85

1.1 - Définitions, premières propriétés 85

1.2 - L'application p 89

2 - Relations entre deux racines 92

2.1 - Racines proportionnelles 92

2.2 - Racines orthogonales 94

2.3 - Cas général 95

3 - Racines simples, racines positives 97
3.1 - Systèmes de racines simples 97
3.2 - Systèmes de racines positives 101
3.3 - Caractérisation et conjugaison des systèmes de racines positives 106
3.4 - Ensembles de racines clos et symétriques 108
3.5 - Remarques diverses 112
3.6 - Chambres de Weyl 114
4 - Données radicielles réduites de rang semi-simple 2 117
5 - Le groupe de Weyl : générateurs et relations 121
6 - Morphismes de données radicielles 127
6.1 - Définition 127
6.2 - Isogénies 128
6.3 - Radical et coradical 130
6.4 - Produits de données radicielles 131
6.5 - Données radicielles induites et coinduites 133
6.6 - Poids 137
6.7 - Automorphismes 140
6.8 - p-morphismes de données radicielles réduites 142
7 - Structure 144
7.1 - Décomposition d'une donnée radicielle 144
7.2 - Propriétés des données radicielles irréductibles 147
7.3 - Matrice de Cartan 149
7.4 - Diagramme de Dynkin 151
7.5 - Compléments sur les p-morphismes 153

EXPOSE XXII GROUPES REDUCTIFS: DEPLOIEMENTS, SOUS-GROUPES, GROUPES-QUOTIENTS, par M. DEMAZURE. 156

1 - Racines et coracines. Groupes déployés et données radicielles 156
2 - Existence d'un déploiement. Type d'un groupe réductif 165
3 - Le groupe de Weyl 168
4 - Homomorphismes de groupes déployés 171
4.1 - La "grosse cellule" 171
4.2 - Morphismes de groupes déployés 177
4.3 - Quotients centraux de groupes réductifs 183

5 - Sous-groupes de type (R) ..... 187 E
5.1 - Groupes de type (RR) 187
5.2 - Sous-groupes de type (R) 191
5.3 - Transporteur strict de deux sous-groupes de type (R) Applications 194
5.4 - Sous-groupes de type (R) d'un groupe réductif déployé (généralités) 200
5.5 - Sous-groupes de Borel d'un groupe réductif déployé .. 204
5.6 - Sous-groupes de type (R) à fibres résolubles 212
5.7 - Théorème de Bruhat 221
5.8 - Schémas associés à un groupe réductif 228
5.9 - Propriétés particulières aux groupes de Borel 234
5.10- Sous-groupes de type (R) à fibres réductives 241
5.11- Sous-groupes de type (RC) 245
6 - Le groupe dérivé 251
6.1 - Préliminaires 251
6.2 - Groupe dérivé d'un groupe réductif 256
6.3 - Sous-groupes à quotients commutatifs 261

EXPOSE XXIII GROUPES REDUCTIFS : UNITICITE DES GROUPES EPINGLES, par M. DEMAZURE. 263

1 - Epinglages ..... 263 E'
2 - Générateurs et relations pour un groupe épinglé 271
3 - Groupes de rang semi-simple 2 285
3.1 - Généralités 285
3.2 - Groupes de type A_2 287
3.3 - Groupes de type B_2 291
3.4 - Groupes de type G_2 295
3.5 - Forme explicite du théorème de générateurs et relations 302
4 - Unicité des groupes épinglés : théorème fondamental 305
5 - Corollaires du théorème fondamental 313
6 - Systèmes de Chevalley 318

EXPOSE XXIV AUTOMORPHISMES DES GROUPES REDUCTIFS, par M. DEMAZURE. 323

1 - Schéma des automorphismes d'un groupe réductif 324

2 - Automorphismes et sous-groupes 337

3 - Schéma de Dynkin d'un groupe réductif. Groupes quasi-déployés 334

4 - Isotrivialité des groupes réductifs et des fibrés principaux sous les groupes réductifs 359

4.1 - Définitions. Théorème d'isotrivialité 359

4.2 - Démonstration : le cas semi-simple 361

4.3 - Démonstration : cas général 364

4.4 - Utilisation de l'existence de tores maximaux 366

5 - Décomposition canonique d'un groupe adjoint ou simplement connexe 370

6 - Automorphismes des groupes de Borel des groupes réductifs.... 378

7 - Représentabilité des foncteurs $\underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-}gr}(G,H)$, G réductif..... 383

7.1 - Le cas déployé 383

7.2 - Cas général 390

7.3 - Phénomènes particuliers à la caractéristique 0 392

7.4 - Un exemple 397

8 - Appendice : cohomologie d'un groupe lisse sur un anneau hensélien, cohomologie et foncteur Π 401

EXPOSE XXV LE THEOREME D'EXISTENCE, par M. DEMAZURE. 410

1 - Enoncé du théorème 410

2 - Théorème d'existence : construction d'un morceau de groupe .. 412

3 - Théorème d'existence : fin de la démonstration 421

4 - Appendice 424

(POSE XXVI SOUS-GROUPES PARABOLIQUES DES GROUPES REDUCTIFS, par M. DEMAZURE. 426

1 - Rappels, sous-groupes de Levi 426

2 - Structure du radical unipotent d'un sous-groupe parabolique 436

3 - Schéma des sous-groupes paraboliques d'un groupe réductif.. 443

4 - Position relative de deux groupes paraboliques 453

4.1 - Un résultat préliminaire 453

4.2 - Position transversale 454

4.3 - Sous-groupes paraboliques opposés 464

4.4 - Position osculatrice 470

4.5 - Position standard 474

5 - Théorème de conjugaison 479

6 - Sous-groupe paraboliques et tores triviaux 494

7 - Donnée radicielle relative 503

NDEX DES NOTATIONS 518

NDEX TERMINOLOGIQUE (pour les tomes I, II, III) 520

Exposé XIX

GROUPES REDUCTIFS - GENERALITES

par M. DEMAZURE

La suite de ce Séminaire est consacrée à l'étude des groupes réductifs. Le but principal en est la généralisation des résultats classiques de CHEVALLEY (BIBLE et TOHOKU) aux schémas de base arbitraires, les deux résultats centraux étant le théorème d'unicité (Exp. XXIII) et le théorème d'existence (Exp. XXV) des schémas en groupes réductifs "épinglés" correspondant à des "données radicielles" prescrites. Les démonstrations employées sont inspirées de celles de Chevalley, la technique des schémas permettant de leur donner une efficacité accrue.

Les résultats du premier volume de la BIBLE (Exp. 1 à 13) seront systématiquement utilisés. En revanche, nous démontrerons directement sur un préschéma quelconque les résultats du second volume (théorème d'isomorphisme en particulier); la connaissance des démonstrations sur un corps algébriquement clos n'est donc pas absolument indispensable.

Dans la démonstration de ces deux résultats fondamentaux, nous n'utiliserons que les résultats les plus élémentaires de la théorie des groupes de type multiplicatif, contenus pour l'essentiel dans Exp. VIII et IX; nous ferons d'autre part un usage essentiel des résultats de l'Exposé XVIII. Le lecteur s'intéressant spécialement aux théorèmes d'existence et d'unicité pourra dans une première lecture sauter les Exposés X à XVII.

1. Rappels sur les groupes sur un corps algébriquement clos.

1.1. Dans ce numéro, k désignera toujours un corps algébriquement clos. Comme annoncé ci-dessus, les seuls résultats de BIBLE utilisés par la suite, se trouvent dans le volume 1 (Exposés I à XIII). Tous les résultats de BIBLE (loc.cit.) concernant les groupes semi-simples sont valables plus généralement pour des groupes réductifs (définition ci-dessous) et leur démonstration est identique, avec les modifications anodines ci-après :

- 9-06, définition 3 (!), voir ci-dessous.
- 12-09, théorème 2, e) supprimer "fini".
- 13-08, théorème 2, remplacer "rang" par "rang semi-simple".
- 13-12, corollaire 2 au théorème 3, remplacer "rang" par "rang réductif".

1.2. Soit G un k-groupe lisse affine et connexe. Le radical de G (BIBLE, 9-06, prop. 2) est le sous-groupe réduit associé à la composante neutre de l'intersection des sous-groupes de Borel de G; c'est aussi le plus grand sous-groupe résoluble lisse connexe distingué de G; nous le noterons rad(G). Le radical unipotent de G est la partie unipotente du radical de G ; c'est aussi le plus grand sous-groupe unipotent lisse connexe distingué de G; nous le noterons $\mathrm{rad}^u(G)$.

1.3. Si G est un k-groupe lisse affine et connexe et si Q est un tore de G, alors le centralisateur $\mathrm{Cent}_G(Q)$ de Q dans G est un sous-groupe fermé de G, lisse (Exp. XI, 2.4) et connexe (BIBLE, 6-14, th. 6).

On a la relation fondamentale :

$$\mathrm{rad}^u(\underline{\mathrm{Cent}}_G(Q)) = \mathrm{rad}^u(G) \cap \underline{\mathrm{Cent}}_G(Q) .$$

En effet, on a, par BIBLE, 12-09, cor. au th. 1, la relation $\mathrm{rad}^u(\underline{\mathrm{Cent}}_G(Q))(k) \subset \mathrm{rad}^u(G)(k)$. Pour prouver l'égalité précédente, il suffit donc de voir que $\mathrm{rad}^u(G) \cap \underline{\mathrm{Cent}}_G(Q)$ est lisse et connexe. Si on fait opérer Q sur $\mathrm{rad}^u(G)$ par automorphismes intérieurs, le groupe précédent n'est autre que le schéma des invariants de cette opération. Or :

Lemme 1.4. Soient S un préschéma, Q un S-tore, H un S-préschéma en groupes sur lequel Q opère. Supposons H séparé sur S de façon que le foncteur des invariants H^Q soit représentable (Exp. VIII, 6.5 d)). Si H est lisse sur S (resp. lisse, affine, et à fibres connexes sur S), H^Q l'est aussi.

Considérons en effet le produit semi-direct $G = H \cdot Q$. Il est lisse sur S (resp. lisse, affine et à fibres connexes sur S). On a évidemment $\underline{\mathrm{Cent}}_G(Q) = H^Q \cdot Q$ et celui-ci est lisse sur S (Exp. XI, 2.4) (resp. lisse et affine sur S , et à fibres connexes (1.3)). Comme Q est lisse, affine et à fibres connexes sur S , on a terminé.

Signalons un cas particulier du résultat précédent : si G est un k-groupe lisse affine et connexe et si T est un tore maximal de G , $\underline{\mathrm{Cent}}_G(T) = T(\underline{\mathrm{Cent}}_G(T) \cap \mathrm{rad}^u(G))$. En effet (BIBLE, 6-14, th. 6), $\underline{\mathrm{Cent}}_G(T)$ est un groupe résoluble, donc produit semi-direct de son tore maximal T et de son radical unipotent.

En vertu du théorème de densité (BIBLE, 6-13, th. 5), il en résulte que si G est un k-groupe lisse affine et connexe, la réunion des $T \cdot \mathrm{rad}^u(G)$, T parcourant l'ensemble des tores maximaux de G, est dense dans G.

1.5. On rappelle que le rang réductif du k-groupe lisse et affine G est la dimension commune des tores maximaux de G. Nous le noterons $\mathrm{rgred}(G/k)$ ou $\mathrm{rgred}(G)$. Pour que $\mathrm{rgred}(G/k) = 0$, il faut et il suffit que G soit unipotent (i.e. que $G = \mathrm{rad}^u(G)$), par BIBLE, 6-10, cor. 1 au th. 4.

Si H est un sous-groupe invariant du k-groupe lisse et affine G, le quotient G/H est affine et lisse (Exp. VI). De plus (BIBLE, 7-05, th. 3, a) et c)), on a

$$\mathrm{rgred}(G) = \mathrm{rgred}(G/H) + \mathrm{rgred}(H) .$$

1.6. On dit que le k-groupe lisse, affine et connexe G est réductif si $\mathrm{rad}(G)$ est un tore, c'est-à-dire si $\mathrm{rad}^u(G) = e$. Si G est un k-groupe réductif et si Q est un tore de G, alors $\mathrm{Cent}_G(Q)$ est réductif (1.3). En particulier, si T est un tore maximal de G, $\mathrm{Cent}_G(T) = T$. Il en résulte que le centre de G est contenu dans tout tore maximal, donc est diagonalisable. Le radical de G est alors le tore maximal (unique) de $\mathrm{Cent}(G)$: en effet, celui-ci est un sous-groupe lisse invariant résoluble connexe, donc contenu dans $\mathrm{rad}(G)$; réciproquement $\mathrm{rad}(G)$ est un tore invariant dans G, donc central (BIBLE, 4-07, cor. à la prop. 2).

Si G est réductif et si $\dim(G) \neq \mathrm{rgred}(G)$, alors $\dim(G) - \mathrm{rgred}(G) \geqslant 2$. En effet, cette différence est toujours paire (cf. 1.10 ci-dessous).

1.7. Soient G un k-groupe lisse affine et connexe et H un sous-groupe lisse et connexe invariant. Alors $\mathrm{rad}(H) = (\mathrm{rad}(G) \cap H)^{\circ}_{\mathrm{red}}$ et $\mathrm{rad}^u(H) = (\mathrm{rad}^u(G) \cap H)^{\circ}_{\mathrm{red}}$, comme on le voit aussitôt. En particulier, si G est réductif, H l'est aussi.

Soit $f : G \longrightarrow G'$ un morphisme surjectif de k-groupes lisses affines et connexes. Alors $f(\mathrm{rad}^u(G)) = \mathrm{rad}^u(G')$. Il est d'abord clair que f envoie $\mathrm{rad}^u(G)$ dans $\mathrm{rad}^u(G')$. Introduisant $H = (f^{-1}(\mathrm{rad}^u(G')))^{\circ}_{\mathrm{red}} \supset \mathrm{rad}^u(G)$, on a $\mathrm{rad}^u(H) = \mathrm{rad}^u(G)$ et on est ramené au cas où $G = H$, i.e. où G' est unipotent. Comme la réunion des $T \cdot \mathrm{rad}^u(G)$ (T parcourant l'ensemble des tores maximaux de G) est dense dans G, la réunion des $f(T)\, f(\mathrm{rad}^u(G))$ est dense dans G'; mais $f(T)$ est composé d'éléments semi-simples, donc $f(T) = e$, G' étant unipotent; ce qui montre que $f(\mathrm{rad}^u(G))$ est dense dans G' donc $f(\mathrm{rad}^u(G)) = G'$ (cf. BIBLE, 5-13, lemme 4). En particulier, tout quotient d'un groupe réductif est réductif.

(Nota, on peut prouver sous les mêmes hypothèses que $f(\mathrm{rad}(G)) = \mathrm{rad}(G')$).

1.8. On dit que le k-groupe lisse affine et connexe G est semi-simple si $\mathrm{rad}(G) = e$, c'est-à-dire si G est réductif et $\mathrm{Cent}(G)$ fini. Si G est un k-groupe lisse affine connexe quelconque, alors $G/\mathrm{rad}(G)$ est semi-simple (BIBLE, 9-06, prop. 2), $G/\mathrm{rad}^u(G)$ est réductif. On appelle rang semi-simple de G et on note $\mathrm{rgss}(G/k)$ ou $\mathrm{rgss}(G)$ le rang réductif de $G/\mathrm{rad}(G)$.

Si G est réductif, on a donc

$$\mathrm{rgred}(G) = \mathrm{rgss}(G) + \dim(\mathrm{rad}(G)) .$$

Si G est un groupe lisse affine et connexe et si Q est un sous-tore central de G, alors G/Q est semi-simple si et seulement si G est réductif et $Q = \mathrm{rad}(G)$. En effet, si G/Q est semi-simple, $Q \supset \mathrm{rad}(G)$, donc $\mathrm{rad}(G)$ est un tore, donc G est réductif, donc $\mathrm{rad}(G)$ est le tore maximal de $\underline{\mathrm{Cent}}(G)$, donc $\mathrm{rad}(G) = Q$. Si G est réductif et si Q est un sous-groupe central, alors (G/Q est réductif et) $\mathrm{rgss}(G) = \mathrm{rgss}(G/Q)$.

1.9. Si K est une extension algébriquement close de k et si G est un k-groupe affine lisse connexe, G est réductif (resp. semi-simple) si et seulement si G_K l'est et on a

$$\mathrm{rgred}(G/k) = \mathrm{rgred}(G_K/K) ,$$
$$\mathrm{rgss}(G/k) = \mathrm{rgss}(G_K/K)$$

1.10. Soit G un k-groupe lisse et connexe et soit T un tore de G. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G se décompose sous l'action de T (par $T \longrightarrow G$ et l'opération adjointe de G) en

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \oplus \coprod_{r \in R} \mathfrak{g}^r ,$$

où les $r \in R$ sont des caractères non triviaux de T et où les $\mathfrak{g}^r$ sont $\neq 0$.

Les caractères $r \in R$ sont dits les racines de G par rapport à T. Par Exp. II, 5.2.3, (i), on a

$$\mathcal{L}^{\circ} = \mathrm{Lie}(\underline{\mathrm{Cent}}_G(T)) .$$

En particulier, T est son propre centralisateur si et seulement si $\mathcal{L}^{\circ} = \mathrm{Lie}(T)$, (Exp. XII 6.6 b), ou 1.3 dans le cas où G est affine). Cette condition entraîne que T est maximal et que $\underline{\mathrm{Cent}}(G) \subset T$, donc (Exp. XII 8.8 d)) $\underline{\mathrm{Cent}}(G) = \bigcap_{r \in R} \mathrm{Ker}\ r$; de plus $\underline{\mathrm{Cent}}(G)$ est alors affine, donc $G \to G/\underline{\mathrm{Cent}}(G)$ affine; comme ce dernier groupe est affine (Exp. XII 6.1), G l'est aussi.

Lorsque G est réductif et T maximal, les racines au sens précédent coïncident avec les racines au sens de BIBLE, 12-04, def. 1; ces dernières sont en effet des racines au sens de ce n° (BIBLE 13-05, th. 1, c)) et il y en a $\dim(G) - \dim(T)$ (BIBLE 13-11, cor. 2 au th. 3). De plus, si r est une racine, $-r$ en est aussi une (BIBLE, 12-05, cor. à la prop. 1) (Comme à l'habitude, on note indifféremment additivement ou multiplicativement la structure de groupe de $\mathrm{Hom}_{k\text{-gr}}(T, \underline{G}_{m\ k})$). Il s'ensuit que

$$\dim(G) - \mathrm{rgred}(G) = \mathrm{Card}(R)$$

est toujours pair.

Le rang semi-simple du groupe réductif G est le rang de la partie R du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{k\text{-gr}}(T, \underline{G}_{m\ k}) \otimes \underline{\mathbb{Q}}$ (BIBLE, 13-08, th. 2).

Lemme 1.11. Soient k un corps algébriquement clos, G un k-groupe lisse affine connexe, T un tore de G, $W(T) = \underline{\mathrm{Norm}}_G(T)/\underline{\mathrm{Cent}}_G(T)$ le groupe de Weyl de G par rapport à T. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) G est réductif , T est maximal , $\mathrm{rgss}(G) = 1$.

(ii) G est réductif , T est maximal , $G \neq T$; il existe un sous-tore Q de T , de codimension 1 dans T , central dans G .

(iii) G n'est pas résoluble et $\dim(G) - \dim(T) \leqslant 2$.

(iv) $W(T) \neq e$ et $\dim(G) - \dim(T) \leqslant 2$.

(v) $W(T) = (\underline{\underline{\mathbb{Z}}}/2\underline{\underline{\mathbb{Z}}})_k$ et $\dim(G) - \dim(T) = 2$.

De plus, sous ces conditions, il y a exactement deux racines de G par rapport à T; elles sont opposées. Sous les conditions de (ii), $Q = \mathrm{rad}(G)$.

On a évidemment (v) $\Longrightarrow$ (iv) . On a (iv) $\Longrightarrow$ (iii) par BIBLE, 6-04, cor. 3 au th. 1 . Prouvons (iii) $\Longrightarrow$ (ii) : soit U le radical unipotent de G ; on sait que G/U est réductif et n'est pas un tore (sinon G serait résoluble); on a donc (1.6)

$$\dim(G/U) - \mathrm{rgred}(G/U) \geqslant 2 ;$$

mais $\mathrm{rgred}(G) = \mathrm{rgred}(G/U) + \mathrm{rgred}(U) = \mathrm{rgred}(G/U)$, d'où

$$\dim(G) - \dim(U) - \mathrm{rgred}(G) = \dim(G/U) - \mathrm{rgred}(G/U) \geqslant 2 \geqslant$$

$$\geqslant \dim(G) - \dim(T) \geqslant \dim(G) - \mathrm{rgred}(G) .$$

Cela donne $\dim(U) = 0$, donc G est réductif, $\mathrm{rgred}(G) = \dim(T)$, donc T est maximal, $\dim(G) - \dim(T) = 2$. Par BIBLE, 10-09, prop. 8 , il existe un tore singulier Q de codimension 1 dans T ; alors $\underline{\mathrm{Cent}}_G(Q)$ est réductif (1.6), non résoluble (définition d'un tore singulier), donc $\dim(\underline{\mathrm{Cent}}_G(Q)) - \mathrm{rgred}(G) \geqslant 2$, ce qui prouve que $G = \underline{\mathrm{Cent}}_G(Q)$ et Q est central dans G .

Prouvons (ii) $\Longrightarrow$ (i) . On sait que G/Q est réductif (1.7) et que $\mathrm{rgred}(G/Q) = 1$, donc $\mathrm{rgss}(G/Q) = 0$ ou 1. Le premier cas est impossible, car il entraînerait $\mathrm{rgss}(G) = 0$, donc $G = T$; on a donc $\mathrm{rgred}(G/Q) = \mathrm{rgss}(G/Q) = 1$, ce qui prouve

que G/Q est semi-simple; donc Q est le radical de G et $\mathrm{rgss}(G) = 1$. Prouvons enfin (i) $\Longrightarrow$ (v). Si Q est le radical de G, on a $\dim(T) - \dim(Q) = 1$ et Q est central dans G, donc $G = \underline{\mathrm{Cent}}_G(Q)$, ce qui prouve que Q est un tore singulier ; par BIBLE, 11-07, th. 2, on a $W_G(T) = (\underline{\underline{\mathbb{Z}}}/2\underline{\underline{\mathbb{Z}}})_k$; par BIBLE, 12-01, lemme 1, on a $\dim(G) - \dim(T) = 2$. Il y a donc au plus deux racines de G par rapport à T, or il y en a au moins deux, opposées (1.10).

Proposition 1.12. Soient k un corps algébriquement clos, G un k-groupe lisse et connexe, T un tore de G, R l'ensemble des racines de G par rapport à T et

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^\circ \oplus \coprod_{r \in R} \mathfrak{g}^r, \qquad \mathfrak{g}^r \neq 0,$$

la décomposition de $\mathfrak{g}$ sous $\mathrm{Ad}(T)$. Pour chaque $r \in R$, soit T_r le tore maximal de $\mathrm{Ker}\, r$ et $Z_r = \underline{\mathrm{Cent}}_G(T_r)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) G est affine, réductif; T est maximal.

(ii) $\mathfrak{g}^\circ = \mathfrak{t}$, chaque Z_r $(r \in R)$ est réductif.

(iii) $\mathfrak{g}^\circ = \mathfrak{t}$, chaque $\mathfrak{g}^r$ $(r = R)$ est de dimension 1; et si $r, s \in R$ et $k \in \underline{\mathbb{Q}}$ sont tels que $s = k\,r$, alors $k = \pm 1$; pour chaque $r \in R$, il existe un $w_r \in G(k)$ qui normalise T, centralise T_r, mais ne centralise pas T.

De plus, sous ces conditions, chaque Z_r est de rang semi-simple 1 et on a $\mathrm{Lie}(Z_r) = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}^r \oplus \mathfrak{g}^{-r}$.

Si G est affine et réductif et si T est maximal, chaque Z_r est affine et réductif (1.6), de tore maximal T ; de plus, T est son propre centralisateur (1.6), donc $\mathfrak{g}^\circ = \mathfrak{t}$, ce qui prouve (i) $\Longrightarrow$ (ii). D'autre part

$\mathfrak{g}^\circ = \mathfrak{t}$ entraîne que T est maximal et G affine (1.10.) donc chaque Z_r affine (1.3). De toutes façons, on a par Exp. II 5.2.2

$$\mathrm{Lie}(Z_r) = \mathfrak{g}^{T_r} = \mathfrak{g}^\circ \oplus \coprod_{s \in R \cap \underline{Q}\, r} \mathfrak{g}^r .$$

On a donc

$$\mathrm{Lie}(Z_r) \supset \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}^r \oplus \mathfrak{g}^{-r} ,$$

ce qui entraîne $Z_r \neq T$; par 1.11 , cela donne aussitôt (ii)$\Longleftrightarrow$(iii) et les compléments. Il reste à prouver (ii)$\Longrightarrow$(i); on sait déjà que (ii) entraîne que G est affine. Soit U son radical unipotent; il est distingué dans G , son algèbre de Lie est invariante sous $\mathrm{Ad}(T)$. On a donc

$$\underline{\mathrm{Lie}}(U) = \underline{\mathrm{Lie}}(U) \cap \mathfrak{g}^\circ + \coprod_{r \in R} \underline{\mathrm{Lie}}(U) \cap \mathfrak{g}^r .$$

Par 1.3 , on a

$$U \cap T = U \cap \underline{\mathrm{Cent}}_G(T) = \mathrm{rad}^u(\underline{\mathrm{Cent}}_G(T)) = \mathrm{rad}^u(T) = e ,$$

$$U \cap Z_r = U \cap \underline{\mathrm{Cent}}_G(T_r) = \mathrm{rad}^u(\underline{\mathrm{Cent}}_G(T_r)) = \mathrm{rad}^u(Z_r) = e .$$

On a donc

$$\underline{\mathrm{Lie}}(U) \cap \mathfrak{g}^\circ = \underline{\mathrm{Lie}}(U) \cap \mathfrak{t} = \underline{\mathrm{Lie}}(U \cap T) = 0 ,$$

$$\underline{\mathrm{Lie}}(U) \cap \mathfrak{g}^r \subset \underline{\mathrm{Lie}}(U) \cap \underline{\mathrm{Lie}}(Z_r) = \underline{\mathrm{Lie}}(U \cap Z_r) = 0 ;$$

donc $\underline{\mathrm{Lie}}(U) = 0$ et $U = e$.

Corollaire 1.13. Soient k un corps algébriquement clos, G un k-groupe lisse et connexe , T un tore de G , R l'ensemble des racines de G par rapport à T et

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^\circ \oplus \coprod_{r \in R} \mathfrak{g}^r$$

comme ci-dessus. Pour chaque $r \in R$, soit T_r le tore maximal de $\mathrm{Ker}\ r$ et $Z_r = \mathrm{Cent}_G(T_r)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) G est affine, semi-simple ; T est maximal.

(ii) $\mathfrak{g}^\circ = \mathfrak{t}$, chaque Z_r est réductif et $\bigcap_{r \in R} \mathrm{Ker}\ r$ est fini.

2. Schémas en groupes réductifs . Définitions et premières propriétés .

2.1. Si G est un préschéma en groupes sur S, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) G est affine et lisse sur S, et à fibres connexes.

(ii) G est affine et plat sur S, de présentation finie sur S, et à fibres géométriques intègres.

Ces propriétés sont stables par changement de base et locales pour (fpqc).

2.2. Si le S-préschéma en groupes G vérifie les conditions précédentes, et si Q est un tore (Exp. IX 1.3) de G, alors $\mathrm{Cent}_G(Q)$ est représentable par un sous-préschéma en groupes fermé de G qui vérifie également ces conditions (1.3 et Exp. XI 6.11).

Nous utiliserons systématiquement la notation suivante ; si S est un préschéma et s un point de S, on notera $\bar{s}$ le spectre d'une clôture algébrique $\overline{k(s)}$ de $k(s)$.

Lemme 2.3. Soient S un préschéma, G un S-préschéma en groupes lisse et affine sur S, à fibres connexes, T un tore de G. L'ensemble des $s \in S$ tels que $G_{\overline{s}}$ soit un $\overline{s}$-groupe réductif, de rang semi-simple 1 et de tore maximal $T_{\overline{s}}$, est un ouvert U de S.

Comme G et T sont plats sur S, la fonction

$$s \longmapsto \dim(G_{\overline{s}}) - \dim(T_{\overline{s}})$$

est localement constante; soit U_1 l'ouvert des points de S où elle vaut 2. Considérons maintenant le groupe de Weyl (6.3)

$$W_G(T) = \underline{\mathrm{Norm}}_G(T)/\underline{\mathrm{Cent}}_G(T) ,$$

La fonction

$$s \longmapsto \text{nombre de points de } W(T)_{\overline{s}}$$

est semi-continue inférieurement (6.3 (ii)). Soit U_2 l'ensemble des points de S où cette fonction est > 1 ; c'est un ouvert. Il résulte de 1.11 que l'ensemble des s tels que $G_{\overline{s}}$ soit réductif, de rang semi-simple 1, de tore maximal $T_{\overline{s}}$, est $U = U_1 \cap U_2$.

Remarque 2.4. Le groupe $W(T)_U$ est isomorphe à $(\underline{\mathbb{Z}}/2\underline{\mathbb{Z}})_U$. Il est en effet étale et fini sur U (6.3 (iii)); comme le foncteur des automorphismes de $(\underline{\mathbb{Z}}/2\underline{\mathbb{Z}})_U$ est le groupe unité, il suffit de vérifier l'assertion localement, or elle est immédiate si l'Algèbre qui définit $W(T)_U$ est un $\underline{O}_U$-Module libre.

Théorème 2.5. Soient S un préschéma, G un S-préschéma en groupes affine et de présentation finie sur S, à fibres connexes. Supposons G plat sur S en $e_G(s_o)$ et la fibre géométrique $G_{\overline{s}_o}$ (réduite et) réductive (resp. semi-simple).

Il existe un ouvert U **de** S , **contenant** s_o **et un morphisme étale surjectif** $S' \to U$ **tels que**

(i) G_U **soit lisse sur** S , **à fibres géométriques réductives, (resp. semi-simples) de rang réductif et de rang semi-simple constants.**

(ii) $G_{S'}$ **possède un tore maximal** T , **le groupe de Weyl** (6.3)

$$W_{G_{S'}}(T) = \underline{\mathrm{Norm}}_{G_{S'}}(T)/\underline{\mathrm{Cent}}_{G_{S'}}(T) = \underline{\mathrm{Norm}}_{G_{S'}}(T)/T$$

étant fini sur S' .

Comme G est plat sur S en $e_G(s_o)$ et G_{s_o} réduit , G est lisse sur S en $e_G(s_o)$. Comme G est à fibres connexes, on peut quitte à restreindre S , supposer G lisse sur S (VI_B 3.10). Par Exp. XI 5.8 a) et Exp. X, 4.5 (voir aussi 6.1), il existe un $S'' \to S$ étale , un point s''_o au-dessus de s_o et un tore trivial T de $G_{S''}$, maximal en s''_o . Comme un morphisme étale est ouvert et que les assertions de (i) sont locales pour (et) , on peut donc supposer que G possède un tore trivial T , maximal en s_o .

Ecrivons donc $T = D_S(M)$ et soit

$$\mathfrak{g} = \coprod_{m \in M} \mathfrak{g}^m ,$$

la décomposition de $\mathfrak{g} = \underline{\mathrm{Lie}}(G/S)$ sous $\mathrm{Ad}(T)$ (Exp. I 4.7.3).

Soit R l'ensemble des $m \in M$, $m \neq 0$, tels que $\mathfrak{g}^m(s_o) \neq 0$.

Comme G_{s_o} est réductif, on a $\mathfrak{g}^0(s_o) = \mathfrak{t}(s_o)$ (on note $\mathfrak{t} = \underline{\mathrm{Lie}}(T/S)$) , donc

$$\mathfrak{g}(s_o) = \mathfrak{t}(s_o) \oplus \coprod_{r \in R} \mathfrak{g}^r(s_o) .$$

Comme les Modules en cause sont localement libres, on peut, quitte à restreindre

S , supposer les $\mathfrak{g}^r$ libres et

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \coprod_{r \in R} \mathfrak{g}^r \ .$$

Soit alors T_r le tore maximal du noyau de r (on rappelle, cf. Exp. XII 1.12 , qu'un groupe de type multiplicatif possède un unique tore maximal; c'est d'ailleurs à peu près trivial par descente, le cas diagonalisable étant évident). Soit $Z_r = \underline{\mathrm{Cent}}_G(T_r)$; le groupe Z_r vérifie les hypothèses de 2.3 , sa fibre $Z_{r\,\overline{s}_o}$ est réductive, de rang semi-simple 1, de tore maximal $T_{\overline{s}_o}$ (1.12). Par 2.3 , il existe donc un ouvert U_r de S , contenant s_o , tel que $Z_r|U_r$ ait ses fibres réductives. Posons $U = \bigcap_{r \in R} U_r$; par 1.12, $G_{\overline{s}}$ est réductif , de tore maximal $T_{\overline{s}}$, pour $s \in U$. Pour tout $s \in U$, l'ensemble des racines de $G_{\overline{s}}$ par rapport à $T_{\overline{s}}$ s'identifie à R , on a donc $\mathrm{rgred}(G_{\overline{s}}) = \mathrm{rg}(M)$, $\mathrm{rgss}(G_{\overline{s}}) = \mathrm{rg}(R)$ (cf. 1.10). On a donc prouvé (i) et la première assertion de (ii) ; reste à prouver que le groupe de Weyl $W_{G_U}(T_U)$ est <u>fini</u> sur U , i.e. (6.3) "qu'il a le même nombre de points dans chaque fibre géométrique"; pour cela, il suffit de remarquer que la fibre géométrique de ce groupe en $s \in U$ est déterminée par la situation $R \subset M$ comme groupe constant associé au "groupe de Weyl abstrait de ce système de racines", et en particulier est indépendante du point s , cf. <u>BIBLE</u>, 11-07, th. 2 (voir aussi Exp. XXII, n° 3).

<u>Corollaire</u> 2.6. <u>Soit</u> G <u>un</u> S-<u>groupe</u> affine <u>et</u> lisse <u>sur</u> S , <u>à fibres</u> connexes. <u>L'ensemble des points</u> $s \in G$ <u>tels que</u> $G_{\overline{s}}$ <u>soit réductif</u> (<u>resp.</u> <u>semi-simple</u>) <u>est</u>

un ouvert U de S et les fonctions

$$s \longmapsto \mathrm{rgred}(G_{\overline{s}})$$

$$s \longmapsto \mathrm{rgss}(G_{\overline{s}})$$

sont localement constantes sur U .

Définition 2.7. Un S-groupe (= S-préschéma en groupes) G est dit réductif (resp. semi-simple) s'il est affine et lisse sur S , à fibres géométriques connexes, et réductives (resp. semi-simples).

Le fait d'être réductif (resp. semi-simple) pour un S-groupe G est stable par changement de base et local pour la topologie (fpqc).

2.8. Soit G un S-groupe réductif. Pour tout tore (resp. tore maximal) Q de G , $Z(Q) = \mathrm{Cent}_G(Q)$ est réductif (resp. est Q). Cela résulte aussitôt de 2.2 et 1.6.

Appliquant 2.5 à $\mathrm{Cent}_G(Q)$ on en déduit que Q est contenu (localement pour la topologie étale) dans un tore maximal.

Remarque 2.9. Utilisant comme d'habitude la technique de EGA IV 8, les hypothèses de présentation finie et le théorème 2.5 , on voit que si G est un groupe réductif sur S , il existe un recouvrement ouvert de S , soit $\{U_i\}$, tel que chaque G_{U_i} provienne par changement de base d'un groupe réductif sur un anneau noethérien (en fait une algèbre de type fini sur $\underline{\underline{Z}}$). De même, si G possède un tore maximal trivial T , on peut de plus supposer que T_{U_i} provient d'un tore maximal trivial du groupe précédent, ...

3. Racines et systèmes de racines des schémas en groupes réductifs.

3.1. Soient S un préschéma, T un S-tore opérant linéairement (Exp. I) sur un $\underline{O}_S$-Module localement libre de type fini $\underline{F}$. Pour tout caractère de T, soit $r \in \mathrm{Hom}_{S\text{-gr}}(T, \underline{G}_{m\,S})$, on définit un sous-foncteur de $W(\underline{F})$ par

$$W(\underline{F})^r(S') = \{\, x \in W(\underline{F})(S'),\ \ t\,x = r(t)\,x \ \text{ pour tout } t \in T(S''),\ S'' \to S' \,\}.$$

Alors $W(\underline{F})^r = W(\underline{F}^r)$, où $\underline{F}^r$ est un sous-Module de $\underline{F}$, localement facteur direct dans $\underline{F}$, donc aussi localement libre.

En effet, l'assertion est locale pour la topologie (fpqc) et on peut supposer $T = D_S(M)$, où M est un groupe abélien (libre) de type fini. Alors r s'identifie à une fonction localement constante de S dans M (Exp. VIII 1.3), et quitte à restreindre S, on peut supposer que cette fonction est constante. On est alors ramené à Exp. I 4.7.3.

Définition 3.2. Soient S un préschéma, G un S-préschéma en groupes lisse et de présentation finie sur S, à fibres connexes, T un tore de G. On dit que le caractère r de T est une racine de G par rapport à T si les conditions équivalentes suivantes sont satisfaites :

(i) Pour chaque $s \in S$, $r_{\overline{s}}$ est une racine de $G_{\overline{s}}$ par rapport à $T_{\overline{s}}$ (1.10).

(ii) r est non trivial sur chaque fibre et $\mathfrak{g}^r(s) \neq 0$ pour chaque $s \in S$.

(On note $\mathfrak{g} = \underline{\mathrm{Lie}}(G/S)$ et on fait opérer T sur $\mathfrak{g}$ par l'intermédiaire de la représentation adjointe de G).

Lemme 3.3. Soient S un préschéma, T un S-tore, r un caractère de T . Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) r est non trivial sur chaque fibre, c'est-à-dire : pour tout $s \in S$, r_s est distinct du caractère unité de T_s .

(ii) Pour tout $S' \to S$, $S' \neq \emptyset$, $r_{S'}$ est distinct du caractère unité de $T_{S'}$.

(iii) Le morphisme r est fidèlement plat .

On a (ii) $\Leftrightarrow$ (i) par Exp. IX 5.2 , (iii) $\Rightarrow$ (i) . Pour prouver (i) $\Rightarrow$ (iii), on se ramène au cas où T est diagonalisable et on conclut par Exp. VIII 3.2 a) .

3.4. Supposons, sous les conditions de 3.2 , que G soit réductif . Alors $\mathfrak{g}^r$ est localement libre de rang un (1.12) . De plus, si r est une racine de G par rapport à T , -r en est aussi une (1.10) . En particulier, si G est de rang semi-simple 1 , on a par 1.11:

Lemme 3.5. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif de rang semi-simple 1 , T un tore maximal de G . Si r est une racine de G par rapport à T , alors -r en est aussi une et on a

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}^r \oplus \mathfrak{g}^{-r} ,$$

(où $\mathfrak{g}^r$ et $\mathfrak{g}^{-r}$ sont localement libres de rang 1).

Définition 3.6. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif , T un tore maximal de G , R un ensemble de racines de G par rapport à T . On dit que R est un système de racines de G par rapport à T si les

conditions équivalentes suivantes sont satisfaites :

(i) Pour chaque $s \in S$, $r \mapsto r_s$ est une bijection de R sur l'ensemble des racines de G_s par rapport à T_s .

(ii) Les éléments de R sont distincts sur chaque fibre (i.e. si $r,r' \in R$, $r \neq r'$, alors $r - r'$ ($= rr'^{-1}$) est non trivial sur chaque fibre) et pour chaque $s \in S$, on a

$$\dim(G_s/k(s)) - \dim(T_s/k(s)) = \mathrm{Card}(R) .$$

(iii) On a $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \coprod_{r \in R} \mathfrak{g}^r$.

L'équivalence de ces diverses conditions est triviale.

Lemme 3.7. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif , T un tore maximal de G , R un système de racines de G par rapport à T . Toute racine de G par rapport à T est localement sur S égale à un élément de R .

C'est visible sur la condition (iii) .

Posons $\mathcal{M} = \underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr}}(T, \mathbf{G}_{m,S})$; c'est un S-préschéma en groupes constant tordu (Exp. X 5.6). L'inclusion $R \hookrightarrow \mathcal{M}(S)$ définit un morphisme $R_S \to \mathcal{M}$, où R_S est le S-préschéma constant défini par R ; grâce à la condition (ii) , on voit facilement que ce morphisme est une immersion ouverte et fermée dont l'image n'est autre que $\coprod_{r \in R} r(S)$ (chaque $r \in R$ étant considéré comme une section $S \to \mathcal{M}$) .

Soit $\mathcal{R}$ le foncteur des racines de G par rapport à T : par définition, $\mathcal{R}(S')$ est l'ensemble des racines de $G_{S'}$ par rapport à $T_{S'}$ pour tout $S' \to S$; si $S' = \emptyset$, alors $M(S') = \mathcal{R}(S') = \mathrm{Hom}_{\mathrm{loc.const.}}(S', R) = e$; sinon $R \to M(S')$ identifie R à un système de racines de $G_{S'}$ par rapport à $T_{S'}$, on a

$\mathcal{R}(S') = \mathrm{Hom}_{\mathrm{loc.const.}}(S',R)$, d'après 3.7 ; ce qui montre que $\mathcal{R}$ est représentable par R_S . Si maintenant on ne suppose plus nécessairement que G possède un système de racines relativement à T , $\mathcal{R}$ est de toute façon un sous-faisceau de $\mathcal{H}$ pour (fpqc). Localement pour cette topologie, G possède un système de racines par rapport à T (prendre par exemple T trivial). Par Exp. IV 4.6.8 et la théorie de la descente des sous-préschémas ouverts (resp. fermés), on obtient :

Proposition 3.8. Soient S un préschéma, G un S-groupe, T un tore maximal de G . Le foncteur $\mathcal{R}$ des racines de G par rapport à T est représentable par un S-préschéma fini constant tordu (Exp. X 5.1) qui est un sous-préschéma ouvert et fermé de $\mathrm{Hom}_{S\text{-gr}}(T,\underline{G}_{m\,S})$. Pour que $R \subset \mathrm{Hom}_{S\text{-gr}}(T,\underline{G}_{m\,S})$ soit un système de racines de G par rapport à T , il faut et il suffit que le morphisme $R_S \to \mathrm{Hom}_{S\text{-gr}}(T,\underline{G}_{m\,S})$ défini par l'inclusion précédente induise un isomorphisme $R_S \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}$.

3.9. Soient S un préschéma , G un S-groupe réductif , T un tore maximal de G , r une racine de G par rapport à T (i.e. une section de $\mathcal{R}$). Considérons le noyau Ker r de R , son unique tore maximal T_r et le centralisateur de ce dernier , $Z_r = \mathrm{Cent}_G(T_r)$. C'est un S-groupe fermé dans G réductif (2.8) de rang semi-simple 1 (1.12). De plus $\mathrm{Lie}(Z_r/S) = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}^r \oplus \mathfrak{g}^{-r}$ (1.12), donc $\{r, -r\}$ est un système de racines de Z_r par rapport à T .

3.10. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, T un tore maximal de G , r une racine de G par rapport à T . Si kr , $k \in \underline{\mathbb{Q}}$, est une racine de G par rapport à T , alors k = 1 ou k = -1. Cela résulte aussitôt de 1.12.

4. Racines et schémas en groupes vectoriels.

4.1. Soient S un préschéma, $\underline{F}$ un $\underline{O}_S$-Module localement libre de type fini. Le S-préschéma $W(\underline{F})$ est lisse sur S. Son Algèbre de Lie est canoniquement isomorphe à $\underline{F}$. En effet, on a un isomorphisme canonique

$$W(\underline{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Lie}(W(\underline{F})/S) = W(\underline{\mathrm{Lie}}(W(\underline{F})/S)) \ .$$

(Exp. II cor. à la déf. 4.4 et Exemples précédant 4.5). Nous identifierons toujours $\underline{F}$ et $\underline{\mathrm{Lie}}(W(\underline{F})/S)$.

Lemme 4.2. Soient S un préschéma, V un fibré vectoriel sur S, lisse sur S. Il existe alors un isomorphisme unique de $\underline{O}_S$-Modules

$$\exp : W(\underline{\mathrm{Lie}}(V/S)) \xrightarrow{\sim} V$$

qui induise l'identité sur les Algèbres de Lie.

En effet, on a $V = \underline{V}(H)$ pour un certain $\underline{O}_S$-Module quasi-cohérent H. Alors on a un isomorphisme canonique

$$W(\underline{\mathrm{Lie}}(V/S)) = \mathrm{Lie}(V/S) \xrightarrow{\sim} V$$

(Exp. II loc. cit.). Alors $H \simeq \underline{\mathrm{Lie}}(V/S)^{\vee}$ est localement libre de type fini donc $V \simeq W(\check{H})$ et on a aussitôt l'unicité de exp, car W est pleinement fidèle.

4.3. Si V est un fibré vectoriel sur S, on désignera par V^* l'ouvert de V obtenu en en retirant la section 0.

Notons la loi de groupe de V en notation multiplicative. L'opération de $\underline{O}_S$ sur V définissant la structure de module sera alors notée exponentiellement

$$\underline{O}_S \times_S V \longrightarrow V \ , \qquad (x,v) \longmapsto v^x \ .$$

On a $(vv')^x = v^x v'^x$, $v^{x+x'} = v^x v^{x'}$, $v^{xx'} = (v^x)^{x'}$.

En particulier, si on restreint la loi d'opérateurs à $\underline{G}_{m\,S}$, V^* est stable et est donc muni d'une structure d'objet à groupe d'opérateurs $\underline{G}_{m\,S}$. On notera encore cette loi par $(z,v) \longmapsto v^z$.

4.4. En particulier, soit $\underline{L}$ un Module inversible sur S et $W(\underline{L})$ le $\underline{O}_S$-Module associé. Alors $W(\underline{L})^*$ est un fibré principal homogène sous $\underline{G}_{m\,S}$ (localement trivial) qui n'est autre que le fibré principal associé au fibré vectoriel $W(\underline{L})$. On note $\Gamma(S,\underline{L})^* = W(\underline{L})^*(S)$. Il y a correspondance bijective entre les isomorphismes de $\underline{O}_S$-Modules $\underline{O}_S \xrightarrow{\sim} \underline{L}$, les isomorphismes de $\underline{O}_S$-modules $\underline{O}_S \xrightarrow{\sim} W(\underline{L})$ et les sections $S \longrightarrow W(L)^*$. Cette correspondance s'effectue par $f \longmapsto W(f) \longmapsto W(f)(1)$. Elle est compatible avec l'extension de la base. On peut donc considérer $W(\underline{L})^*$ comme le "schéma des trivialisations de $W(\underline{L})$".

4.5. Soient S un préschéma, T un tore sur S, P un S-groupe à groupe d'opérateurs $\underline{G}_{m\,S}$ (par exemple un fibré vectoriel), r un caractère de T. On note $T \cdot_r P$ le produit semi-direct de P par T, T y opérant par le morphisme composé

$$T \xrightarrow{\ r\ } \underline{G}_{m\,S} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{S\text{-gr}}(P) .$$

Définition 4.6. Soient S un préschéma, G un S-préschéma en groupes, T un sous-groupe de G, r un caractère de T, $\underline{L}$ un $\underline{O}_S$-Module. Soit

$$p : W(\underline{L}) \longrightarrow G$$

un morphisme de groupes. On dit que p est normalisé par T avec le multiplicateur r s'il vérifie les conditions équivalentes suivantes :

(i) p est un morphisme d'objets à groupes d'opérateurs T, si on fait opérer T sur $W(\underline{L})$ par r et sur G par automorphismes intérieurs. En d'autres termes, pour tout $S' \longrightarrow S$ et tous $t \in T(S')$,

$x \in W(\underline{L})(S') = \Gamma(S', \underline{L} \otimes \underline{O}_{S'})$, on a

$$\mathrm{int}(t)\ p(x) = p(r(t)x)$$

(ii) Le morphisme $T \cdot_r W(\underline{L}) \longrightarrow G$ défini par le produit dans G (i.e. par $(t,x) \quad , t\,p(x)$) est un morphisme de groupes.

Lemme 4.7. Sous les conditions de 4.6 , supposons de plus G lisse de présentation finie et à fibres connexes, T tore maximal de G , $\underline{L}$ inversible . Si p est un monomorphisme et r non nul sur chaque fibre, alors r est une racine de G par rapport à T .

En effet $\mathrm{Lie}(p) : \underline{L} \longrightarrow \mathfrak{g}$ est un monomorphisme qui se factorise par $\mathfrak{g}^r$.

Proposition 4.8. Sous les conditions de 4.7 , supposons que G soit réductif , et que p soit un monomorphisme. Alors r est une racine de G par rapport à T et $\mathrm{Lie}(p)$ induit un isomorphisme :

$$\mathrm{Lie}(p) : \underline{L} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}^r .$$

En effet, en vertu de 4.7 et du fait que $\mathfrak{g}^r$ est inversible , il suffit de prouver que r est non nul sur chaque fibre . Soit donc $s \in S$ tel que $r_{\overline{s}} = 0$ ($= 1$ en notation multiplicative). Si X est une section non nulle de $\underline{L} \otimes_S k(\overline{s})$, $p(X)$ est un élément unipotent $\neq e$ de $G(\overline{s})$ qui centralise $T_{\overline{s}}$, ce qui est impossible , car celui-ci est son propre centralisateur .

Corollaire 4.9. Sous les conditions de 4.8 , il existe un monomorphisme de groupes à opérateurs T (i.e. normalisé par T avec le multiplicateur r)

$$W(\mathfrak{g}^r) \longrightarrow G$$

qui induit sur les Algèbres de Lie le morphisme canonique $\mathfrak{g}^r \to \mathfrak{g}$.

Nous verrons bientôt que 4.9 est vérifiée en fait chaque fois que G est un groupe réductif et r une racine de G par rapport à T , et qu'un tel morphisme est unique .

Rappel 4.10. Soient k un corps algébriquement clos , G un k-groupe réductif, T un tore maximal de G , r une racine de G par rapport à T . Il existe un monomorphisme

$$p : \underline{G}_{a\,k} \longrightarrow G$$

normalisé par T avec le multiplicateur r .

Voir BIBLE, 13-05, th. 1.

4.11. Terminons ce n° par un résultat technique qui nous sera utile. Soient S un préschéma, et $\underline{L}$ un $\underline{O}_S$-Module inversible. Soit q un entier > 0 tel que $x \longmapsto x^q$ soit un endomorphisme du S-groupe $\underline{G}_{a\,s}$. (Si $S \neq \emptyset$, on a $q = 1$, ou $q = p^n$, p étant un nombre premier nul sur S ; cela résulte aussitôt du fait élémentaire suivant : le p.g.c.d des coefficients binomiaux $\binom{q}{i}$, $(i \neq o, q)$ est p si $q = p^n$, p premier , et 1 dans le cas contraire). Le morphisme défini par la puissance q-ième

$$\underline{L} \longrightarrow \underline{L}^{\otimes q}$$

est un morphisme de faisceaux de groupes abéliens. Il définit par changement de base un morphisme de S-préschémas en groupes :

$$W(\underline{L}) \longrightarrow W(\underline{L}^{\otimes q}) .$$

En particulier, si $\underline{L}'$ est un autre Module inversible et si on a un morphisme de $\underline{O}_S$-Modules

$$h : \underline{L}^{\otimes q} \longrightarrow \underline{L}' ,$$

on en déduit un morphisme de S-préschémas en groupes

$$W(\underline{L}) \longrightarrow W(\underline{L}')$$

par $x \longmapsto h(x^q)$.

Ces notations posées, on a

Proposition 4.12. Soient S un préschéma, T (resp. T') un S-tore, $\underline{L}$ (resp. $\underline{L}'$) un $\underline{O}_S$-Module inversible , r (resp. r') un caractère de T (resp. T'); considérons le produit semi-direct $T \cdot_r W(\underline{L})$, resp. $T' \cdot_{r'} W(\underline{L}')$. Soient

$$f : T \longrightarrow T'$$

un morphisme de groupes et

$$g : W(\underline{L}) \longrightarrow W(\underline{L}')$$

un morphisme (non nécessairement multiplicatif) vérifiant la condition suivante :

$$r'(f(t))\ g(x) = g(r(t)\ x)$$

pour tous $x \in W(\underline{L})(S')$, $t \in T(S')$, $S' \to S$.

Soit $s_o \in S$ tel que $r_{s_o} \neq e$.

a) Supposons que g envoie la section 0 sur la section 0 et que pour tout entier $n > 0$, on ait $(r' \circ f)_{s_o} \neq n\, r_{s_o}$. Alors $g = 0$ au voisinage de s_o

b) Supposons que g soit un morphisme de groupes tel que $g_{s_o} \neq 0$. Il existe alors un ouvert U de S contenant s_o et un entier $q > 0$ tel que $x \longmapsto x^q$ soit un endomorphisme de $G_{a\,U}$ et que $(r' \circ f)_U = q\, r_U$.

c) Supposons que $(r' \circ f)_{s_o} = q\, r_{s_o}$, où q est un entier > 0 tel que $x \longmapsto x^q$ soit un endomorphisme de $G_{a\,S}$. Il existe alors un ouvert U de S contenant s_o et un unique morphisme de $\underline{O}_S$-Modules

$$h : \underline{L}^{\otimes q} | U \longrightarrow \underline{L}' | U$$

tels que g_U soit le morphisme composé

$$W(\underline{L})_U \xrightarrow{x \mapsto x^q} W(\underline{L}^{\otimes q})_U \xrightarrow{W(h)} W(\underline{L}')_U .$$

Comme la conclusion est locale sur S, on peut supposer que $W(\underline{L}) = W(\underline{L}') = \underline{G}_{a\,S}$ et donc que g s'exprime comme un polynome

$$g(X) = \sum_{n \geqslant 0} a_n X^n \quad , \quad a_n \in \Gamma(S, \underline{O}_S) \quad .$$

La condition qui lie f et g s'écrit comme une identité dans $\Gamma(S;\underline{O}_{S'})[X]$:

$$\sum_{n \geqslant 0} a_n\, r'(f(t))\, X^n = \sum_{n \geqslant 0} a_n\, r(t)^n\, X^n \quad ,$$

soit, pour tout $n \geqslant 0$, tout $S' \to S$ et tout $t \in T(S')$,

$$a_n(r'(f(t)) - r(t)^n) = 0 \quad .$$

Pour chaque $n \geqslant 0$, soit S_n l'ensemble des $s \in S$ tels que $(r' \circ f)_{\overline{s}} = n\, r_{\overline{s}}$. On sait (Exp. IX 5.3) que les S_n sont ouverts et fermés, et que $(r' \circ f)_{S_n} = n\, r_{S_n}$. De plus, comme $r_{\overline{s}_o} \neq e$, on peut, quitte à restreindre S, supposer que r est non nul sur chaque fibre (même référence), ce qui entraîne que les S_n sont disjoints. Quitte à restreindre S, on peut donc supposer que l'on est dans l'un des deux cas suivants : il existe un n avec $S = S_n$ ou bien tous les S_n sont vides.

Soit $m \geqslant 0$ tel que $S_m = \emptyset$, je dis qu'alors $a_m = 0$; en effet $r' \circ f$ et $m\, r$ sont distincts sur chaque fibre de S, et on a :

Lemme 4.13. Soient S un préschéma, T un S-tore, r et r' deux caractères de S distincts sur chaque fibre; il existe une famille couvrante pour (fpqc) : $\{S_i \to S\}$, et pour chaque i un $t_i \in T(S_i)$, tels que $r(t_i) - r'(t_i) = 1$.

Le lemme est trivial, par réduction au cas diagonalisable, puis au cas $T = \underline{G}_{m\,S}$.

Reprenons la démonstration, on vient de prouver (a) . Dans les cas (b) et (c), il existe un n avec $S = S_n$ ($n = q$ dans (c)). Par le résultat précédent on a donc $a_m = 0$ pour $m \neq n$, ce qui prouve que g s'écrit

$$g(X) = a_n X^n \ , \ a_n \in \Gamma(S, \underline{O}_S) \ .$$

Cela prouve aussitôt (c) . Dans le cas (b) , on sait que $a_n(s_o) \neq 0$, on peut donc supposer a_n inversible sur S , ce qui entraîne que $x \longmapsto x^n$ est un endomorphisme de $\underline{G}_{a\,S}$ (en vertu de l'hypothèse de (b)) et achève la démonstration.

5. Un exemple instructif .

5.1. Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique 0 . Posons $A = k[t]$, anneau des polynômes à une variable sur k et $S = \mathrm{Spec}(A)$. Considérons l'Algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur $\underline{O}_S$ suivante :

Comme Module, elle est libre de dimension 3 , de base $\{X, Y, H\}$; la table de multiplication est

$$[X,Y] = 2\,t\,H \quad [H,X] = X \ , \ [H,Y] = -Y \ .$$

Pour $s \in S$, $s \neq s_o$ (point défini par $t = 0$) la fibre réduite $\mathfrak{g}(s)$ est isomorphe à l'algèbre de Lie du groupe $PL_{2\ k(s)}$. Pour $s = s_o$, c'est une algèbre de Lie résoluble.

5.2. Soit G_1 le schéma en groupes des automorphismes de $\mathfrak{g}$: pour tout $S' \to S$, $G_1(S')$ est le groupe des automorphismes de la $\underline{O}_{S'}$-Algèbre de Lie $\mathfrak{g} \otimes_S S'$. C'est un sous-préschéma fermé du groupe $\underline{GL}(\mathfrak{g})$ des automorphismes du $\underline{O}_S$-Module $\mathfrak{g}$. Soient $S' \to S$ et $u \in M_3(\Gamma(S', \underline{O}_{S'}))$ considéré comme un endomorphisme du $\underline{O}_{S'}$-Module $\mathfrak{g} \otimes_S S'$:

$$u(X) = aX + bY + eH \ ,$$

$$u(Y) = b'X + a'Y + e'H \ ,$$

$$u(H) = cX + c'Y + dH \ .$$

On voit aussitôt que u est une section de G_1 si et seulement si $\det(u)$ est inversible et si on a les relations :

(1) $a(d-1) = ec$, (1') $a'(d-1) = e'c'$,

(2) $b(d+1) = ec'$, (2') $b'(d+1) = e'c$,

(3) $e = 2t(bc - ac')$, (3') $e' = 2t(b'c' - a'c)$,

(4) $2tc = eb' - ae'$, (4') $2tc' = be' - ea'$,

(5) $2t(aa' - bb') = 2td$.

Lemme 5.3. Les relations (1) .... (5) impliquent

$$\det(u) = aa'(2-d) + bb'(d+2) \ ,$$

$$aa' - bb' = d \cdot \det(u) \ .$$

En effet, la première assertion s'obtient aussitôt en reportant les relations (1), (1'), (2), (2') dans le développement de $\det(u)$:

$$\begin{aligned}\det(u) &= aa'd + be'c + b'c'e - ea'c - bb'd - ae'c' \\ &= aa'd + bb'(d+1) + bb'(d+1) - aa'(d-1) - bb'd - aa'(d-1) \\ &= aa'(d - d + 1 - d + 1) + bb'(d + 1 + d + 1 - d) \\ &= aa'(2-d) + bb'(d+2) \ .\end{aligned}$$

Multipliant alors cette relation par d, on obtient

$$d\det(u) = aa'(2d - d^2) + bb'(d^2 + 2d) \ .$$

Mais, la relation (1)(1') = (2)(2') donne aussitôt

$$aa'(d-1)^2 = bb'(d+1)^2 \ .$$

Combinant les deux relations précédentes, on trouve aussitôt la seconde formule cherchée.

5.4. Considérons alors $G = G_1 \cap \underline{SL}(\mathcal{O})$. C'est le sous-groupe fermé de G_1 défini par l'équation $\det(u) = 1$. C'est donc un groupe affine sur S .

Proposition 5.5. Le groupe G est lisse sur S .

Lemme 5.6. Soit U l'ouvert de $\underline{End}_A(\mathcal{O}) \simeq W(M_3(\mathcal{O}_S))$ défini par la condition "ad inversible", i.e. l'ouvert $\underline{End}_A(\mathcal{O})_f$, où f est la fonction définie par $f(u) = ad$. Alors $U \cap G$ est le sous-préschéma fermé de U défini par les 6 équations

$$(1)\ ,\ (2)\ ,\ (2')\ ,\ (3)\ ,\ (3')\ \text{ et }\ (D) : aa' - bb' = d\ .$$

Il est d'abord clair que ces 6 relations sont vérifiées par tout "point" de G (lemme 5.3) , en particulier par tout "point" de $U \cap G$. Réciproquement, il faut montrer que si $u \in U(S')$ (pour tout $S' \to S$), et si u vérifie les 6 conditions de l'énoncé, alors $\det(u) = 1$ et u vérifie aussi (1'), (4), (4') et (5).

On a d'abord $(D) \Rightarrow (5)$. Combinant (2) et (2') , on a aussitôt

$$bb'(d+1) = e\,b'\,c' = e'\,b\,c\ .$$

Mais par (3) et (3') , on a en écrivant de deux manières $2t(bc - ac')(b'c' - a'c)$

$$e'bc - ac'e' = eb'c' - a'ce\ .$$

Combinant avec la relation précédente, cela donne $ac'e' = a'ce$.

Mais par (1) , $a'ce = aa'(d-1)$, ce qui prouve $a\,(a'(d-1) - e'c') = 0$ et entraîne (1') , a étant supposé inversible.

Prouvons (4) et (4') . Faisons le par exemple pour (4') , l'autre calcul s'en déduisant par symétrie. Par (3) et (3') , on a aussitôt

$$a'e + be' = -2t(aa' - bb')c' = -2t\, d\, c' .$$

Combinant (1') et (2) , on a aussitôt

$$a'e + be' = d(be' - ea') ,$$

ce qui termine la démonstration de (4') , d étant supposé inversible. Par 5.3. D entraîne $\det(u)=1$.

Lemme 5.7. G est lisse sur S le long de la section unité.

Par 5.6 et SGA II 4.10 , il suffit de prouver que les différentielles des fonctions

$$a(d-1) - ec \quad , \quad b(d+1) - ec' \quad , \quad b'(d+1) - e'c \quad ,$$

$$e - 2t(bc-ac') \quad , \quad e' - 2t(b'c'-a'c) \quad , \quad aa' - bb' - d \quad ,$$

aux points de la section unité de G sont linéairement indépendantes. Or notant par une majuscule la différentielle de la minuscule correspondante, ce sont

$$D \ , \ 2B \ , \ 2B' \ , \ E + 2t\,C' , \ E' + 2t\,C \ , \ A + A' + B \ ,$$

qui sont bien linéairement indépendantes modulo tout $(t-a)$, $a \in A$.

Lemme 5.8. Pour $s \in S$, $s \neq s_o$, la fibre G_s est connexe et semi-simple .

En effet $\mathcal{G}(s)$ est isomorphe à l'Algèbre de Lie de $PL_{2\,k(s)}$, on a $G_s = G_{1\,s}$ lisse sur $k(s)$ et il est connu que le groupe des automorphismes de l'algèbre de Lie de PL_2 sur un corps de caractéristique 0 est PL_2 lui-même.

Lemme 5.9. La fibre G_{s_o} est résoluble et a deux composantes connexes qui sont de la forme suivante :

$$G^{o}_{s_o} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a^{-1} & 0 \\ c & c' & 1 \end{pmatrix} \right\} , \qquad G^{-}_{s_o} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ b^{-1} & 0 & 0 \\ c & c' & -1 \end{pmatrix} \right\} .$$

En effet, on a $e = e' = 0$, car $t = 0$ en s_o. On résout alors immédiatement les équations (1) à (5) et (D).

Lemme 5.10. $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est une section de G sur S, qui est telle que $w(s_o) \in \bar{G}_{s_o}$.

Démontrons maintenant 5.5. On sait que si on note G^o la réunion des composantes neutres des fibres de G (c'est-à-dire le complémentaire de $\bar{G}_{s_o}$), G^o est un sous-groupe ouvert de G lisse sur S, par 5.7. Comme par translation, G est évidemment lisse aux points de $w(S)$, G est lisse sur S.

5.11. Considérons le morphisme $\underline{G}_{m\,S} \longrightarrow G^o$ défini par

$$z \longmapsto \begin{pmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & z^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

C'est un monomorphisme qui définit un tore T de G^o. Je dis qu'on a

$$T = \underline{\mathrm{Cent}}_G(T) = \underline{\mathrm{Cent}}_{G_o}(T) .$$

Il suffit en effet de vérifier la première égalité. Comme il s'agit de sous-groupes lisses sur S de G, il suffit de vérifier qu'ils ont les mêmes points géométriques. Pour les fibres aux points $s \neq s_o$, cela résulte de ce que $PL_{2\,k(s)}$ est réductif et de ce que T_s en est un tore maximal pour des raisons de dimensions (cf. 1.11). Sur la fibre de s_o, le calcul se fait immédiatement. Il en résulte en particulier que T est un tore maximal de G et de G^o.

5.12. La section w de G définie en 5.9 normalise T . Il en résulte aussitôt (cf. 2.4) que le groupe de Weyl de G est isomorphe à $(\underline{\underline{\mathbb{Z}}}/2\underline{\underline{\mathbb{Z}}})_S$, et en particulier fini .

$$W_G(T) = \underline{\mathrm{Norm}}_G(T)/T = (\underline{\underline{\mathbb{Z}}}/2\underline{\underline{\mathbb{Z}}})_S .$$

En revanche $W_{G^\circ}(T)$ n'est pas fini : il lui "manque un point" au-dessus de s_o .

5.13. L'immersion ouverte $G^\circ \longrightarrow G$ n'est pas une immersion fermée (car G° est dense dans G); elle est cependant un morphisme affine (et donc G° est affine sur S) . En effet, comme $G^\circ_{s_o}$ est fermé dans G_{s_o} , qui est fermé dans G , le complémentaire U de $G^\circ_{s_o}$ dans G est ouvert ; G° et U forment un recouvrement ouvert de G et il suffit de vérifier que les immersions $G^\circ \longrightarrow G^\circ$ et $G^\circ \cap U \longrightarrow U$ sont affines; pour la première c'est trivial, pour la seconde, on remarque que $U \cap G^\circ$ est défini dans U par l'équation : $t \neq 0$.
On a donc construit un S-groupe affine lisse, à fibres connexes, G° , possédant un tore maximal T qui est son propre centralisateur et dont le groupe de Weyl $W_G(T)$ n'est pas fini.

6. Existence locale de tores maximaux. Le groupe de Weyl.

Au cours de la démonstration de 2.5 , nous avons utilisé un résultat de Exp. XI sur l'existence locale pour la topologie étale de tores maximaux; la démonstration de Exp. XI utilise un résultat fin de représentabilité (XI 4.1). Dans le cas particulier qui nous occupe, on peut en donner une autre démonstration, basée sur les idées de Exp. XII n° 7, et de nature beaucoup plus élémentaire.

Proposition 6.1. Soient S un préschéma, G un S-préschéma en groupes lisse, affine et à fibres connexes sur S , s_o un point de S tel que les tores maximaux de la fibre géométrique G_{s_o} soient leur propre centralisateur. Il existe un morphisme étale $S' \longrightarrow S$ couvrant S_o, et un tore maximal trivial T de $G_{S'}$.

Comme G est de présentation finie sur S , on peut supposer S noethérien, puis local, puis hensélien à corps résiduel séparablement clos. Posons donc $S = Spec(A)$, A hensélien à corps résiduel $k = k(s_o)$ séparablement clos . Choisissons un tore maximal T_o de G_o $(= G_k)$ (il en existe, par exemple parce que le schéma des tores maximaux de G_o est lisse sur k , Exp. XII, 7.1 c)); comme k est séparablement clos , T_o est trivial et est donc donné par un monomorphisme de groupes

$$f_o : \underline{G}_{m\,k}^{r} \longrightarrow G_o \quad .$$

Soit m un entier > 1 premier à la caractéristique de k . Pour tout $h > 0$, $\underline{Cent}_{G_o}({}_{m^h}T_o)$ est représentable par un sous-préschéma fermé de G_o (Exp. VIII 6.7). Comme les ${}_{m^h}T_o$ sont schématiquement denses dans T_o (cf. Exp. IX 4.10) et que G_o est noethérien, il existe un h tel que

$$\underline{Cent}_{G_o}({}_{m^h}T_o) = \underline{Cent}_{G_o}(T_o) = T_o \quad .$$

Posons $n = m^h$; comme n est inversible sur S , ${}_n\underline{G}_{m\,S}$ est isomorphe à $(\underline{\underline{Z}}/n\underline{\underline{Z}})_S$; f_o définit donc un monomorphisme de groupes

$$g_o : (\underline{\underline{Z}}/n\underline{\underline{Z}})_k^{r} \longrightarrow G_o$$

tel que $\underline{Cent}_G(g_o) = T_o$. Or le S-foncteur

$$P = \underline{Hom}_{S\text{-}gr}((\underline{\underline{Z}}/n\underline{\underline{Z}})_S^{r}, G)$$

est représentable par un S-préschéma de type fini (comme sous-préschéma fermé de

${}_nG = \underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr}}((\underline{\mathbb{Z}}/n\underline{\mathbb{Z}})_S, G) = \mathrm{Ker}(G \xrightarrow{n} G)$. Mais P est lisse sur S (Exp. IX 3.6), donc $g_o \in P(k)$ se relève en une section $g \in P(S)$ (Lemme de Hensel, Exp. XI 1.11) :

$$g : (\underline{\mathbb{Z}}/n\underline{\mathbb{Z}})_S^r \longrightarrow G .$$

Considérons $H = \underline{\mathrm{Cent}}_G(g)$; c'est un sous-préschéma en groupe fermé de G , lisse sur S (Exp. IX, 3.3) et $H_o = T_o$ par hypothèse . Soit alors H^o la composante neutre de H ; c'est un sous-préschéma en groupes de G , lisse et à fibres connexes , dont la fibre spéciale est un tore. Par Exp. X 8.1 , c'est un tore, nécessairement trivial (Exp. X 4.6). Posons $H^o = T$ et soit $C = \underline{\mathrm{Cent}}_G(T)$ qui est un sous-groupe fermé de G (Exp. VIII 6.5 e) , lisse (Exp. XI 2.4). Considérons C^o (On a en fait $C^o = C$, mais nous n'avons pas besoin de le savoir); $C^o \supset T$ sont deux groupes lisses et à fibres connexes. Ils coïncident en s_o , donc au voisinage. Quitte à restreindre S , on peut donc supposer $C^o = T$, donc <u>à fortiori</u> T maximal .

<u>Remarque</u> 6.2. La démonstration montre en particulier que le rang réductif de G_s est constant au voisinage de $s = s_o$.

<u>Proposition</u> 6.3. <u>Soient</u> S <u>un préschéma,</u> G <u>un</u> S<u>-préschéma en groupes lisse et de présentation finie sur</u> S , Q <u>un sous-tore de</u> G .

(i) $\underline{\mathrm{Cent}}_G(Q)$ <u>et</u> $\underline{\mathrm{Norm}}_G(Q)$ <u>sont représentables par des sous-préschémas en groupes fermés , lisses (et donc de présentation finie) sur</u> S .

(ii) $\underline{\mathrm{Cent}}_G(Q)$ <u>est un sous-préschéma ouvert et fermé de</u> $\underline{\mathrm{Norm}}_G(Q)$. <u>Le quotient</u> $W_G(Q) = \underline{\mathrm{Norm}}_G(Q)/\underline{\mathrm{Cent}}_G(Q)$ <u>est représentable par un sous-préschéma</u>

en groupes ouvert de $\underline{\mathrm{Aut}}_{S\text{-gr}}(Q)$, c'est donc un S-préschéma en groupes quasi-fini, étale et séparé sur S .

(iii) Pour tout $s \in S$, posons

$$w(s) = (\mathrm{Norm}_{G(\overline{s})}(Q(\overline{s})) : \mathrm{Cent}_{G(\overline{s})}(Q(\overline{s}))) \ .$$

Alors $s \longmapsto w(s)$ est semi-continue inférieurement, et est constante au voisinage de s si et seulement si $W_G(Q)$ est fini sur S au voisinage de s .

Par Exp. XI 6.11 , $\underline{\mathrm{Cent}}_G(Q)$ et $\underline{\mathrm{Norm}}_G(Q)$ sont représentables par des sous-préschémas fermés et de présentation finie de G . Ceux-ci sont lisses par Exp. XI 2.4 et 2.4 bis, ce qui prouve (i). Les assertions (ii) et (iii) se démontrent alors comme dans Exp. XI 5.9 et 5.10 , dont la démonstration n'utilise en fait que (i) et non les théorèmes fins Exp. XI 4.1 et 4.2.

Exposé XX

GROUPES RÉDUCTIFS DE RANG SEMI-SIMPLE

par M. DEMAZURE

1. Systèmes élémentaires . Les groupes P_r et P_{-r} .

Rappel 1.1. Soient $S = \operatorname{Spec} k$, où k est un corps algébriquement clos, G un S-groupe réductif de rang semi-simple ≥ 1 , T un tore maximal (trivial) de G . On a alors

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}^r \oplus \mathfrak{g}^{-r} ,$$

où r et $-r$ sont les racines de G par rapport à T. De plus, il existe deux monomorphismes de groupes

$$p_r : \underline{G}_a S \longrightarrow G \quad , \quad p_{-r} : \underline{G}_a S \longrightarrow G$$

tels que

$$t\, p_r(x)\, t^{-1} = p(r(t)\, x) \quad , \quad t\, p_{-r}(x)\, t^{-1} = p_{-r}(r(t)^{-1}\, x) ,$$

pour tout $S' \longrightarrow S$ et tous $t \in T(S')$, $x \in \underline{G}_a(S')$, et que le morphisme

$$\underline{G}_a S \times_S T \times_S \underline{G}_a S \longrightarrow G ,$$

défini par $(y,t,x) \longmapsto p_{-r}(y)\, t\, p_r(x)$, soit radiciel et dominant (BIBLE, 13-12 cor. 2 au th. 3).

Comme l'application tangente à l'élément neutre est bijective, ce morphisme est également séparable, donc birationnel; par le Main Theorem (EGA III 4.4.9), c'est donc une immersion ouverte.

Lemme 1.2. Soient S un préschéma, G un S-préschéma en groupes, T un tore de G, Q un sous-tore de T, r un caractère de T induisant sur Q un caractère non trivial sur chaque fibre. Soient $p_r : \underline{G}_{a\,S} \longrightarrow G$ (resp. $p_{-r} : \underline{G}_{a\,S} \longrightarrow G$) un morphisme de groupes normalisés par T avec le multiplicateur r (resp. -r). Supposons que le morphisme

$$u : \underline{G}_{a\,S} \times_S T \times_S \underline{G}_{a\,S} \longrightarrow G$$

défini ensemblistement par $u(y,t,x) = p_{-r}(y)\ t\ p_r(x)$ soit une immersion ouverte. Soient enfin q un entier $\geqslant 0$ et

$$p : \underline{G}_{a\,S} \longrightarrow G$$

un morphisme de groupes tel que pour tout $S' \longrightarrow S$ et tous $t \in Q(S')$, $x \in \underline{G}_a(S')$, on ait

$$\mathrm{int}(t)^q\, p(x) = p(r(t)\, x) .$$

Il existe alors un unique $a \in \underline{G}_a(S)$ avec $p(x) = p_r(a\, x^q)$.

Soient en effet Ω l'image de u et $U = p^{-1}(\Omega)$. C'est un ouvert de $\underline{G}_{a\,S}$, contenant la section nulle. Pour toute section t de Q, l'automorphisme de $\underline{G}_{a\,S}$ défini par la multiplication par r(t) laisse fixe globalement U. On a $U = \underline{G}_{a\,S}$; en effet, il suffit de le vérifier lorsque S est le spectre d'un corps algébriquement clos k ; alors $r : Q(k) \longrightarrow k^*$ est surjectif, ce qui prouve aussitôt $U(k) \supset k^*$, donc $U = \underline{G}_{a\,k}$. Il existe donc trois morphismes

$$a : \underline{G}_{a\,S} \longrightarrow \underline{G}_{a\,S}\ ,\quad b : \underline{G}_{a\,S} \longrightarrow T\ ,\quad c : \underline{G}_{a\,S} \longrightarrow \underline{G}_{a\,S}\ ,$$

avec

$$p(x) = p_{-r}(a(x))\ b(x)\ p_r(c(x)) .$$

La condition sur p se traduit par

$$\begin{aligned} a(r(t)\, x) &= r(t)^{-q}\, a(x)\ , \\ b(r(t)\, x) &= b(x)\ , \\ c(r(t)\, x) &= r(t)^q\, c(x)\ . \end{aligned}$$

Pour la même raison que précédemment, on a donc pour tout $S' \longrightarrow S$ et tout $z \in \underline{G}_m(S')$,

$$a(zx) = z^{-q}\, a(x) \quad , \quad b(zx) = b(x) \ , \ c(zx) = z^q\, c(x) \ ,$$

donc

$$z^q\, a(z) = a(1) \quad , \quad b(z) = b(1) \quad , \quad c(z) = z^q\, c(1) \ .$$

Comme $\underline{G}_{m\,S}$ est schématiquement dense dans $\underline{G}_{a\,S}$, on a aussitôt pour tout $x \in \underline{G}_a(S')$, $S' \longrightarrow S$:

$$x^q\, a(x) = a(1) = \mathrm{Cte} = 0 \ , \ \text{d'où} \ a = 0 \ ,$$
$$b(x) \quad = b(1) = \mathrm{Cte} = e \ , \ \text{d'où} \ b = e \ ,$$
$$c(x) = x^q\, c(1) = a\ x^q \ , \ \text{pour un} \ a \in \underline{G}_a(S) \ ,$$

ce qui achève la démonstration.

Définition 1.3. Soit S un préschéma. On appelle S-système élémentaire un triplet (G,T,r) où

(i) G est un S-groupe réductif de rang semi-simple 1 (Exp. XIX 2.7),

(ii) T est un tore maximal de G ,

(iii) r est une racine de G par rapport à T (Exp. XIX 3.2) .

On a donc une décomposition en somme directe (Exp. XIX 3.5).

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}^r \oplus \mathfrak{g}^{-r} \ ,$$

$\mathfrak{g}^r$ et $\mathfrak{g}^{-r}$ étant localement libres de rang un .

1.4. Si (G,T,r) est un S-système élémentaire, alors $(G_{S'},T_{S'},r_{S'})$ est un S'-système élémentaire pour tout $S' \longrightarrow S$. Si (G,T,r) est un S-système élémentaire, alors $(G,T,-r)$ en est aussi un .

Si S est un préschéma, G un S-groupe réductif, T un tore maximal de G ,

r une racine de G par rapport à T , alors (Exp. XIX 3.9), (Z_r, T, r) est un S-système élémentaire .

Soit (G,T,r) un S-système élémentaire . Le Module inversible $\mathfrak{g}^r$ est muni canoniquement d'une structure de T-Module . On a donc également une structure de T-module sur le fibré vectoriel $W(\mathfrak{g}^r)$. D'autre part, les automorphismes intérieurs de T définissent sur G une structure de groupe à groupe d'opérateurs T

Théorème 1.5. Soit (G,T,r) un S-système élémentaire .

(i) Il existe un unique morphisme de groupes à groupe d'opérateurs T

$$\exp : W(\mathfrak{g}^r) \longrightarrow G$$

qui induise sur les Algèbres de Lie le morphisme canonique $\mathfrak{g}^r \to \mathfrak{g}$. Autrement dit, exp est l'unique morphisme vérifiant les conditions suivantes : Pour tout $S' \to S$ et tous $t \in T(S')$, $X, X' \in W(\mathfrak{g}^r)(S')$, on a

$$\exp(X + X') = \exp(X) \exp(X') ,$$

$$\mathrm{int}(t) \exp(X) = \exp(r(t)X) ,$$

$$\mathrm{Lie}(\exp)(X) = X .$$

(ii) Si on définit de même (dans le S-système élémentaire (G,T,-r))

$$\exp : W(\mathfrak{g}^{-r}) \longrightarrow G ,$$

le morphisme

$$W(\mathfrak{g}^{-r}) \times_S T \times_S W(\mathfrak{g}^r) \longrightarrow G$$

défini ensemblistement par $(Y,t,X) \longmapsto \exp(Y).t.\exp(X)$ est une immersion ouverte.

Supposons avoir démontré l'existence des morphismes exp demandés et démontrons les autres assertions du théorème. Prouvons d'abord (ii) . Comme les deux membres sont de présentation finie et plats sur S , il suffit de le faire

lorsque S est le spectre d'un corps algébriquement clos (SGA I 5.7 et VIII 5.5); Soit alors $S = \mathrm{Spec}\ k$. Soient $X \in \Gamma(S, \mathcal{V}^r)^*$, $Y \in \Gamma(S, \mathcal{V}^{-r})^*$. Il suffit de prouver que le morphisme

$$\underline{G}_{a\,k} \times_k T \times_k \underline{G}_{a\,k} \longrightarrow G$$

défini par $(y,t,x) \longmapsto \exp(yY)\ t\ \exp(xX)$ est une immersion ouverte. Or d'après 1.1 et 1.2 , il existe a , $b \in k$ avec

$$\exp(yY) = p_{-r}(ay) \quad , \quad \exp(xX) = p_r(bx) \quad .$$

Comme $\exp : W(\mathcal{V}^{-r}) \longrightarrow G$ induit un monomorphisme sur les algèbres de Lie , on a $a \neq 0$; de même $b \neq 0$ et on est ramené à 1.1.

L'unicité du morphisme exp peut se démontrer localement sur S ; on se ramène alors au cas où $\mathcal{V}^r$ et $\mathcal{V}^{-r}$ sont libres, et on n'a plus qu'à appliquer 1.2 (avec $Q = T$ et $q = 1$).

Reste donc à prouver l'existence du morphisme exp demandé . Remarquons d'abord qu'en vertu de la théorie de la descente fidèlement plate et de l'assertion d'unicité précédente , il suffit de démontrer cette existence <u>localement</u> sur S pour la topologie (fpqc) . Par les raisonnements habituels utilisant la présentation finie, on se ramène au cas où S est noethérien, puis au cas où il est noethérien local. En vertu de la remarque précédente , on peut donc se contenter de prouver l'existence du morphisme exp cherché lorsque $S = \mathrm{Spec}(A)$, A local noethérien complet à corps résiduel k algébriquement clos . Soit alors $p_o : \underline{G}_{a\,k} \longrightarrow G_k$ un monomorphisme de k-groupes normalisé par T_k avec le facteur $r_o = r \otimes_A k$ (il en existe par 1.1). On sait (1.1 et 1.2) que le morphisme $T_k \cdot r_o\ \underline{G}_{a\,k} \longrightarrow G_k$ correspondant est une immersion, donc en particulier un monomorphisme. Admettons provisoirement les deux lemmes suivants :

Lemme 1.6. Soient S un préschéma , G un S-groupe de présentation finie , T un S-tore , r un caractère non trivial sur chaque fibre de T , s_o un point de S . Soit

$$f : T \cdot_r \underline{G}_{a\,S} \longrightarrow G$$

un morphisme de S-groupes tel que f_{s_o} soit un monomorphisme et que la restriction de f à T soit un monomorphisme . Il existe un voisinage ouvert U de s_o tel que $f \mid U$ soit un monomorphisme .

Lemme 1.7. Soient A un anneau local complet noethérien à corps résiduel k algébriquement clos , (G,T,r) un A-système élémentaire , $p_o : \underline{G}_{a\,k} \longrightarrow G_k$ un morphisme de k-groupes normalisé par T_k avec le multiplicateur $r \otimes_A k$. Il existe un morphisme de groupes $p : \underline{G}_{a\,A} \longrightarrow G$ normalisé par T avec le multiplicateur r .

Soit p le morphisme dont l'existence est affirmée par 1.7. Soit $f : T \cdot_r \underline{G}_{a\,S} \longrightarrow G$ le morphisme correspondant . Il vérifie les hypothèses de 1.6 , donc est un monomorphisme ; en particulier p est un monomorphisme . On conclut alors par Exp. XIX 4.9 .

Démonstration de 1.6. Désignons par $e : S \longrightarrow T \cdot_r \underline{G}_{a\,S}$ la section unité . Comme f est non ramifié en $e(s_o)$, il l'est en e(s) pour tous les s d'un voisinage ouvert U de s_o ; $f \mid U$ est donc non ramifié (Exp. X 3.5) , donc son noyau $\mathrm{Ker}(f)_U$ non ramifié sur U . Pour prouver que $f \mid U$ est un monomorphisme, il suffit donc de prouver que $\mathrm{Ker}(f)_U$ est radiciel sur U , ce qui est une question ensembliste . On est donc ramené à prouver :

Lemme 1.8. Soit k un corps algébriquement clos; soit N un sous-groupe

invariant de $T \cdot_r \underline{G}_{a\,k}$ (r caractère non trivial du tore T), étale sur k et tel que $N \cap T = \{e\}$. Alors $N = \{e\}$.

On a $\mathrm{int}(t')(t,x) = (t, r(t')\,x)$. Si (t,x) est un point de N, avec $x \neq 0$, alors $(t, z\,x)$ est aussi un point de N pour $z \in k^*$ et (t,x) n'est pas isolé, donc N n'est pas quasi-fini. On a donc ensemblistement $N \subset T$ et on a terminé.

Démonstration de 1.7. Soient m le radical de A et $S_n = \mathrm{Spec}(A/m^{n+1})$, $n \geqslant 0$. Montrons d'abord, par récurrence sur n, que p_o peut se prolonger pour chaque n en un morphisme de S_n-groupes

$$p_n : \underline{G}_{a\,S_n} \longrightarrow G_{S_n}$$

normalisé par T_{S_n} avec le multiplicateur r_n, les p_n vérifiant de plus la condition $p_{n+1}\,{}^{x}_{S_{n+1}}\,S_n = p_n$.

Soit $H = T \cdot_r \underline{G}_{a\,S}$. Le morphisme $H_{S_n} \longrightarrow G_{S_n}$ défini par p_n est noté f_n. Admettons le lemme suivant :

Lemme 1.9. Si (G,T,r) est un k-système élémentaire, k algébriquement clos, et si $p : \underline{G}_{a\,k} \longrightarrow G$ est un monomorphisme normalisé par T avec le multiplicateur r, on a $H^2(T \cdot_r \underline{G}_{a\,k}, \mathcal{V}) = 0$ (On fait opérer $T \cdot_r \underline{G}_{a\,k}$ sur $\mathcal{V}$ par l'intermédiaire du morphisme $T \cdot_r \underline{G}_{a\,k} \longrightarrow G$ défini par p, et de la représentation adjointe de G).

En vertu de Exp. III 2.8, f_n se prolongera en un morphisme de S_{n+1}-groupes

$$f'_{n+1} : H_{S_{n+1}} \longrightarrow G_{S_{n+1}} .$$

Or $f'_{n+1}\,|\,T_{S_{n+1}}$ et l'immersion canonique de $T_{S_{n+1}}$ dans $G_{S_{n+1}}$ ont même restriction à T_{S_n}. Par Exp. III 2.5, il existe un élément $g \in G(S_{n+1})$, tel que $gx_{S_{n+1}}S_n = e$ et tel que $f_{n+1} = \mathrm{int}(g) \circ f'_{n+1}$ se restreigne à T_{n+1} suivant l'immersion canonique de T_{n+1}. Soit p_{n+1} la restriction de f_{n+1} à $\underline{G}_{a\,S_{n+1}}$. C'est un morphisme normalisé par $T_{S_{n+1}}$ avec le multiplicateur $r_{S_{n+1}}$, qui prolonge p_n.

On a donc construit un système cohérent (f_n) et il nous faut maintenant l'algébriser. Or on a :

Lemme 1.10. *Soient* A *un anneau local noethérien complet*, m *son radical*, $S = \mathrm{Spec}(A)$, $S_n = \mathrm{Spec}(A/m^{n+1})$, T *un* S*-tore*, r *un caractère non nul de* T, X *un* S*-schéma affine sur lequel* T *opère*. *Faisons opérer* T *sur* $\underline{G}_{a\,S}$ *par l'intermédiaire de* r. *Soit* q *un entier* $\geqslant 0$, *et soit* $(f_n)_{n\geqslant 0}$ *un système cohérent de morphismes*

$$f_n : \underline{G}_{a\,S_n}^{q} \longrightarrow X_{S_n}$$

d'objets à opérateurs T_{S_n}. *Il existe un unique morphisme d'objets à opérateurs* T

$$f : \underline{G}_{a\,S}^{q} \longrightarrow X$$

qui induise les f_n. (*Comparer à* Exp. IX 7.1).

Corollaire 1.11. *Si* X *est un groupe à groupe d'opérateurs* T *et si les* f_n *sont des morphismes de groupes*, f *en est aussi un*.

Il suffit d'appliquer l'assertion d'unicité du lemme aux deux morphismes $\underline{G}_{a\,S}^{2q} \longrightarrow X$ déduits de f à la manière habituelle.

Démonstration de 1.10. Supposons T trivial, ce qui d'ailleurs est le cas dans l'application de 1.10 à la démonstration de 1.5. On sait (Exp. I 4.7.3 , remarque), que $X \longmapsto \underline{A}(X)$ réalise une équivalence de la catégorie des S-schémas affines munis d'une opération de T et de la catégorie opposée à celle des S-algèbres graduées de type $M = \mathrm{Hom}_{S\text{-gr.}}(T, \underline{G}_m\, S)$.

On a donc des graduations

$$B = \underline{A}(X) = \coprod_{m \in M} B_m \quad , \quad C = \underline{A}(\underline{G}_a^q\, S) = \coprod_{m \in M} C_m \ .$$

On voit aussitôt que chaque C_m est <u>libre de type fini</u> sur A (En effet, on a $C_m = 0$, si m n'est pas multiple de r ; si $m = k\,r$, C_m est isomorphe au A-module des polynômes homogènes de degré k , à q lettres). Posons

$$\hat{B}_m = \varprojlim B_m \otimes_A A/m^{n+1} \ , \ \hat{C}_m = \varprojlim C_m \otimes_A A/m^{n+1} \ , \ \hat{B} = \coprod_{m \in M} \hat{B}_m \ , \ \hat{C} = \coprod_{m \in M} \hat{C}_m \ .$$

On a alors des morphismes canoniques d'algèbres graduées de type M

$$g_B : B \longrightarrow \hat{B} \quad , \quad g_C : C \longrightarrow \hat{C} \ .$$

Il résulte de la remarque faite plus haut que g_C est un <u>isomorphisme</u> .

Se donner un système cohérent (f_n) comme dans l'énoncé est équivalent à se donner un morphisme de A-algèbres graduées

$$\hat{F} : \hat{B} \longrightarrow \hat{C} \ .$$

Trouver un morphisme f comme dans l'énoncé est équivalent à trouver un morphisme de A-algèbres graduées $F : B \longrightarrow C$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{F} & C \\ {\scriptstyle g_B}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g_C} \\ \hat{B} & \xrightarrow{\hat{F}} & \hat{C} \end{array} \ .$$

Comme g_C est un isomorphisme, l'existence et l'unicité de F sont immédiates .

Pour achever la démonstration de 1.5 , il ne reste donc qu'à prouver 1.9 .

1.12. Preuve de 1.9. On a $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}^r \oplus \mathfrak{g}^{-r}$. Considérons $\mathfrak{g}$ comme un $T \cdot_r \underline{G}_{a\,k}$-module comme expliqué en 1.9. Il est clair que $\mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}^r$ est un sous-module de $\mathfrak{g}$, le quotient étant isomorphe à $\mathfrak{g}^{-r}$ comme k-espace vectoriel et même comme T-module . Il est clair que $\underline{G}_{a\,k}$ ne peut opérer non trivialement sur ce quotient qui est de dimension 1 (car un morphisme de groupes de $\underline{G}_{a\,k}$ dans $\underline{G}_{m\,k}$ est trivial). De même $\mathfrak{g}^r$ est un sous-module de $\mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}^r$, le quotient étant comme T-module , isomorphe à $\mathfrak{t}$, $\underline{G}_{a\,k}$ y opérant trivialement. En résumé :

Lemme 1.13. Sous les conditions de 1.9 , $\mathfrak{g}$ admet une suite de composition (comme $T \cdot_r \underline{G}_{a\,k}$-module) dont les quotients successifs sont $\mathfrak{g}^{-r}$, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{g}^r$, considérés comme $T \cdot_r \underline{G}_{a\,k}$-modules grâce à la projection $T \cdot_r \underline{G}_{a\,k} \longrightarrow T$.

On est donc ramené à calculer la cohomologie de $T \cdot_r \underline{G}_{a\,k}$ opérant par l'intermédiaire de la projection $T \cdot_r \underline{G}_{a\,S} \longrightarrow T$ et du caractère s de T (ici $s = 0$, r ou $-r$) sur $W(k)$.

Lemme 1.14. Avec les notations précédentes , on a

$$H^n(T \cdot_r \underline{G}_{a\,k} , k) = H^n (C^*_{r,s}) ,$$

où le complexe $C^*_{r,s}$ est défini par

$$C^n_{r,s} = 0 \text{ si } s \neq q\,r \text{ , } q \text{ entier} > 0 ;$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{polynomes homogènes de d° } q \text{ , à } n \text{ variables} \\ \text{à coefficients dans } k \end{array} \right\} , \text{ si } s = q\,r$$

$$\delta f\,(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}) = f(x_2,\ldots,x_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i\, f(x_1,..,x_ix_{i+1},\ldots,x_{n+1}$$

$$+ (-1)^{n+1}\, f(x_1,\ldots,x_n)\ .$$

En effet, le foncteur $M \longmapsto H^0(T,M)$ est exact sur la catégorie des T-k-modules (et les $H^q(T,.)$ nuls), par Exp. I 5.3.2 . Il en résulte, comme dans le cas habituel de la cohomologie des groupes, que $H^n(T\ ._r \underline{G}_{a\ k}\ , k)$ peut se calculer comme le n-ième groupe de cohomologie du complexe des cochaines de $\underline{G}_{a\ k}$ dans k, invariantes par T, c'est-à-dire vérifiant

$$f(r(t)\ x_1,\ \ldots,r(t)x_n) \;=\; s(t)\ f(x_1,\ldots,x_n)\ .$$

Cela donne bien le complexe annoncé .

Pour démontrer 1.9 , il suffit donc de prouver que $H^2(C^*_{r,s})=0$, pour $s = 0\ ,\ r\ ,\ -r$, ce qui se fait immédiatement .

Remarque 1.15. On peut calculer explicitement les groupes $H^n(C^*_{r,s})$ pour $s = q\ r$ (voir LAZARD, Lois de groupes et analyseurs , Annales E.N.S., 1955) . En particulier, on trouve $H^n(C^*_{r,s}) = 0$ pour $n > q$.

Notations 1.16. L'image de l'immersion canonique

$$W(\mathcal{O}_f^{-r})\ x_S\ T\ x_S\ \ W(\mathcal{O}_f^{\,r}) \longrightarrow G$$

sera notée Ω . C'est un ouvert de G contenant la section unité. L'image de $W(\mathcal{O}_f^{-r})$, resp. $W(\mathcal{O}_f^{\,r})$, resp. $W(\mathcal{U}_f^{-r})x_S\ T$, resp. $T\ x_S\ W(\mathcal{O}_f^{\,r})$ sera notée P_{-r} , resp. P_r , resp. $P_{-r}.T$, resp. $T\ .\ P_r$. Alors P_r (resp. P_{-r}) est un sous-groupe de G canoniquement muni d'une structure de fibré vectoriel et on a

$$\mathrm{int}(t)\ \ x \;=\; x^{r(t)} \quad (\text{resp. } x^{r(t)^{-1}})\ ,$$

pour tous $S' \longrightarrow S$, $t \in T(S')$, $x \in P_r(S')$ (resp. $x \in P_{-r}(S')$) .

On a des isomorphismes canoniques

$$T \cdot P_r \simeq T \cdot_r P_r \ , \quad T \cdot P_{-r} \simeq T \cdot_{-r} P_{-r} \ .$$

L'ouvert Ω est stable sous $\mathrm{int}(T)$: on a

$$\mathrm{int}(t')(y.t.x) = y^{r(t')^{-1}} \cdot t \cdot x^{r(t')} \ .$$

Corollaire 1.17. On a $\mathrm{Lie}(P_r/S) = \mathfrak{g}^r$, $\mathrm{Lie}(P_{-r}/S) = \mathfrak{g}^{-r}$. Les isomorphismes $W(\mathfrak{g}^r) \xrightarrow{\exp} P_r$, resp. $W(\mathfrak{g}^{-r}) \xrightarrow{\exp} P_{-r}$, sont ceux de Exp. XIX 4.2 .

Corollaire 1.18. L'ouvert Ω est relativement schématiquement dense dans G (XV

Clair par Exp. XVIII, 1.3.

Corollaire 1.19. Le centre de G est $\mathrm{Cent}(G) = \mathrm{Ker}\ r$. C'est donc un sous-groupe fermé de type multiplicatif et de type fini de G .

La seconde assertion résulte de la première par Exp. IX 2.7 . Prouvons donc celle-ci. L'automorphisme intérieur défini par une section de $\mathrm{Ker}\ r$ opère trivialement sur Ω (dernière formule de 1.16) , donc sur G par 1.18. Réciproquement, si $g \in G(S)$ centralise G , alors il centralise T (resp. P_r) , donc est une section de T (Exp. XIX 2.8) (resp. qui annule r); comme ceci se fait aussi après tout changement de base, on a bien $\mathrm{Cent}(G) = \mathrm{Ker}\ r$.

Corollaire 1.20. Pour qu'il existe un monomorphisme $p_r : \underline{G}_{a\,S} \longrightarrow G$ normalisé par T avec le multiplicateur r , il faut et il suffit que le $\mathcal{O}_S$-Module $\mathfrak{g}^r$ soit libre. Plus précisément, on a une correspondance biunivoque (par $p_r \mapsto \mathrm{Lie}(p_r)$ et $X_r \mapsto (x \mapsto \exp(xX_r))$) entre $\Gamma(S, \mathfrak{g}^r)^*$ et l'ensemble des monomorphismes p_r comme ci-dessus (qui est aussi l'ensemble des isomorphismes de schémas en groupes vectoriels $\underline{G}_{a\,S} \xrightarrow{\sim} P_r$) .

Corollaire 1.21. Les sous-groupes P_r et P_{-r} de G ne commutent sur aucune fibre.

Si $P_{r,s}$ et $P_{-r,s}$ commutent, Ω_s est un sous-groupe de G_s, donc $\Omega_s = G_s$ et G_s est résoluble .

2. Structure des systèmes élémentaires.

Théorème 2.1. Soient S un préschéma , (G,T,r) un S-système élémentaire.

Il existe un morphisme de $\underline{O}_S$-Modules

$$\mathcal{J}^r \otimes_{\underline{O}_S} \mathcal{J}^{-r} \longrightarrow \underline{O}_S \quad , \quad (X,Y) \longmapsto \langle X,Y \rangle \quad ,$$

et un morphisme de S-groupes

$$r^* : \underline{G}_m \, S \longrightarrow T$$

tels que pour tout $S' \to S$, **et tous** $X \in \Gamma(S', \mathcal{J}^r \otimes \underline{O}_{S'})$, $Y \in \Gamma(S', \mathcal{J}^{-r} \otimes \underline{O}_{S'})$

on ait

$$\exp(X).\exp(Y) \in \Omega(S') \iff 1 + \langle X,Y \rangle \in \underline{G}_m(S') \ ,$$

et sous ces conditions la formule :

$$\text{(F)} \qquad \exp(X).\exp(Y) = \exp\left(\frac{Y}{1+\langle X,Y\rangle}\right) r^*(1+\langle X,Y\rangle) \exp\left(\frac{X}{1+\langle X,Y\rangle}\right) .$$

De plus les morphismes $(X,Y) \longmapsto \langle X,Y \rangle$ et r^* sont uniquement déterminés, le premier est un isomorphisme, donc met les Modules $\mathcal{J}^r$ et $\mathcal{J}^{-r}$ en dualité, et on a

$$r \circ r^* = 2 \quad \text{(élévation au carré dans } \underline{G}_m \, S) \ .$$

Vu les assertions d'unicité du théorème , il suffit de faire la

démonstration localement sur S . On peut donc supposer $\mathcal{Y}^r$ et $\mathcal{Y}^{-r}$ libres sur S . Prenons alors $X \in \Gamma(S, \mathcal{Y}^r)^*$, $Y \in \Gamma(S, \mathcal{Y}^{-r})^*$ et posons $p_r(x) = \exp(x\,X)$, $p_{-r}(y) = \exp(yY)$, pour $x,y \in G_a(S')$, $S' \longrightarrow S$. Par 1.5 et 1.21 , il suffit de prouver :

Proposition 2.2. Soient S un préschéma , G un S-groupe , T un tore de G , r un caractère non trivial sur chaque fibre de T , $p_r : \underline{G}_{a\,S} \longrightarrow G$ (resp. $p_{-r} : \underline{G}_{a\,S} \longrightarrow G$) un monomorphisme de groupes normalisé par T avec le multiplicateur r . On suppose que

(i) Le morphisme $\underline{G}_{a\,S} \times_S T \times_S \underline{G}_{a\,S} \longrightarrow G$ défini par $(y,t,x) \longmapsto p_{-r}(y)\ t\ p_r(x)$ est une immersion ouverte . On note Ω son image .

(ii) Pour tout $s \in S$, $p_{r,s}(\underline{G}_{a\,k(s)})$ et $p_{-r,s}(\underline{G}_{a\,k(s)})$ ne commutent pas.

Il existe un $a \in G_a(S)$ et un $r^* \in \mathrm{Hom}_{S\text{-gr}}(\underline{G}_{m\,S'}, T)$, uniquement déterminés avec les propriétés suivantes :

pour tout $S' \longrightarrow S$ et tous $x,y \in \underline{G}_a(S')$, on a $p_r(x)\ p_{-r}(y) \in \Omega\,(S')$ si et seulement si $1 + axy \in \underline{G}_m(S')$, et , sous ces conditions, on a la formule

$$p_r(x)\ p_{-r}(y) = p_{-r}\left(\frac{y}{1+axy}\right)\ r^*(1+axy)\ p_r\left(\frac{x}{1+axy}\right) .$$

De plus, a est inversible (i.e. $a \in \underline{G}_m(S)$) et $r \circ r^* = 2$.

Démonstration :

A) Considérons le morphisme

$$\underline{G}_{a\,S}^2 \longrightarrow G$$

défini par $(x,y) \longmapsto p_r(x)\, p_{-r}(y)$. Soit U l'image inverse de Ω par ce morphisme . C'est un ouvert de $\underline{G}_a^2{}_S$, contenant $0 \times_S \underline{G}_a{}_S$ et $\underline{G}_a{}_S \times_S 0$.

Il existe des morphismes

$$A : U \longrightarrow \underline{G}_a{}_S \quad ,$$

$$B : U \longrightarrow T \quad ,$$

$$C : U \longrightarrow \underline{G}_a{}_S \quad ,$$

vérifiant la relation ensembliste

$$p_r(u)\, p_{-r}(v) = p_{-r}(A(u,v))\; B(u,v)\; p_r(C(u,v)) \quad .$$

On a immédiatement les relations

$$A(0,v) = v \;,\; A(u,0) = 0 \;,\; B(u,0) = B(0,v) = e \;,\; C(u,0) = u,\; C(0,v) = 0 \;.$$

Soit S' un S-schéma et soit $t \in T(S')$ un point de T.

Comme $\Omega_{S'}$ est stable par int(t) , $U_{S'}$ est stable sous l'automorphisme $(x,y) \longmapsto (r(t)x\,,\, r(t)^{-1}y)$ de $\underline{G}_a^2{}_{S'}$, et on a les relations :

$$A(r(t)u,\, r(t)^{-1}v) = r(t)^{-1}\, A(u,v) \quad ,$$

$$B(r(t)u,\, r(t)^{-1}v) = B(u,v) \quad ,$$

$$C(r(t)u,\, r(t)^{-1}v) = r(t)\; C(u,v) \quad .$$

Comme r est fidèlement plat , on en déduit que pour tout $S' \longrightarrow S$ et tout $z \in G_m(S')U_{S'}$ est stable par la transformation $(x,y) \longmapsto (zx, z^{-1}y)$ et que l'on a

$$A(zu, z^{-1}v) = z^{-1}A(u,v) \;,\; B(zu, z^{-1}v) = B(u,v) \;,\; C(zu, z^{-1}v) = z\; C(u,v) \quad .$$

Supposons d'abord que v soit inversible; faisant $z = v$, on en déduit si (u,v) est une section de U , alors $(uv,1)$ en est aussi une et que l'on a

$$A(uv,1) = v^{-1}\, A(u,v) \;,\; B(uv,1) = B(u,v) \quad .$$

Soit alors V l'ouvert de $\underline{G}_a^2{}_S$ défini par

$$(u,v) \in V(S') \Longleftrightarrow (u,v) \in U(S') \text{ et } (uv,1) \in U(S') \quad .$$

C'est un voisinage de la section nulle de $\underline{G}_{a\,S}^{2}$ et on vient de voir que dans $V \cap \underline{G}_{a\,S} \times_S \underline{G}_{m\,S}$, les morphismes $(u,v) \longmapsto A(u,v)$ et $(u,v) \longmapsto v\,A(uv,1)$ (resp. $(u,v) \longmapsto B(u,v)$ et $(u,v) \longmapsto B(uv,1)$) coïncident. Comme $\underline{G}_{a\,S} \times_S \underline{G}_{m\,S}$ est schématiquement dense dans $\underline{G}_{a\,S}^{2}$, ces morphismes coïncident dans V.
On sait que $A(0,1) = 1$, il en résulte qu'il existe un ouvert W de $\underline{G}_{a\,S}$ contenant la section nulle, tel que pour toute section x de W, $A(x,1)$ soit inversible; posant $A(x,1)^{-1} = F(x)$ et raisonnant de même pour C, on en déduit le résultat suivant :

Il existe un ouvert W de $\underline{G}_{a\,S}$ contenant la section nulle, des S-morphismes

$$F : W \longrightarrow \underline{G}_{m\,S}, \quad F(0) = 1,$$
$$H : W \longrightarrow T, \quad H(0) = e,$$
$$G : W \longrightarrow \underline{G}_{m\,S}, \quad G(0) = 1,$$

tels que si $(u,v) \in U(S')$ et $uv \in W(S')$, $S' \longrightarrow S$, on ait

$$(+) \qquad p_r(u)\, p_{-r}(v) = p_{-r}(v\, F(uv)^{-1})\; H(uv)\; p_r(u\, G(uv)^{-1}).$$

B) Utilisons maintenant l'associativité de G pour écrire

$$p_r(u)\, p_{-r}(v)\, p_{-r}(w) = p_r(u)\, p_{-r}(v+w).$$

Il existe un ouvert L de $\underline{G}_{a\,S}^{3}$, contenant la section unité tel que $(u,v,w) \in L(S')$ soit équivalent à

$$(u,v) \in U(S'), \quad uv \in W(S'), \quad (u,v+w) \in U(S'),$$
$$u(v+w) \in W(S'), \quad (u\,G(uv)^{-1}, w) \in U(S'), \quad uw\,G(uv)^{-1} \in W(S').$$

Utilisant alors la formule $(+)$, on écrit aussitôt pour $(u,v,w) \in L(S')$ les relations :

(1) $G(uv + uw) = G(uw\ G(uv)^{-1})\ G(uv)$,

(2) $H(uv + uw) = H(uw\ G(uv)^{-1})\ H(uv)$,

(3) $(v+w)\ F(uv + uw)^{-1} = r(H(uv)^{-1})\ w\ F(uwG(uv)^{-1})^{-1} + v\ F(uv)^{-1}$.

Il est immédiat sur la définition de L que $(1,0,0) \in L(S)$. Considérons donc $L \cap 1 x_S \underline{G}_a S\ x_S \underline{G}_a S = 1x_S M$; M est un ouvert de $\underline{G}^2_a S$, contenant la section $(0,0)$, et pour $(x,y) \in M(S')$, on a

(1') $G(x+y) = G(y\ G(x)^{-1})\ G(x)$,

(2') $H(x+y) = H(y\ G(x)^{-1})\ H(x)$,

(3') $(x+y)\ F(x+y)^{-1} = r(H(x))^{-1}\ y\ F(yG(x)^{-1})^{-1} + x\ F(x)^{-1}$.

Considérons enfin le morphisme de M dans $\underline{G}^2_a S$ défini ensemblistement par $(x,y) \longmapsto (x,y\ G(x)^{-1})$. Il conserve la section $(0,0)$. L'image réciproque N de M par ce morphisme est donc un ouvert de $\underline{G}^2_a S$ contenant la section nulle , et on a prouvé l'assertion suivante :

Il existe un ouvert N de $\underline{G}^2_a S$, contenant la section nulle , tel que si $(x,y) \in N(S')$, alors $x \in W(S')$, $y \in W(S')$, $y\ G(x) \in W(S')$ et on ait les relations :

(1") $G(x+yG(x)) = G(x)\ G(y)$,

(2") $H(x+yG(x)) = H(x)\ H(y)$,

(3") $(x+yG(x))\ F(x+yG(x))^{-1} = x\ F(x)^{-1} + r(H(x))^{-1}\ y\ G(x)\ F(y)^{-1}$.

C) En raisonnant de même avec l'associativité à gauche, on démontre l'assertion suivante :

Il existe un ouvert N' de $\underline{G}^2_a S$, contenant la section nulle , tel que si $(x,y) \in N(S')$, alors $x \in W(S')$, $y \in W(S')$, $y\ F(x) \in W(S')$ et l'on ait

(4") $F(x+yF(x)) = F(x)\,F(y)$,

(5") $H(x+yF(x)) = H(x)\,H(y)$,

(6") $(x+yF(x))\,G(x+yF(x))^{-1} = x\,G(x)^{-1} + r(H(x))^{-1}\,y\,F(x)\,G(y)^{-1}$.

Nous sommes donc amenés à résoudre "l'équation fonctionnelle" (1") .

Lemme 2.3. Soient S un préschéma , W un ouvert de $\underline{G}_{a\,S}$ contenant la section unité , $F : W \longrightarrow \underline{G}_{m\,S}$ un S-morphisme . On suppose que $F(0) = 1$ et qu'il existe un ouvert N de $\underline{G}^{2}_{a\,S}$ contenant la section nulle tel que pour $(x,y) \in N(S')$, on ait $x \in W(S')$, $y \in W(S')$, $y\,F(x) \in W(S')$ et $F(x + y\,F(x)) = F(x)\,F(y)$.

(i) Si S est le spectre d'un corps k , il existe un $a \in k$ avec $F(x) = 1 + a\,x$.

(ii) Si $a = F'(0) \in \Gamma(S,\underline{O}_S)$ est inversible , alors $F(x) = 1+ax$.

En vertu des hypothèses, nous pouvons dériver l'équation donnée pour $x = 0$ (resp. pour $y = 0$) et nous trouvons que

$$F'(y)\,(1 + y\,F'(0)) = F'(0)\,F(y) \quad \text{pour} \quad (0,y) \in N(S') ,$$

resp.

$$F'(x)\,F(x) = F(x)\,F'(0) \quad \text{pour} \quad (x,0) \in N(S') .$$

Comme F prend ses valeurs dans $\underline{G}_m$, la seconde relation nous donne

$$F'(x) = F'(0) \quad \text{pour} \quad (x,0) \in N(S') ;$$

d'où, par la première

$$F'(0)\,(1 + y\,F'(0)) = F'(0)\,F(y) \quad \text{pour} \quad (y,0) \in N(S') ,$$
$$(0,y) \in N(S') .$$

Si $a = F'(0)$ est inversible , cela nous donne

$$F(y) = 1 + a\,y \ ,$$

pour y section d'un ouvert de W contenant la section unité , donc schématiquement dense dans W , ce qui prouve (ii) . Cela prouve aussi (i) lorsque $F'(0) \neq 0$. Si $F'(0) = 0$, alors $F'(x) = 0$ lorsque x est "voisin de 0" , donc $F' = 0$ par densité schématique . Si k est de caractéristique 0 , F est une fraction rationnelle à dérivée nulle , donc constante . Si k est de caractéristique p , et si F n'est pas constante, considérons F comme une série formelle à coefficients positifs et écrivons

$$F(x) = F_1(x^{p^n}) \ , \quad F_1'(x) \neq 0 \ , \quad n > 0 \ , \quad F_1 \in k[[x]] \ .$$

Reportant dans l'équation fonctionnelle, on trouve

$$F_1(x + yF_1(x)^{p^n}) = F_1(x)\,F_1(y) \ ;$$

dérivant pour $x = 0$, on obtient

$$F_1'(x)F_1(x)^{p^n-1} = F_1'(0) \ , \text{ ce qui est idiot .}$$

D) <u>Supposons que</u> S <u>soit le spectre d'un corps</u> . Si $F'(0) = 0$, alors $F = 1$. La formule (5") nous donne alors $H(x+y) = H(x)\,H(y)$, ce qui montre que H se prolonge en un morphisme de groupes $\underline{G}_{a\,S} \longrightarrow T$ (Exp. XVIII 2.3) , qui est nécessairement constant de valeur e . On aura aussi $G(x) = 1 + b\,x$, mais la formule (6") donne alors $b = 0$, ce qui montre que F , G , H sont constants de valeur $(0,e,0)$, dans un voisinage de la section unité, donc partout, ce qui par (+) montre que P_r et P_{-r} commutent , contrairement à l'hypothèse (ii) . Si S est maintenant quelconque , on a donc prouvé que $F'(0)$ n'est nul sur

aucune fibre , donc est inversible. Il en est évidemment de même pour $G'(0)$, ce qui par le lemme 2.3 , montre qu'il existe $a , b \in \underline{G}_m(S)$ avec

$$F(x) = 1 + a x \quad , \quad G(x) = 1 + b x \quad \text{pour} \quad x \in W(S') \quad .$$

E) Le reste est maintenant facile. Reportant les résultats précédents dans (3"), on trouve aussitôt

$$y\, r(H(x)) = y\,[1+ax+ay\,(1+bx)]\,(1+bx)(1+ay)^{-1} \quad .$$

Cette formule est valable pour une section (x,y) de N . Mais comme $\underline{G}_{a\,S} \times_S \underline{G}_{m\,S}$ est schématiquement dense dans $\underline{G}^2_{a\,S}$, on en déduit

$$r(H(x)) = \left[1 + ax + ay(1+bx)\right](1+bx)(1+ay)^{-1} \quad .$$

Faisant $y = 0$, cela donne $r(H(x)) = (1+ax)(1+bx)$. Identifiant les deux expressions précédentes, on trouve $a^2 xy = ab\,xy$. Raisonnant comme précédemment, on en déduit $a^2 = ab$, et comme a est inversible $a = b$, d'où $r(H(x)) = (1+ax)^2$ Comme a est inversible $x \longmapsto 1 + ax$ est un automorphisme de $\underline{G}_{a\,S}$. On peut donc trouver un ouvert W' de $\underline{G}_{a\,S}$ contenant la section 1 et un morphisme

$$P : W' \longrightarrow T$$

tel que $P(1+ax) = H(x)$.

Reportant dans la relation (2") , on trouve aussitôt pour $(x,y) \in N(S')$,

$$P(1+ax+ay) = P\left(\frac{1+ax+ay}{1+ax}\right)\, P(1+ax) \quad ,$$

ce qui prouve qu'il existe un voisinage ouvert de 1 dans $\underline{G}_{m\,S}$ tel que l'on ait pour x et y dans ce voisinage $P(x)\,P(y) = P(xy)$. En vertu de Exp. XVIII 2.3 , il existe un morphisme de groupes

$$r^* : \underline{G}_{m\,S} \longrightarrow T$$

qui prolonge P . Comme $r(H(x)) = (1+ax)^2$ au voisinage de la section 0 ,

on a $r(r^*(z)) = z^2$ au voisinage de la section 1 , donc

$$r \circ r^* = 2 \ .$$

F) Rassemblant les résultats obtenus, on voit qu'il existe un ouvert V' de $\underline{G}_{a\,S}^2$, contenant la section unité, un $a \in \underline{G}_m(S)$, un $r^* \in \mathrm{Hom}_{S\text{-}gr}(\underline{G}_{m\,S}, T)$, tels que $r \circ r^* = 2$, et que pour $(u,v) \in V'(S')$, $1 + auv$ soit inversible et on ait

$$p_r(u)\ p_{-r}(v) = p_{-r}\left(\frac{v}{1 + auv}\right)\ r^*(1+auv)\ p_r\left(\frac{u}{1 + auv}\right) \ .$$

Considérons l'ouvert V de $\underline{G}_{a\,S}^2$ défini par " $1 + auv$ inversible " , i.e. $V = \left(\underline{G}_{a\,S}^2\ ,\right)_f$ où $f(u,v) = 1 + auv$. Les deux membres de la formule précédente définissent des morphismes de V dans G qui coïncident dans un voisinage de la section 0 , donc coïncident dans V . La formule précédente est donc valable pour toute section (u,v) de V . Il en résulte en particulier que $V \subset U$, où U est l'ouvert de A) . Prouvons que $U = V$. Revenant aux notations de A) , on a un morphisme

$$A : U \longrightarrow \underline{G}_{a\,S}$$

qui, sur V , est défini par $A(u,v) = \dfrac{v}{1 + auv}$. Pour montrer que $U = V$, ce qui est une question ensembliste , on est ramené au cas où S est le spectre d'un corps k , donc à l'assertion évidente suivante : l'ensemble de définition de l'application rationnelle $\underline{G}_{a\,k}^2 \longrightarrow \underline{G}_{a\,k}$ définie par la fraction rationnelle $\dfrac{Y}{1 + a\,XY}$ est l'ouvert défini par la fonction $1 + a\,XY$.

G) On a donc démontré l'existence de a et de r ; ainsi que les deux propriétés supplémentaires annoncées. Reste à prouver l'unicité. Soient donc a' et $r^{*\prime}$,

vérifiant aussi les conditions exigées. Si $u,v \in \underline{G}_a(S')^2$, on a aussitôt :

$1 + auv$ inversible $\Rightarrow 1 + a'uv$ inversible et $\frac{v}{1+auv} = \frac{v}{1+a'uv}$;

on a donc pour toute section u de $\underline{G}_a(S')$

$$1 + au \text{ inversible} \Rightarrow 1 + au = 1 + a'u \quad ,$$

ce qui prouve aussitôt $a = a'$.

Avec les mêmes notations, on a alors

$$1 + au \text{ inversible} \Rightarrow r^*(1+au) = r^{*'}(1+au) \quad ,$$

donc également $r^* = r^{*'}$.

Corollaire 2.4. Soient $\exp(Y)\ t\ \exp(X)$ et $\exp(Y')\ t'\ \exp(X')$ deux éléments de $\Omega(S')$. Alors leur produit est dans $\Omega(S')$ si et seulement si $u = 1 + \langle X,Y' \rangle$ est inversible , et on a

(F') $$\exp(Y)\ t\ \exp(X)\ .\ \exp(Y')\ t'\ \exp(X') =$$
$$\exp(Y + u^{-1}r(t)^{-1}\ Y').t\ t'\ r^*(u).\ \exp(u^{-1}r(t')^{-1}X + X') \ .$$

Remarque 2.5. On peut aussi écrire la formule (F) sans faire intervenir les morphismes exp . Transportant par ces morphismes la dualité $\mathcal{J}^r \otimes \mathcal{J}^{-r} \longrightarrow \underline{O}_S$, on obtient un accouplement canonique de fibrés vectoriels :

$$P_r \times_S P_{-r} \longrightarrow \underline{G}_{a\,S} \quad ,$$

que nous noterons encore $(x,y) \longmapsto \langle x,y \rangle$. On a donc

$$\langle \exp X\ ,\ \exp Y \rangle = \langle X,Y \rangle \ .$$

Si $x \in P_r(S')$, $y \in P_{-r}(S')$ et si $1 + \langle x,y \rangle \in \underline{G}_m(S')$, on a

(F) $$x\ .\ y = y^{(1+\langle x,y \rangle)^{-1}}\ .\ r^*(1 + \langle x,y \rangle).\ x^{(1+\langle x,y \rangle)^{-1}} \ .$$

Corollaire 2.6. L'accouplement

$$W(\mathscr{O}^r) \times_S W(\mathscr{O}^{-r}) \longrightarrow \underline{G}_a S$$

définit un accouplement de fibrés principaux sous $\underline{G}_m S$

$$W(\mathscr{O}^r)^* \times_S W(\mathscr{O}^{-r})^* \longrightarrow \underline{G}_m S \quad ,$$

Cet accouplement sera noté $(X,Y) \longmapsto \langle X,Y\rangle$, ou plus simplement $(X,Y) \longmapsto XY$.

Pour toute section $X \in \Gamma(S,\mathscr{O}^r)^*$, il existe donc une unique section $X^{-1} \in \Gamma(S,\mathscr{O}^{-r})^*$ telle que $XX^{-1} = 1$. On a $(zX)^{-1} = z^{-1} X^{-1}$. Le morphisme

$$s : W(\mathscr{O}^r)^* \longrightarrow W(\mathscr{O}^{-r})^*$$

ainsi défini est donc un isomorphisme de préschémas, compatible avec l'isomorphisme $s : z \longmapsto z^{-1}$ sur les groupes d'opérateurs.

On dira souvent que X et $s(X) = X^{-1}$ sont appariés.

Corollaire 2.7. Soient $X \in \Gamma(S,\mathscr{O}^r)^*$ et $a \in \Gamma(S,\underline{O}_S)^*$. On a

$$r^*(a) = \exp((a^{-1}-1)X^{-1}) \exp(X) \exp((a-1)X^{-1}) \exp(-a^{-1} X) .$$

Définition 2.8. Le morphisme r^* est appelé la coracine associée à la racine r .

Remarque 2.9. Si (G,T,r) est un S-système élémentaire , $(G,T,-r)$ en est aussi un . On a donc par le théorème 2.1 une dualité entre $\mathscr{O}^{-r}$ et $\mathscr{O}^r$ et une coracine $(-r)^*$. Prenant l'inverse de la formule (F) , on prouve aussitôt

$$\langle X,Y\rangle = \langle Y,X\rangle \quad , \quad (-r)^* = -r^* .$$

Passons maintenant à l'Algèbre de Lie de G . La racine r et la coracine r^* définissent les formes linéaires

$$\underline{O}_S \xrightarrow{\overline{r^*}} \mathfrak{t} \xrightarrow{\overline{r}} \underline{O}_S .$$

On notera $H_r = \overline{r}^*(1)$. On appelle $\overline{r}$ la racine infinitésimale associée à r , H_r la coracine infinitésimale correspondante .

Lemme 2.10. Soient $S' \longrightarrow S$ et $X, X' \in W(\mathcal{I}^r)(S')$, $H \in W(\mathfrak{t})(S')$, $Y, Y' \in W(\mathcal{I}^{-r})(S')$, $t \in T(S')$. On a

(1) $\quad Ad(t)\, H = H \ , \quad Ad(t)\, X = r(t)\, X \ , \quad Ad(t)\, Y = r(t)^{-1}\, Y \ .$

(2) $$\begin{cases} Ad(\exp(X))\, H = H - \overline{r}(H)\, X \ , & Ad(\exp(X))\, X' = X' \ , \\ Ad(\exp(X))\, Y = Y + \langle X,Y \rangle\, H_r - \langle X,Y \rangle\, X \ . \end{cases}$$

(2') $$\begin{cases} Ad(\exp(Y))\, H = H + \overline{r}(H)\, Y \ , & Ad(\exp(Y))Y' = Y' \ , \\ Ad(\exp(Y))\, X = X + \langle X,Y \rangle\, H_{-r} - \langle X,Y \rangle\, Y \ . \end{cases}$$

(3) $\quad [H,X] = \overline{r}(H)\, X \ , \quad [H,Y] = -\overline{r}(H)\, Y \ , \quad [X,Y] = \langle X,Y \rangle\, H_r \ .$

(4) $\qquad H_{-r} = -\, H_r \ .$

(5) $\qquad \overline{r}\,(H_r) = 2 \ .$

La démonstration de ces différentes formules est soit triviale, soit conséquence immédiate de (F) .

Corollaire 2.11. Supposons H_r non nul sur toute fibre (ce qui est en particulier le cas si 2 est inversible sur S , par (5)) . Alors $X_r \in \Gamma(S, \mathcal{I}^r)^*$ et $X_{-r} \in \Gamma(S, \mathcal{I}^{-r})^*$ sont appariés si et seulement si $[X_r, X_{-r}] = H_r$.

2.12. Soit (G,T,r) un S-système élémentaire . Nous savons (1.19) que le centre de G est $\underline{Cent}(G) = \mathrm{Ker}\ r$, groupe de type multiplicatif et de type fini . Si Q est un sous-groupe de type multiplicatif de $\underline{Cent}(G)$, le quotient G/Q est affine sur S (Exp. IX 2.5), lisse sur S (Exp. VI), à fibres connexes et réductives de rang semi-simple 1 (Exp. XIX 1.8). Posons $G' = G/Q$, c'est un S-groupe réductif de rang semi-simple 1 ; $T' = T/Q$ en est un tore maximal. L'ouvert $P_{-r} \cdot T \cdot P_r$ de G est stable par Q et on voit aussitôt que le quotient est isomorphe à $P_{-r} \times_S T/Q \times_S P_r$. Si on note r' le caractère de T' induit par r , il en résulte que le morphisme dérivé du morphisme canonique $G \to G'$ induit un isomorphisme $\mathfrak{g}^r \longrightarrow \mathfrak{g}'^{r'}$ (resp. $\mathfrak{g}^{-r} \longrightarrow \mathfrak{g}'^{-r'}$) . En particulier , r' est une racine de G' par rapport à T' . Donc :

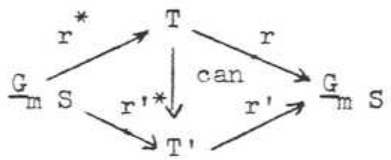
Lemme 2.13. Si Q est un sous-groupe de type multiplicatif de $\mathrm{Ker}\ r$, $(G/Q, T/Q, r/Q)$ est un système élémentaire.

De plus , par les assertions d'unicité de 1.5 et 2.1 :

Lemme 2.14. Sous les conditions précédentes, les diagrammes suivants sont commutatifs

$$\begin{array}{ccccc} W(\mathfrak{g}^r) & \xrightarrow{\exp} & G & \xleftarrow{\exp} & W(\mathfrak{g}^{-r}) \\ \downarrow \text{can} & & \downarrow \text{can} & & \downarrow \text{can} \\ W(\mathfrak{g}'^{r'}) & \xrightarrow{\exp} & G' & \xleftarrow{\exp} & W(\mathfrak{g}'^{-r'}) \end{array} .$$

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}^r \otimes \mathfrak{g}^{-r} & \xrightarrow{\sim} & \underline{O}_S \\ \downarrow \text{can} & & \downarrow \text{id} \\ \mathfrak{g}'^{r'} \otimes \mathfrak{g}'^{-r'} & \xrightarrow{\sim} & \underline{O}_S \end{array} .$$



3. Le groupe de Weyl.

Si (G,T,r) est un S-système élémentaire, on notera

$$N = \underline{\mathrm{Norm}}_G(T) \quad , \quad W = \underline{\mathrm{Norm}}_G(T)/T \quad ,$$

(cf. Exp. XIX 6.3); N est un sous-groupe fermé de G , lisse sur S . On notera $Q = N - T$ le sous-préschéma ouvert de T induit sur le complémentaire de N . Notons R le tore maximal (unique) de $\mathrm{Ker}\ r$, et T' l'image de $r^* : \underline{G}_{m\,S} \longrightarrow T$, qui est un sous-tore de dimension 1 de T . Le morphisme $T' \times_S R \longrightarrow T$ induit par le produit dans T est surjectif (donc fidèlement plat); en effet, on est ramené à le vérifier sur les fibres géométriques , et cela résulte aussitôt de la formule $r \circ r^* = 2$.

Théorème 3.1. Avec les notations précédentes :

(i) W est isomorphe au groupe constant $(\underline{\mathbb{Z}}/2\underline{\mathbb{Z}})_S$.

(ii) Q est un fibré principal homogène localement trivial sous T , à gauche par la loi $(t,q) \longmapsto tq$ (resp. à droite par la loi $(q,t) \longmapsto qt$).

(iii) On a la formule

$$\mathrm{int}(w)\ t = t\, r^*(r(t))^{-1}$$

pour $w \in Q(S')$, $t \in T(S')$, $S' \longrightarrow S$.

Dans la décomposition $T_{S'} = T'_{S'} \cdot R_{S'}$, int(w) induit l'identité sur $R_{S'}$ et la symétrie sur $T'_{S'}$. On a les relations

$$r \circ \mathrm{int}(w) = r^{-1} \quad , \quad \mathrm{int}(w) \circ r^* = r^{*-1} \quad .$$

(iv) Pour $X \in W(\mathcal{J}^r)^*(S')$, $S' \longrightarrow S$, posons

$$w_r(X) = \exp(X) \exp(-X^{-1}) \exp(X) \quad .$$

Alors $w_r(X) \in Q(S')$ et le morphisme $w_r : W(\mathcal{J}^r)^* \longrightarrow Q$ ainsi défini vérifie

$$w_r(z\,X) = r^*(z)\, w_r(X) = w_r(X)\, r^*(z)^{-1} \quad ,$$

$(z \in \underline{G}_m(S') \ , \ X \in W(\mathcal{J}^r)^*(S') \ , \ S' \longrightarrow S \ )$.

(v) On a la relation

$$w_r(X)\ w_r(Y) = w_r(-XY^{-1}) \quad .$$

En particulier ,

$$w_r(X)^2 = r^*(-1) \in {}_2T(S) \cap \underline{\mathrm{Cent}}(G)(S) \quad ,$$

$$w_r(X)^{-1} = w_r(-X) = r^*(-1)\, w_r(X) \quad .$$

(vi) Si on définit de même pour $Y \in W(\mathcal{J}^{-r})^*(S')$,

$$w_{-r}(Y) = \exp(Y) \exp(-Y^{-1}) \exp(Y) \ ,$$

on a (en plus des formules analogues aux précédentes)

$$w_{-r}(X^{-1}) = w_r(X)^{-1} = w_r(-X) \quad ,$$

$$w_r(X)\ w_{-r}(Y) = r^*(XY) \quad .$$

Démonstration. (i) a déjà été vu en Exp. XIX 2.4 ; il en résulte aussitôt que Q est bien un fibré principal homogène sous T pour les lois définies dans (ii); le fait qu'il soit localement trivial résulte notamment de (iv).

Démontrons (iii) ; si $w \in Q(S)$, il est clair que $r \circ int(w)$ est une racine de G par rapport à T , qui est donc localement égale à r où -r ; comme sur chaque fibre c'est -r (BIBLE, 12-05, démonstration du cor. à la prop. 1), on a $r \circ int(w) = -r$. Par transport de structure on en déduit $-r^* = int(w)^{-1} \circ r^* = int(w) \circ r^*$, car $int(w)^2 = int(w^2)$ et w^2 est une section de T . Donc $int(w)$ induit la symétrie sur T' ; comme R est central , $int(w)$ induit l'identité sur R . La formule de (iii) définit un morphisme $T \to T$ qui vérifie les mêmes propriétés, donc coïncide avec $int(w)$.

Démontrons (iv) . On a successivement

$$w_r(X)\ t\ w_r(X)^{-1} = \exp(X)\exp(-X^{-1})\exp(X)\ t\ \exp(-X)\exp(X^{-1})\exp(-X) =$$
$$= \exp(X)\ \exp(-X^{-1})\ \exp(X - r(t)X)\ \exp(r(t)^{-1}\ X^{-1})\ \exp(-r(t)X)\ t\ .$$

Par application de la formule (F) , on a

$$\exp(-X^{-1})\ \exp((1-r(t))X) = \exp((r(t)^{-1} - 1)X)\ r^*(r(t))^{-1} \exp(-r(t)^{-1}X^{-1})\ .$$

Reportant dans la relation précédente, on trouve

$$int(w_r(X))\ t = \exp(r(t)^{-1}X)\ r^*(r(t))^{-1}\ \exp(-r(t)X)\ t$$
$$= \exp(\ a\ X\ )\ r^*(r(t))^{-1}\ t\ ,$$

où

$$a\ =\ r(t)^{-1} - r(r^*(r(t)))^{-1}\ r(t)\ ,$$

mais $r \circ r^* = 2$, ce qui donne aussitôt $a = 0$ et $w_r(X) \in Q(S')$.

Prouvons maintenant la seconde assertion de (iv) . On a

$$r^*(z)\ w_r(X) = \exp(z^2\ X)\ \exp(-z^{-2}\ X^{-1})\ \exp(z^2\ X)\ r^*(z) =$$

$$= \exp(zX)\ \exp((z^2-z)X)\ \exp(-z^{-2}X^{-1})\ \exp(z^2X)\ r^*(z) =$$

$$= \exp(zX)\ \exp(-z^{-1}X^{-1})\ r^*(z)^{-1}\ \exp((z^3-z^2)X)\ \exp(z^2X)\ r^*(z) =$$

$$= \exp(zX)\ \exp(-z^{-1}X^{-1})\ \exp(zX) = w_r(zX)\ .$$

Prouvons (v) . En vertu du résultat précédent, la première formule de (v) résulte aussitôt de la seconde; prouvons celle-ci :

$$w_r(X)^2 = \exp(X)\ \exp(-X^{-1})\ \exp(2X)\ \exp(-X^{-1})\ \exp(X) =$$

$$= \exp(X)\ \exp(-X^{-1})\ \exp(X^{-1})\ r^*(-1)\ \exp(-2X)\ \exp(X) =$$

$$= \exp(X)\ r^*(-1)\ \exp(-X) = r^*(-1)\ ,$$

car $r(r^*(-1)) = (-1)^2 = 1$, ce qui prouve que $r^*(-1) \in \underline{\mathrm{Cent}}(G)(S)$.

Prouvons enfin (vi) . La première assertion est un cas particulier de la seconde, démontrons celle-ci. Les deux membres de cette formule définissent des morphismes de $W(\mathcal{G}^r)^* \times_S W(\mathcal{G}^{-r})^*$ dans G . Pour prouver qu'ils coïncident, il suffit de le faire sur un ouvert non vide sur chaque fibre (Exp. XVIII 1.4); il suffit donc de vérifier la relation lorsque $1 + XY$ est inversible. On a alors successivement :

$$w_r(X)\ w_{-r}(Y) = \exp(X)\ \exp(-X^{-1})\ \exp(X)\ \exp(Y)\ \exp(-Y^{-1})\ \exp(Y)$$

$$= \exp(X)\ \exp(-X^{-1})\ \exp(\tfrac{Y}{1+XY})\ r^*(1+XY)\ \exp(\tfrac{X}{1+XY})\ \exp(-Y^{-1})\ \exp(Y)$$

$$= \exp(X)\ \exp(\tfrac{-X^{-1}}{1+XY})\ r^*(1+XY)\ \exp(\tfrac{-Y^{-1}}{1+XY})\ \exp(Y)$$

$$= \exp(-X^{-2}Y^{-1})\ r^*(\tfrac{XY}{1+XY})\ \exp(X + Y^{-1})\ r^*(1+XY)\ \exp(\tfrac{-Y^{-1}}{1+XY})\ \exp(Y)$$

$$= \exp(-X^{-2}Y^{-1})\ r^*(XY)\ \exp(\tfrac{Y^{-1}+ X}{(1+XY)^2})\ \exp(\tfrac{-Y^{-1}}{1+XY})\ \exp(Y)$$

$$= r^*(XY)\ \exp(-Y)\ \exp(Y) = r^*(XY)\ .$$

Corollaire 3.2. Soit $n \in \underline{\mathbb{Z}}$, $n \neq 0$. Pour tout $w \in G(S)$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $w \in Q(S)$,

(ii) On a $\mathrm{int}(w) \circ n\, r^* = -\, n\, r^*$ (on rappelle que $(n\, r^*)(z) = r^*(z)^n$).

On a (i) $\Rightarrow$ (ii) (assertion (iii) du théorème); réciproquement, on peut supposer que Q possède une section et on est ramené à prouver :

Lemme 3.3. On a $\underline{\mathrm{Cent}}_G(n\, r^*) = T$ pour $n \neq 0$.

En effet, l'image T' de $n\, r^*$ est un sous-tore de G. Il en résulte (Exp. XIX 2.8) que $\underline{\mathrm{Cent}}_G(n\, r^*)$ est un sous-groupe réductif de G, contenant T. Comme sur chaque fibre on a $\underline{\mathrm{Cent}}_{G_{\overline{s}}}(n\, r^*_{\overline{s}}) \neq G_{\overline{s}}$, on a $\underline{\mathrm{Cent}}_{G_{\overline{s}}}(n\, r^*_{\overline{s}}) = T_{\overline{s}}$ (Exp. XIX dernière assertion de 1.6), donc $\underline{\mathrm{Cent}}_G(nr^*) = T$, car il s'agit de sous-groupes lisses de G.

Remarque 3.4. La construction de w_r et le fait que $w_r(X)$ normalise T ne s'appuient que sur la formule (F). En particulier, si G est un S-groupe vérifiant les conditions de 2.2, $\underline{\mathrm{Norm}}_G(T)$ est différent de T sur chaque fibre. Il en résulte que si G est un S-groupe affine à fibres connexes vérifiant les conditions de 2.2, il est réductif de rang semi-simple 1. En effet, il est lisse au voisinage de la section unité, donc lisse et on peut appliquer le critère de Exp. XIX 1.11.

3.5. Avant d'énoncer le théorème suivant, faisons quelques remarques. Nous identifions comme d'habitude $\mathcal{M}^{-r}$ à $(\mathcal{M}^r)^{\otimes -1}$. De même, nous identifierons

$\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_S}(\mathfrak{g}^{-r}, \mathfrak{g}^{r})$ à $(\mathfrak{g}^{r})^{\boxtimes 2}$ et donc

$$\underline{\mathrm{Isom}}_{\underline{O}_S\text{-mod.}}(W(\mathfrak{g}^{-r}), W(\mathfrak{g}^{r})) \text{ à } (W(\mathfrak{g}^{r})^{\boxtimes 2})^* .$$

Si $w \in Q(S)$, alors $\mathrm{Ad}(w)$ permute $\mathfrak{g}^{r}$ et $\mathfrak{g}^{-r}$, (3.1, (iii)), donc définit un isomorphisme :

$$a_r(w) : \mathfrak{g}^{-r} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}^{r} ,$$

que nous identifierons donc à une section $a_r(w) \in \Gamma(S, (\mathfrak{g}^{r})^{\boxtimes 2})^*$.

Cette construction est compatible avec le changement de base et définit donc un morphisme

$$a_r : Q \longrightarrow W((\mathfrak{g}^{r})^{\boxtimes 2})^* .$$

<u>Théorème</u> 3.6. <u>Soit</u> $a_r : Q \longrightarrow W((\mathfrak{g}^{r})^{\boxtimes 2})^*$ <u>le morphisme défini par</u>

$$\mathrm{Ad}(w)\, Y = a_r(w)\, Y \qquad (Y \text{ } \underline{\text{section de}} \text{ } W(\mathfrak{g}^{-r})) .$$

(i) <u>On a</u>

$$\mathrm{int}(w)\, \exp(Y) = \exp(a_r(w)\, Y)$$

<u>pour tout</u> $S' \to S$ <u>et tous</u> $w \in Q(S')$, $Y \in W(\mathfrak{g}^{-r})(S')$.

(ii) <u>On a</u>

$$a_r(tw) = r(t)\, a_r(w) , \quad a_r(wt) = r(t)^{-1}\, a_r(w) .$$

(iii) <u>Si on définit de même</u> $a_{-r} : Q \longrightarrow W(\mathfrak{g}^{-r})^{\boxtimes 2})^*$, <u>on a</u>

$$a_{-r}(w) = a_r(w)^{-1} .$$

(iv) <u>Pour tout</u> $X \in W(\mathfrak{g}^{r})^*(S')$, $S' \to S$, <u>on a</u>

$$a_r(w_r(X)) = -X^2 .$$

L'assertion (i) est triviale, par la caractérisation des morphisme exp donnée en 1.5 . L'assertion (ii) est immédiate, ainsi que (iii) . Prouvons (iv) : soient $X \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^r)^*$, $Z \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^r)$; on a par définition

$$a_r(w)^{-1} \; Z = \mathrm{Ad}(w_r(X))\; Z =$$

$$= \mathrm{Ad}(\exp(X))\; \mathrm{Ad}(\exp(-X^{-1}))\; \mathrm{Ad}(\exp(X))\; Z =$$

$$= \mathrm{Ad}(\exp(X))\; \mathrm{Ad}(\exp(-X^{-1}))\; Z =$$

$$= \mathrm{Ad}(\exp(X))\,(\, Z - X^{-1}Z.H_{-r} - X^{-1}Z \,.\, X^{-1}) \quad ,$$

par la formule (2') de 2.10. Appliquant maintenant 2.10 , (2) , on obtient

$$Z - X^{-1}Z(H_{-r} - 2\,X) - X^{-1}Z\,(X^{-1} + X^{-1}X\,H_r - X\,X^{-1}\,X) =$$

$$- X^{-2}\,Z - X^{-1}Z\,(H_{-r} + H_r) = - X^{-2}\,Z \quad ,$$

ce qui achève la démonstration.

Corollaire 3.7. On a en particulier

$$\mathrm{int}(w_r(X))\; \exp(X) = \exp(-X^{-1}) \quad ,$$

d'où (par la définition de $w_r(X)$) :

$$w_r(X)\; \exp(X)\; w_r(X)^{-1} = \exp(-X)\; w_r(X)\; \exp(-X) \quad ,$$

soit, par un calcul immédiat

$$\left[w_r(X)\; \exp(X) \right]^3 = e \quad .$$

Corollaire 3.8. Soient $X \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^r)^*$ et $n \in \underline{\mathbb{Z}}$, $n \neq 0$. Posons $u = \exp(X) \in P_r^*(S)$. Alors $w_r(X)$ est l'unique section $w \in G(S)$ qui vérifie

(i) $\mathrm{int}(w) \circ nr^* = - nr^*$.

(ii) $(w\,u)^3 = e$.

On sait que $w_r(X)$ vérifie bien ces conditions . Réciproquement, soit $w \in G(S)$ vérifiant (i) et (ii) . Par 3.2 et 3.1 (ii) , on sait qu'il existe un $t \in T(S)$ avec $w = w_r(X)\ t$. On a alors

$$w\ u\ w^{-1} = w_r(X)\ t\ \exp(X)\ t^{-1}\ w_r(X)^{-1} = \exp(-r(t)X^{-1}) ,$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} u^{-1} w\ u^{-1} &= \exp(-X)\ w_r(X)\ t\ \exp(-X) = \\ &= \exp(-X)\ w_r(X)\ \exp(-X)\ \exp(X-r(t)X)\ t = \\ &= \exp(-X^{-1})\ \exp(X-r(t)X)\ t = \exp(-X^{-1})\ t\ \exp(H) . \end{aligned}$$

Or $(w\ u)^3 = e \Longleftrightarrow w\ u\ w^{-1} = u^{-1}\ w\ u^{-1}$, comparant les deux décompositions de cet élément sur $P_{-r} \cdot T \cdot P_r$, on en tire $t = e$.

Remarque 3.9. On peut résumer un certain nombre des résultats de ce n° par le diagramme suivant de fibrés principaux homogènes (à gauche)

$$\begin{array}{ccccc} W(\mathfrak{g}^r)^* & \xrightarrow{w_r} & Q & \xrightarrow{a_r} & W((\mathfrak{g}^r)^{\boxtimes 2})^* \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \underline{G}_{m\,S} & \xrightarrow{r^*} & T & \xrightarrow{r} & \underline{G}_{m\,S} \end{array} .$$

Remarquons que a_r est fidèlement plat (r l'étant) et que w_r est un monomorphisme si et seulement si r^* est un monomorphisme. Nous laissons au lecteur le soin d'écrire les diagrammes correspondants pour les structures de fibrés principaux à droite, ainsi que les diagrammes du même genre pour la racine $-r$, et d'étudier les relations entre ces différents diagrammes.

Lemme 3.10. Soient S un préschéma, q un entier > 0 tel que $x \longmapsto x^q$ définisse un endomorphisme de $\underline{G}_{a\,S}$, (G,T,r) et (G',T',r') deux S-systèmes

élémentaires , $f : G \longrightarrow G'$ un morphisme de S-groupes . Soient

$$h : (\mathcal{g}^r)^{\otimes q} \xrightarrow{\sim} \mathcal{g}'^{r'}$$

un isomorphisme de $\underline{O}_S$-Modules et

$$h^\vee : (\mathcal{g}^{-r})^{\otimes q} \xrightarrow{\sim} \mathcal{g}'^{-r'}$$

l'isomorphisme contragrédient. Supposons pour tout $S' \longrightarrow S$ et tout $X \in W(\mathcal{g}^r)(S')$, on ait

$$f(\exp(X)) = \exp(h(X^q)) .$$

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $f(r^*(z)) = r'^*(z)^q$.

(ii) $f(w_r(Z)) = w_{r'}(h(Z^q))$.

(iii) $f(\exp(Y)) = \exp(h^\vee(Y^q))$.

(Chaque condition doit se lire : pour tout $S' \longrightarrow S$ et tous $z \in \underline{G}_m(S')$, $Z \in W(\mathcal{g}^r)^*(S')$, $Y \in W(\mathcal{g}^{-r})(S')$, on a ...) .

En effet, (i) $\Rightarrow$(ii) par 3.8 , (ii) $\Rightarrow$(iii) par 3.7 , (iii) $\Rightarrow$(i) par 2.7.

Proposition 3.11. Soient S un préschéma , $q \in \underline{\mathbb{Z}}$, $q > 0$, tel que $x \longmapsto x^q$ définisse un endomorphisme de $\underline{G}_{a\,S}$, (G,T,r) et (G',T',r') deux S-systèmes élémentaires , $f : G \longrightarrow G'$ un morphisme de groupes . Les conditions suivantes sur f sont équivalentes :

(i) La restriction de f à T se factorise en un morphisme $f_T : T \longrightarrow T'$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \underline{G}_{m\,S} & \xrightarrow{r^*} & T & \xrightarrow{r} & \underline{G}_{m\,S} \\ \downarrow q & & \downarrow f_T & & \downarrow q \\ \underline{G}_{m\,S} & \xrightarrow{r'^*} & T' & \xrightarrow{r'} & \underline{G}_{m\,S} \end{array} .$$

(ii) Il existe un isomorphisme de $\underline{O}_S$-Modules (unique)

$$h : (\mathcal{G}^r)^{\underline{q}} \longrightarrow \mathcal{G}'^{r'}$$

tel que $f(\exp(X)) = \exp(h(X^q))$, $f(\exp(Y)) = \exp(h^\vee(Y^q))$ pour tous $X \in W(\mathcal{G}^r)(S')$, $Y \in W(\mathcal{G}^{-r})(S')$, $S' \longrightarrow S$ (il en résulte que f vérifie également les conditions équivalentes de 3.10).

On a (ii) $\Longrightarrow$ (i) . En effet, par 3.10 , (ii) entraîne $f \circ r^* = q\, r'^*$, donc par 3.3 $f \mid T$ se factorise par T' . Reste à prouver $r'(f(t)) = r(t)^q$, ce qui résulte aussitôt du fait que f induit un morphisme de groupes $T \cdot P_r \longrightarrow T' \cdot P_{r'}$. Prouvons (i) $\Longrightarrow$ (ii) . Soit $X \in \Gamma(S, \mathcal{G}^r)$, $Y \in \Gamma(S, \mathcal{G}^{-r})$. Posons $p_+(x) = f(\exp(xX))$, $p_-(x) = f(\exp(yY))$, ce sont des morphismes de groupes

$$p_+, p_- : \underline{G}_a\, S \longrightarrow G .$$

Or on a

$$\begin{aligned} \mathrm{int}(r'^*(z))^q\, p_+(x) &= \mathrm{int}(f_T(r^*(z)))\, f(\exp(xX)) \\ &= f(\mathrm{int}(r^*(z))\exp(xX)) = f(\exp(z^2 xX)) \\ &= p_+(z^2 x) . \end{aligned}$$

Appliquant le lemme 1.2 (avec $Q = r'^*(\underline{G}_m\, S)$) , on en déduit qu'il existe une section $X' \in \Gamma(S, \mathcal{G}^{r'})$ avec

$$f(\exp(xX)) = p_+(x) = \exp(x^q X') .$$

De même, il existe une section $Y' \in \Gamma(S, \mathcal{G}^{-r'})$ avec

$$f(\exp(yY)) = \exp(y^q Y') .$$

Ecrivant maintenant que f est un morphisme de groupes, donc qu'il respecte la formule (F), on obtient aussitôt

$$X^q\, Y^q = (X\, Y)^q = X'\, Y' .$$

On en conclut aisément que $X^q \longmapsto X'$ et $Y^q \longmapsto Y'$ définissent des isomorphismes h et $h^\vee$ comme annoncé .

Proposition 3.12. Soient (G,T,r) un S-système élémentaire , $w \in Q(S)$, posons

$$\Omega_o = \Omega \cap \mathrm{int}(w)^{-1}\Omega \ .$$

Soit d la fonction sur Ω définie par

$$d(\exp(Y).t.\exp(X)) = r(t)^{-1} + XY \ .$$

Alors $\Omega_o = \Omega_d$ et on a pour $\exp(Y)\ t\ \exp(X) \in \Omega_o(S')$ la formule suivante (on pose $d = d(\exp(Y).t.\exp(X))$:

$$\mathrm{int}(w)(\exp(Y).t.\exp(X)) = \exp(d^{-1}\, a_r(w)^{-1}\, X\,).t\ r^*(d)\ .\ \exp(d^{-1}\, a_r(w)\, Y) \ .$$

De plus , $d \circ \mathrm{int}(w) = d^{-1}$.

En effet, on a aussitôt

$$\mathrm{int}(w)(\exp(Y)\ t\ \exp(X)) = \exp(a_r(w)^{-1}\, Y).t\ r^*(r(t))^{-1}.\ \exp(a_r(w)\, X) \ .$$

D'après (2.4) , c'est une section de Ω si et seulement $r(t)XY + 1$ est inversible, ce qui prouve bien $\Omega_o = \Omega_d$; appliquant ensuite la formule (F) , on en déduit par un calcul trivial la formule annoncée. La dernière assertion est alors immédiate.

N.B. On remarquera que la fonction d est indépendante du choix de w .

4. Le théorème d'isomorphisme .

Théorème 4.1. Soient S un préschéma , $q \in \underline{\mathbb{Z}}$ $q > 0$ tel que $x \mapsto x^q$ soit un endomorphisme de $\underline{G}_{a\,S}$, (G,T,r) et (G',T',r') deux S-systèmes élémentaires . Soient

$$h : (\mathcal{J}^r)^{\underline{q}} \longrightarrow \mathcal{J}'^{r'}$$

et

$$h^\vee : (\mathcal{J}^{-r})^{\underline{q}} \longrightarrow \mathcal{J}'^{-r'}$$

deux isomorphismes contragrédients l'un de l'autre. Soit $f_T : T \longrightarrow T'$ un morphisme de S-groupes rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \underline{G}_{m\,S} & \xrightarrow{q} & \underline{G}_{m\,S} \\ {\scriptstyle r^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r'^*} \\ T & \xrightarrow{f_T} & T' \\ {\scriptstyle r}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r'} \\ \underline{G}_{m\,S} & \xrightarrow{q} & \underline{G}_{m\,S} \end{array} .$$

Il existe un unique morphisme de S-groupes $f : G \longrightarrow G'$ qui prolonge f_T et vérifie

$$f(\exp(X)) = \exp(h(X^q))$$

pour tout $X \in W(\mathcal{J}^r)(S')$, $S' \longrightarrow S$. De plus, ce morphisme vérifie aussi $f(\exp(Y)) = \exp(h^\vee(Y^q))$ et $f(w_r(Z)) = w_r(h(Z^q))$, pour tout $S' \longrightarrow S$ et tous $Y \in \Gamma(S, \mathcal{J}^{-2})$, $Z \in \Gamma(S, \mathcal{J}^r)^*$.

Si $f : G \longrightarrow G'$ prolonge f_T , alors $f \circ r^* = r'^{*q}$. Si de plus f vérifie la seconde condition, alors il vérifie aussi les deux autres par 3.10. Il en résulte que f est déterminée sur Ω par la relation

$$f(\exp(Y)\ t\ \exp(X)) = \exp(h^\vee(Y^q))\ f_T(t)\ \exp(h(X^q)) .$$

Comme Ω est schématiquement dense dans G , ceci démontre déjà l'unicité de f . Pour en prouver l'existence, il suffit, en vertu de Exp. XVIII 2.3 , de prouver que la formule précédente définit un morphisme "génériquement multiplicatif" de Ω dans G' . Or, par 2.4 , cela revient à vérifier que $r' \circ f = r^q$, ce qui résulte de ce que f prolonge f_T .

Scholie 4.2. On peut aussi interpréter 4.1 de la façon suivante : on considère la catégorie $\underline{E}$ des S-systèmes élémentaires et la catégorie $\underline{D}$ des couples $(\underline{G}_{m\,S} \xrightarrow{r^*} T \xrightarrow{r} \underline{G}_{m\,S} , \underline{L})$, où T est un tore, r et r^* des morphismes de groupes tels que $r \circ r^* = 2$, et $\underline{L}$ un $\underline{O}_S$-Module inversible (Le lecteur précisera les morphismes des deux catégories envisagées). On définit un foncteur $\underline{C} \longrightarrow \underline{D}$ par $(G,T,r) \longmapsto (\underline{G}_{m\,S} \xrightarrow{r^*} T \xrightarrow{r} \underline{G}_{m\,S} , \mathcal{N}^r)$. Le théorème précédent dit que ce foncteur est pleinement fidèle . C'est en fait une équivalence de catégories comme on le verra au n° suivant. On a déjà:

Corollaire 4.3. Si $q = 1$ et si f_T est un isomorphisme , alors f est un isomorphisme .

Corollaire 4.4. Si $q = 1$ et si f_T est fidèlement plat de noyau Q (cf. Exp. IX 2.7), alors f est fidèlement plat (quasi-compact) de noyau Q , donc identifie G' à G/Q .

En effet, si f_T est fidèlement plat de noyau Q , alors $Q = \mathrm{Ker}\, f_T \subset \mathrm{Ker}\, f_T \circ r' = \mathrm{Ker}\, r$. Introduisant le S-système élémentaire $(G/Q, T/Q, r/Q)$ de 2.13 , on est ramené par 2.14 à prouver que f/Q induit un isomorphisme de G/Q sur G' , ce qui résulte aussitôt de 4.3.

5. Exemples de systèmes élémentaires, applications .

5.1. Soient S un préschéma , L un $\underline{O}_S$-Module inversible . Considérons le groupe G_L sur S défini par

$$G_L(S') = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} , \; a,d \in \underline{G}_a(S') \; , \; b \in W(L)(S'), \; c \in W(L^{-1})(S') \right.$$
$$\left. ad-bc \in \underline{G}_m(S') \right\} ,$$

muni de la loi de multiplication habituelle des matrices. Il est localement isomorphe à $GL_{2\,S}$. C'est donc un S-schéma en groupes , affine et lisse sur S , à fibres connexes .

Remarque . Soient L' et L" deux faisceaux inversibles sur S , tels que $L = L'' \otimes L'^{-1}$. Alors, par les formules $(x,y) \longmapsto (ax+by, cx+dy)$, on réalise un isomorphisme de S-groupes

$$G_L \xrightarrow{\sim} \underline{GL}(L' \oplus L'') \quad .$$

5.2. On notera S_L le sous-groupe fermé de G_L défini par la relation ad - bc = 1. C'est aussi un S-schéma en groupes, affine et lisse sur S , à fibres connexes (isomorphe à $\underline{SL}(L' \oplus L'')$ par l'isomorphisme précédent).

De même, considérons le morphisme $\underline{G}_{m\,S} \longrightarrow G_L$ défini par $z \longmapsto \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$. C'est un monomorphisme central; par passage au quotient, on en déduit un groupe P_L , lisse et affine sur S , à fibres connexes (cf. Exp. VIII 5.7)

On peut voir que par passage au quotient à partir de l'isomorphisme de la remarque, P_L s'identifie au groupe des automorphismes du fibré projectif $\underline{P}(L' \otimes L'')$, (cf. EGA, II 4.2.7).

On notera i et p les morphismes canoniques

$$S_L \xrightarrow{\ i\ } G_L \xrightarrow{\ p\ } P_L \quad ,$$

i est une immersion fermée , p est fidèlement plat et affine .

5.3. Considérons les morphismes de groupes

$$t_G : \underline{G}_m^2 S \longrightarrow G_L \quad , \quad t_G(z,z') = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z' \end{pmatrix} \ ;$$

$$t_S ; \underline{G}_m S \longrightarrow S_L \quad , \quad t_S(z) = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} \ ;$$

$$t_P : \underline{G}_m S \longrightarrow P_L \quad , \quad t_P(z) = p(t_G(z,1)) \ .$$

Ce sont des monomorphismes de groupes, qui définissent dans chaque groupe un tore (trivial) de codimension relative 2 . Pour tout $s \in S$, soit $X \in \Gamma(\overline{s} , L \otimes \overline{s})^*$; alors la section $\begin{pmatrix} 0 & \overline{X} \\ X^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ de $G_L \overline{s}$ normalise $t_G(\underline{G}_m^2 \overline{s})$ et ne le centralise pas; on conclut alors de Exp. XIX 1.6 que G_L est <u>réductif</u>, de <u>rang semi-simple</u> 1 , de <u>tore maximal</u> $t_G(\underline{G}_m^2 S)$. On raisonne de même pour S_L et P_L , et on voit que S_L (resp. P_L) est réductif, de rang semi-simple 1 , de tore maximal $t_S(\underline{G}_m S)$ (resp. $t_P(\underline{G}_m S)$.

5.4. En raisonnant comme d'habitude, on détermine aussitôt l'Algèbre de Lie de ces différents groupes et l'opération adjointe du tore maximal choisi. Faisons-le pour G_L ; c'est immédiat par Exp. II 4.8 : $\underline{\mathrm{Lie}}(G_L/S)$ est l'Algèbre de Lie des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, a et d sections de $\underline{O}_S$, b section de L , c section de L^{-1}, avec le crochet habituel; on a

$$\mathrm{Ad}(t_G(z,z'))\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & zz'^{-1} b \\ z'z^{-1} c & d \end{pmatrix} .$$

Notons $\underline{\mathrm{Lie}}(G_L/S) = \mathfrak{g}$. Soit $r_G : t_G(\underline{G}_m^2 S) \longrightarrow \underline{G}_m S$ le caractère défini par

$$r_G(t_G(z,z')) = zz'^{-1} .$$

On voit aussitôt sur la relation précédente que r est une racine de G_L par rapport à $t_G(\underline{G}_m^2 S)$ et que le morphisme

$$u : L \longrightarrow \mathfrak{g} \quad (\text{resp. } u_- : L^{-1} \longrightarrow \mathfrak{g})$$

défini par $u(X) = \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (resp. $u_-(X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ X & 0 \end{pmatrix}$) est un isomorphisme de L sur $\mathfrak{g}^{r_G}$ (resp. L^{-1} sur $\mathfrak{g}^{-r_G}$).

On a donc prouvé que $(G, t_G(\underline{G}_m^2 S), r_G)$ est un S-<u>système élémentaire</u>.

Posant de même

$$r_S(t_S(z)) = z^2 \quad , \quad r_P(t_P(z)) = z \quad ,$$

on démontre que $(S_L , t_S(\underline{G}_m S) , r_S)$, $(P_L , t_P(\underline{G}_m S) , r_P)$ sont des systèmes élémentaires, et on définit des isomorphismes de L (resp. L^{-1}) avec les facteurs directs correspondants des Algèbres de Lie de S_L et P_L.

5.5. Posons $\exp\begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a ainsi défini un morphisme

$$W(\mathfrak{g}^{r_G}) \longrightarrow G_L$$

qui induit sur les Algèbres de Lie le morphisme canonique, donc est l'unique morphisme de ce type (1.5). De même, on pose $\exp\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{pmatrix}$. Effectuant le calcul explicite de la formule (F), on trouve

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = XY \quad , \quad r_G^*(z) = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} = t_G(z, z^{-1}) .$$

Le morphisme w_{r_G} est alors

$$w_{r_G}\begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & X \\ -X^{-1} & 0 \end{pmatrix} ;$$

le morphisme a_{r_G} est

$$a_{r_G}\begin{pmatrix} 0 & P \\ Q & 0 \end{pmatrix} = P\,Q^{-1} \quad .$$

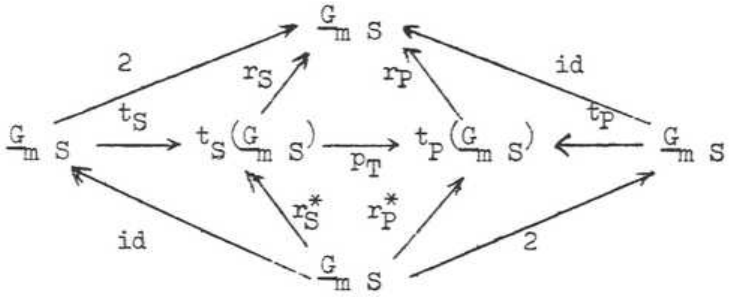
5.6. Nous laissons au lecteur le soin de faire les mêmes calculs dans S_L et P_L. On trouve la même formule de dualité et les coracines

$$r_S^*(z) = t_S(z) \quad , \quad r_P^*(z) = t_P(z^2) \quad .$$

Notant p_T le morphisme induit par $p : G_L \longrightarrow P_L$ sur $t_S(\underline{G}_m\, S)$, soit

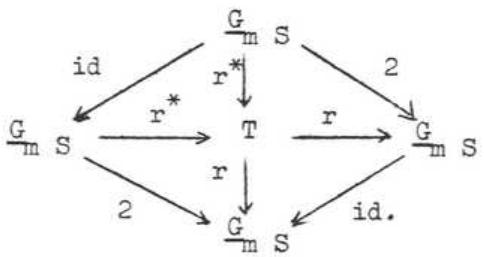
$$p_T(t_S(z)) = t_P(z^2) \quad ,$$

on a donc le diagramme commutatif :

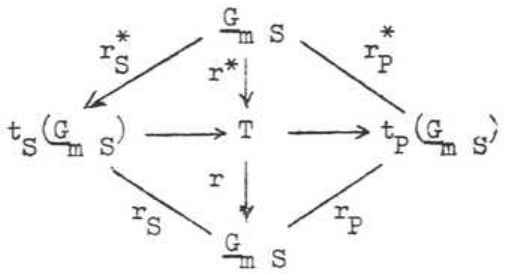


On reconnaît dans la partie centrale le diagramme commutatif de 4.1 relatif au morphisme canonique $p \circ i : S_L \longrightarrow P_L$ qui induit un morphisme des S-systèmes élémentaires précédents.

5.7. Soit maintenant (G,T,r) un système élémentaire quelconque . Considérons le diagramme commutatif :



Combinant les deux diagrammes précédents, on obtient aussitôt un diagramme commutatif



Utilisant 4.1 , on a donc :

Proposition 5.8. Soient S un préschéma, (G,T,r) un S-système élémentaire. Posons $L = \mathcal{J}^r$ (et donc $L^{-1} = \mathcal{J}^{-r}$) .

(i) Il existe un morphisme de groupes unique $f : S_L \longrightarrow G$ qui vérifie les conditions équivalentes suivantes :

a) $f\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} = r^*(z)$, $f\begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp(X)$;

b) $f\begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp(X)$, $f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{pmatrix} = \exp(Y)$.

c) $f\begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp(X)$, $f\begin{pmatrix} 0 & X \\ -X^{-1} & 0 \end{pmatrix} = w_r(X)$.

(ii) Il existe un morphisme de groupes unique $g : G \longrightarrow P_L$ qui vérifie $g(t) = p\begin{pmatrix} r(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $g(\exp(X)) = p\begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. De plus, on a $g(\exp(Y)) = p\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{pmatrix}$, $g(w_r(X)) = p\begin{pmatrix} 0 & X \\ -X^{-1} & 0 \end{pmatrix}$.

Le morphisme g est fidèlement plat quasi-compact de noyau $\mathrm{Ker}(r) = \mathrm{Cent}(G)$ et $g \circ f$ est le morphisme canonique $S_L \longrightarrow P_L$.

Remarquons que les conditions b) de (i) donnent une description explicite de la dualité entre $\mathfrak{g}^r$ et $\mathfrak{g}^{-r}$.

Corollaire 5.9. Soit (G,T,r) un S-système élémentaire. Les sous-groupes $T \cdot P_r$, $T \cdot P_{-r}$, P_r et P_{-r} sont fermés .

Comme P_r est un sous-préschéma en groupes fermé de $T \cdot P_r$, il suffit de faire la vérification pour ce dernier. D'après le théorème de Noether (Exp. IV 5.3.1 et 6.4.1) , il suffit de prouver que $T \cdot P_r / \mathrm{Ker}\ r$ est un sous-groupe fermé de $G/\mathrm{Ker}\ r$. En vertu de 5.8 , on est donc ramené à prouver que le sous-groupe de P_L (ou de G_L , ce qui revient au même en vertu d'une nouvelle application du théorème de Noether), défini par $c = 0$ est fermé , ce qui est trivial.

En d'autres termes , les morphismes exp de 1.5 sont des immersions fermées.

N.B. Cela résulte aussi de ce que $T \cdot P_r$ et $T \cdot P_{-r}$ sont des "groupes de Borel" de G (cf. Exp. XII 7.10).

5.10. Soient L un $\underline{O}_S$-Module inversible et

$$\underline{G}_m S \xrightarrow{r^*} T \xrightarrow{r} \underline{G}_m S$$

un diagramme de groupes tel que $r \circ r^* = 2$.
Soit R le tore maximal de $\mathrm{Ker}\ r$ et $K = r^{*-1}(R)$. C'est un sous-groupe de type multiplicatif de $\underline{G}_m S$. En vertu de $r \circ r^* = 2$, c'est même un sous-groupe de $\underline{\mu}_{2S}$. En particulier le morphisme $K \longrightarrow S_L$, $k \mapsto \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k^{-1} \end{pmatrix}$ est central .

On a donc un monomorphisme de groupes central

$$K \longrightarrow R \times S_L$$

défini par $k \longmapsto (r^*(k), \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k^{-1} \end{pmatrix})$. Considérons le groupe G obtenu par passage au quotient. C'est un groupe affine et lisse sur S, à fibres connexes. Il est immédiat que la suite

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow R \times t_S(\underline{G}_{m\,S}) \xrightarrow{u} T \longrightarrow 0$$

où $u(x, t_S(z)) = x\, r^*(z)$ est exacte . L'image de $R \times t_S(\underline{G}_{m\,S})$ dans G est donc un tore T' isomorphe à T . On montre maintenant sans difficultés que si r' est le caractère de T' déduit de r par l'isomorphisme précédent, (G,T',r') est un S-système élémentaire, que $\mathcal{G}^{r'}$ est isomorphe à L et que r'^* est obtenu à partir de r^* par l'isomorphisme $T \xrightarrow{\sim} T'$. On a donc construit un S-système élémentaire (G,T',r') tel que l'objet correspondant $(\underline{G}_{m\,S} \xrightarrow{r'^*} T' \xrightarrow{r'} \underline{G}_{m\,S}, \mathcal{G}^{r'})$ de la catégorie définie en 4.2 soit isomorphe à $(\underline{G}_{m\,S} \xrightarrow{r^*} T \xrightarrow{r} \underline{G}_{m\,S}, L)$. On a donc prouvé le

Théorème 5.11. Dans les notations de 4.2, le foncteur

$$(G,T,r) \longmapsto (\underline{G}_{m\,S} \xrightarrow{r^*} T \xrightarrow{r} \underline{G}_{m\,S}, \mathcal{G}^r)$$

est une équivalence de catégories.

On a donc un monomorphisme de groupes central

$$K \longrightarrow R \times S_L$$

défini par $k \longmapsto (r^*(k), \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k^{-1} \end{pmatrix})$. Considérons le groupe G obtenu par passage au quotient. C'est un groupe affine et lisse sur S, à fibres connexes. Il est immédiat que la suite

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow R \times t_S(\underline{G}_{m\,S}) \xrightarrow{u} T \longrightarrow 0$$

où $u(x, t_S(z)) = x\, r^*(z)$ est exacte . L'image de $R \times t_S(\underline{G}_{m\,S})$ dans G est donc un tore T' isomorphe à T . On montre maintenant sans difficultés que si r' est le caractère de T' déduit de r par l'isomorphisme précédent, (G,T',r') est un S-système élémentaire, que $\mathcal{J}^{r'}$ est isomorphe à L et que r'^* est obtenu à partir de r^* par l'isomorphisme $T \xrightarrow{\sim} T'$. On a donc construit un S-système élémentaire (G,T',r') tel que l'objet correspondant $(\underline{G}_{m\,S} \xrightarrow{r'^*} T' \xrightarrow{r'} \underline{G}_{m\,S}, \mathcal{J}^{r'})$ de la catégorie définie en 4.2 soit isomorphe à $(\underline{G}_{m\,S} \xrightarrow{r^*} T \xrightarrow{r} \underline{G}_{m\,S}, L)$. On a donc prouvé le

Théorème 5.11. Dans les notations de 4.2, le foncteur

$$(G,T,r) \longmapsto (\underline{G}_{m\,S} \xrightarrow{r^*} T \xrightarrow{r} \underline{G}_{m\,S}, \mathcal{J}^r)$$

est une équivalence de catégories.

6. Générateurs et relations pour un système élémentaire.

6.1. Soient S un préschéma, (G,T,r) un S-système élémentaire. Soit $u \in P_r^*(S)$; on a vu en 3.8 que l'élément $w = w_r(X)$ (avec $u = \exp(X)$) correspondant vérifie en particulier la relation

$$(w\,u)^3 = e \ .$$

Théorème 6.2. Soit H un S-faisceau en groupes pour (fppf) . Soient

$$f_T : T \longrightarrow H$$

$$f_r : P_r \longrightarrow H$$

des morphismes de groupes et $h \in H(S)$ une section de H . Pour qu'il existe un morphisme de groupes (nécessairement unique)

$$f : G \longrightarrow H$$

prolongeant f_T , f_r et vérifiant $f(w) = h$, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :

(i) Pour tout $S' \longrightarrow S$, tout $t \in T(S')$ et tout $x \in P_r(S')$, on a

$$f_T(t)\, f_r(x)\, f_T(t)^{-1} = f_r\,(t \times t^{-1}) \ , \quad \left[= f_r(x^{r(t)})\right] \tag{1}$$

(autrement dit f_T et f_r se prolongent en un morphisme de groupes du produit semi-direct $T \cdot P_r$ dans H) .

(ii) Pour tout $S' \longrightarrow S$, tout $t \in T(S')$, on a

$$h\, f_T(t)\, h^{-1} = f_T(s_r(t)) \quad \left[= f_T(t.\ r^*r(t)^{-1})\right] \ . \tag{2}$$

(iii) On a les deux relations dans $H(S)$:

$$h^2 = f_T(r^*(-1)) \quad , \tag{3}$$

$$(h\, f_r(u))^3 = e \quad . \tag{4}$$

Démonstration . Notons additivement P_r et P_{-r} et multiplicativement leur structure vectorielle . Si f vérifie les conditions de l'énoncé, on a nécessairement pour tout $y \in P_{-r}(S')$,

$$f(y) = f(w\, w\, y\, w^{-1}\, w^{-1}) = h\, f_r(w\, y\, w^{-1})\, h^{-1} \quad .$$

Soit donc $f_{-r}: P_{-r} \longrightarrow H$ le morphisme défini par

$$f_{-r}(y) = h\, f_r(w\, y\, w^{-1})\, h^{-1} \quad .$$

C'est un morphisme de groupes. D'autre part, f est déterminé sur la grosse cellule Ω par

$$f(y\, t\, x) = f_{-r}(y)\, f_T(t)\, f_r(x) \quad .$$

Cela montre l'unicité de f ; comme les conditions de l'énoncé sont manifestement nécessaires, montrons qu'elles sont suffisantes.

On a par (4)

$$h\, f_r(u)\, h^{-1}\, h^2 = f_r(-u)\, h^{-1}\, f_r(-u) \quad .$$

Or, par (3) , et (i) , h^2 commute à $f_r(-u)$, ce qui donne

$$h\, f_r(u)\, h^{-1} = f_r(-u)\, h\, f_r(-u) \quad .$$

Mais, par définition $h\, f_r(u)\, h^{-1} = f_{-r}(w\, u\, w^{-1})$; comme w correspond à u ,

on a $w\,u\,w^{-1} = -\tilde{u}$ (on note $\tilde{u}$ l'élément apparié à u, $\tilde{u} \in P^*_{-r}(S)$ 3.7) ; on obtient donc

$$f_{-r}(-\tilde{u}) = f_r(-u)\ h\ f_r(-u) \ .$$

Soit maintenant t une section de T sur un $S' \to S$ variable . Faisons opérer $\mathrm{int}(f_T(t))$ sur la formule précédente. On obtient au premier membre

$$f_T(t)\ f_{-r}(-\tilde{u})\ f_T(t)^{-1} = f_T(t)\ h\ f_r(u)\ h^{-1}\ f_T(t) =$$

$$= h\ (h^{-1}\ f_T(t)\ h)\ f_r(u)\ (h^{-1}\ f_T(t)\ h)\ h^{-1}$$

$$= h\ f_T(s_r(t))\ f_r(u)\ f_T(s_r(t))^{-1}\ h^{-1} \ ,$$

par (2) et (3) ; puis

$$h\ f_r(r(s_r(t))\ u)\ h^{-1} = h\ f_r(r(t)^{-1}u)\ h^{-1}$$

par (1) , puis enfin par construction $f_{-r}(-r(t)^{-1}\,\tilde{u})$.

Le second membre donne

$$f_r(-r(t)\ u)\ .\ f_T(t)\ h\ f_T(t)^{-1}\ h^{-1}\ h\ .\ f_r(-r(t)\ u) =$$

$$= f_r(-r(t)\ u)\ f_T(t)\ f_T(t^{-1}\ r\ (r(t)))\ h\ f_r(-r(t)\ u) \ .$$

Comparant les deux expressions obtenues, on obtient

$$f_{-r}(-r(t)^{-1}\tilde{u}) = f_r(-r(t)u).f_T(r\ (r(t)))\ .\ h\ .\ f_r(-r(t)\ u) \ .$$

Comme $r : T \longrightarrow \underline{G}_m\, S$ est fidèlement plat et que H est un préfaisceau séparé, on peut remplacer $-r(t)^{-1}$ par une section quelconque de $\underline{G}_m\, S$ et on obtient le

Lemme 6.2.1. Pour tout $z \in \underline{G}_m(S')$, $S' \to S$, on a

$$f_{-r}(z\tilde{u}) = f_r(z^{-1}u).f_T(r^*(-z^{-1}).h.\ f_r(z^{-1}\ u) \ .$$

Soient maintenant $x,y \in \underline{G}_a(S')$, $S' \to S$, supposons y et $(1+xy)$ inversibles. Appliquant d'abord le lemme à $z = y$, on obtient

$$f_r(xu)\, f_{-r}(y\tilde{u}) =$$

$$= f_r((x+y^{-1})u).\, f_T(r\,(-y^{-1})).\, h\, .\, f_r(y^{-1}u) =$$

$$= f_r((x+y^{-1})u)\, .\, f_T(r\,(-(x+y^{-1}))\, f_T(r(\frac{y^{-1}}{x+y^{-1}})).\, h\, .\, f_r(y^{-1}u)$$

Or $x+y^{-1} = y^{-1}(1+xy)$. Appliquant le lemme à $z = \frac{y}{1+xy}$, on trouve

$$f_r(xu)\, f_{-r}(y\tilde{u}) =$$

$$= f_{-r}(\frac{y}{1+xy}\,\tilde{u}).f_r(-(x+y^{-1})u).h^{-1}\, f_T(r\,(1+xy)^{-1})\, h\, .f_r(y^{-1}u) =$$

$$= f_{-r}(\frac{y}{1+xy}\,\tilde{u}).f_r(-(x+y^{-1})u).\, f_T(r\,(1+xy)).\, f_r(y^{-1}u) =$$

$$= f_{-r}(\frac{y}{1+xy}\,\tilde{u}).f_T(r\,(1+xy))\, .\, f_r((-(x+y^{-1})(1+xy)^{-2} + y^{-1})u) =$$

$$= f_{-r}(\frac{y}{1+xy}\,\tilde{u}).f_T(r\,(1+xy)).\, f_r(\frac{x}{1+xy}u)\, .$$

On a donc prouvé :

<u>Lemme</u> 6.2.2. <u>Si</u> $a \in P_r(S')$, $b \in P^*_{-r}(S')$, $S' \longrightarrow S$ <u>tels que</u> $1+ab \in \underline{G}_m(S')$, <u>on a</u>

$$f_r(a)\, f_{-r}(b) = f_{-r}(\frac{b}{1+ab})\, f_T(r^*(1+ab))\, f_r(\frac{a}{1+ab})\, .$$

Par densité schématique, cette formule reste valable lorsque $b \in P_{-r}(S')$, $1+ab$ étant toujours inversible. Considérons alors le morphisme

$$f : \Omega \longrightarrow H$$

défini par $f(y\ t\ x) = f_{-r}(y)\ f_T(t)\ f_r(x)$.

Il résulte aussitôt de 6.2.2 , de la condition (i) , et de la formule (F') de 2.4 , que si $g,g' \in \Omega(S')$ et $gg' \in \Omega(S')$, on a $f(gg') = f(g)\ f(g')$. Par Exp. XVIII 2.3 (iii), et 2.4 , il existe donc un morphisme de groupes $G \longrightarrow H$ prolongeant f . Notons-le aussi f ; il répond à la question ; il suffit de prouver, en effet, que $f(w_r) = h$. Or $w_r = u.(-\tilde{u}).\ u$, d'où

$$\begin{aligned} f(w_r) &= f_r(u)\ f_{-r}(-\tilde{u})\ f_r(u) \quad = \\ &= f_r(u)\ h\ f_r(u)\ h^{-1}\ f_r(u) \quad = \\ &= f_r(u)\ h\ f_r(u)\ h\ f_r(u)\ h^2 = \\ &= (f_r(u)\ h)^3\ h = h\ . \end{aligned}$$

Remarque 6.3. Nous compléterons ces résultats en Exp. XXIII 3.5.

Exposé XXI

DONNEES RADICIELLES

par M. DEMAZURE

Cet exposé rassemble, en l'absence de référence convenable, des résultats connus sur les données radicielles (= systèmes de racines "abstraits") dont la plupart seront utilisés par la suite.

Notations. On désigne par $\underline{\underline{Q}}_+$ l'ensemble des nombres rationnels positifs (ou nuls); on a $\underline{\underline{Z}} \cap \underline{\underline{Q}}_+ = \underline{\underline{N}}$. Soit V un $\underline{\underline{Q}}$-espace vectoriel; si A (resp. B) est une partie de $\underline{\underline{Q}}$ (resp. V), on note A . B l'image de $A \otimes B$ par le morphisme $\underline{\underline{Q}} \otimes V \longrightarrow V$, autrement dit l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de B à coefficients dans A. On note $-B = \{-1\} B$. On désigne par E - F l'ensemble $\complement_E^F$.

1. Généralités

1.1. Définitions, premières propriétés.

Définition 1.1.1. Soient M et M^* deux $\underline{\underline{Z}}$-modules libres de type fini en dualité. On note $V = M \otimes \underline{\underline{Q}}$, $V^* = M^* \otimes \underline{\underline{Q}}$; ce sont deux $\underline{\underline{Q}}$-espaces vectoriels en dualité. On identifie M (resp. M^*) à une partie de V (resp. V^*). La forme bilinéaire canonique sur $M^* \times M$ (resp. $V^* \times V$) est notée (,).

Soit R une partie <u>finie</u> de M. Donnons-nous une application $r \longmapsto r^*$ de R dans M^* ; l'ensemble des r^*, $r \in R$, est noté R^*. A chaque $r \in R$, on associe l'endomorphisme s_r (resp. s_r^*) de M et V (resp. M^* et V^*) donné par les formules :

$$(1) \quad s_r(x) = x - (r^*,x)\, r \quad , \quad \text{i.e.} \quad s_r = 1 - r^* \boxtimes r \, .$$

$$(1^*) \quad s_r^*(u) = u - (u,r)\, r^* \quad , \quad \text{i.e.} \quad s_r^* = 1 - r \boxtimes r^* \, .$$

On dit que le couple (R, R^*) (plus précisément le couple $(R, R \to M^*)$ est une <u>donnée radicielle dans</u> (M,M^*), ou que (M,M^*,R,R^*) est une <u>donnée radicielle</u>, si les axiomes suivants sont vérifiés :

(DR I) Pour chaque $r \in R$, on a $(r^*,r) = 2$.

(DR II) Pour chaque $r \in R$, on a $s_r(R) \subset R$, $s_r^*(R^*) \subset R^*$.

On dit que R est le <u>système de racines</u> de la donnée radicielle $\mathcal{R} = (M,M^*,R,R^*)$. Les éléments de R (resp. R^*) sont dits les <u>racines</u> (resp. <u>coracines</u>) de la donnée radicielle.

<u>Remarque</u> 1.1.2. L'axiome (DR I) est équivalent à l'une quelconque des propriétés suivantes :

$$(2) \quad s_r\, s_r = \mathrm{Id}. \quad , \quad (2^*) \quad s_r^*\, s_r^* = \mathrm{Id} \, ,$$

$$(3) \quad s_r(r) = -r \quad , \quad (3^*) \quad s_r^*(r^*) = -r^* \, .$$

<u>Remarque</u> 1.1.3. Les axiomes (DR I) et (DR II) entraînent

$$R = -R \, , \quad R^* = -R^* \, , \quad 0 \notin R \, , \quad 0 \notin R^* \, .$$

Lemme 1.1.4. L'application $R \to R^*$ est une bijection. Plus généralement, si $(r^*,x) = (s^*,x)$ pour tout $x \in R$, alors $r = s$.

On a alors $s_s(r) = r - 2s$, $s_r(s) = s - 2r$. On en déduit aussitôt $s_s\, s_r(r) = r + 2(s - r)$, $s_s\, s_r(s-r) = s - r$, d'où $(s_s\, s_r)^n\, r = r + 2n(s - r) \in R$ par (DR II). Comme R est fini, on a $s - r = 0$.

Corollaire 1.1.5. L'application inverse $R^* \to R$ définit une donnée radicielle

$$\mathcal{R}^* = (M^*, M, R^*, R)$$

dite duale de $\mathcal{R}$.

Définition 1.1.6. On note $\Gamma_o(R)$ le sous-groupe de M engendré par R. On note $\underline{V}(R)$ le sous-espace vectoriel de V engendré par R, c'est-à-dire $\Gamma_o(R) \otimes \underline{Q}$. Appliquant ces définitions à $\mathcal{R}^*$, on construit de même $\Gamma_o(R^*)$, $\underline{V}(R^*)$.

On appelle rang réductif de $\mathcal{R}$ le nombre

$$\mathrm{rgred}(\mathcal{R}) = \mathrm{rang}(M) = \dim(V) = \dim(V^*) = \mathrm{rang}(M^*) = \mathrm{rgred}(\mathcal{R}^*).$$

On appelle rang semi-simple de $\mathcal{R}$ le nombre

$$\mathrm{rgss}(\mathcal{R}) = \mathrm{rang}(R) = \mathrm{rang}(\Gamma_o(R)) = \dim(\underline{V}(R)).$$

On verra ci-dessous que $\mathrm{rgss}(\mathcal{R}) = \mathrm{rgss}(\mathcal{R}^*)$, c'est-à-dire que $\underline{V}(R)$ et $\underline{V}(R^*)$ ont même dimension.

On a donc $\mathrm{rgss}(\mathcal{R}) \leq \mathrm{rgred}(\mathcal{R})$.

Définition 1.1.7. On dit que $\mathcal{R}$ est semi-simple (resp. triviale) si $\mathrm{rgss}(\mathcal{R}) = \mathrm{rgred}(\mathcal{R})$ (resp. $\mathrm{rgss}(\mathcal{R}) = 0$) . Pour que $\mathcal{R}$ soit triviale, il est donc nécessaire et suffisant que R soit vide. La donnée radicielle triviale de rang réductif nul est notée $0 = (\{0\}, \{0\}, \emptyset, \emptyset)$.

Définition 1.1.8. On note $W(\mathcal{R})$ le groupe de transformations de M engendré par les s_r , $r \in R$. On l'appelle le groupe de Weyl de $\mathcal{R}$. On note

$$W^*(\mathcal{R}) = W(\mathcal{R}^*) .$$

Alors $W(\mathcal{R})$ opère dans R , $\Gamma_o(R)$, $\underline{V}(R)$, M et V . Si $w \in W(\mathcal{R})$ et $x \in M$ (resp. $x \in V$) , on a $wx - x \in \Gamma_o(R)$ (resp. $wx - x \in \underline{V}(R)$), c'est immédiat sur la formule (1) . De même pour $W^*(\mathcal{R})$.

Lemme 1.1.9. Pour tous $r \in R$, $x \in V$, $u \in V^*$, on a

(4) $\qquad (s_r^*(u), s_r(x)) = (u,x)$.

En effectuant le produit scalaire de (1) et (1*), on trouve que le premier membre est égal à $(u,x) + (u,r)(r^*,x)((r^*,r) - 2) = (u,x)$.

Remarque 1.1.10. Si on suppose $0 \notin R$, $0 \notin R^*$, alors 1.1.9 est équivalent à (DR I).

Corollaire 1.1.11. Notons $h \longmapsto h^\vee$ l'isomorphisme de $GL(M)$ sur $GL(M^*)$ qui associe à h son contragrédient. Alors la formule (4) s'écrit aussi

(5) $\qquad (s_r)^\vee = s_r^*$.

Corollaire 1.1.12. L'isomorphisme précédent induit un isomorphisme de $W(\mathcal{A})$ sur $W^*(\mathcal{A})$.

Scholie 1.1.13. En vertu du résultat précédent, nous identifierons W et W^*, et nous considérerons W comme un groupe de transformations de R, R^*, M, M^*, $\Gamma_o(R)$, $\Gamma_o(R^*)$, V, V^*, $\underline{V}(R)$, $\underline{V}(R^*)$. Nous écrirons donc s_r pour s_r^*.

1.2. L'application p.

Lemme 1.2.1. Soit $p : M \to M^*$ (resp. $V \to V^*$) l'application linéaire définie par

$$p(x) = \sum_{u \in R^*} (u,x)\, u \,. \tag{6}$$

Notons $\ell(x) = (p(x),x)$. On a les propriétés suivantes :

$$\ell(x) \geqslant 0 \,, \quad \ell(r) > 0 \quad \text{pour} \quad r \in R \,. \tag{7}$$

$$\ell(w\,x) = \ell(x) \quad \text{pour} \quad w \in W \,. \tag{8}$$

$$(p(x),y) = (p(y),x) \,, \quad x,y \in V \,. \tag{9}$$

$$\ell(r)\, r^* = 2\, p(r) \,, \quad r \in R \,. \tag{10}$$

Les trois premières relations sont immédiates. Démontrons la dernière. On a par (1), pour $u \in V^*$:

$$\begin{aligned} (u,r)^2\, r^* &= (u,r)\, u - (u,r)\, s_r(u) \\ &= (u,r)\, u + (u, s_r(r))\, s_r(u) \\ &= (u,r)\, u + (s_r(u),r)\, s_r(u) \,. \end{aligned}$$

Comme s_r est une permutation de R^* (par (DR II)), il n'y a plus qu'à sommer sur $u \in R^*$ pour conclure.

Scholie 1.2.2. La relation (10) dit que $r \longmapsto 1(r)\ r^*$ est la restriction à R d'une application linéaire de M dans M^*. En particulier, on a

$$(-r)^* = -r^* .$$

Corollaire 1.2.3. L'application p induit un isomorphisme de $\underline{V}(R)$ sur $\underline{V}(R^*)$.

En effet, p envoie $\underline{V}(R)$ sur $\underline{V}(R^*)$. On a donc

$$\dim(\underline{V}(R)) \geqslant \dim(\underline{V}(R^*)) .$$

En appliquant cette formule à la donnée radicielle duale, on en déduit

$$\dim(\underline{V}(R)) = \dim(\underline{V}(R^*)) ,$$

mais p étant surjectif est aussi bijectif .

Corollaire 1.2.4. On a $\dim(\underline{V}(R)) = \dim(\underline{V}(R^*))$, donc

$$\mathrm{rgss}(\mathcal{R}) = \mathrm{rgss}(\mathcal{R}^*) .$$

Corollaire 1.2.5. La forme bilinéaire (u,x) est non dégénérée sur $\underline{V}(R^*) \times \underline{V}(R)$, donc met ces $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels en dualité.

En effet, si $(u,x) = 0$ pour tout $u \in R^*$, alors $p(x) = 0$.

Corollaire 1.2.6. La forme bilinéaire symétrique $(p(x),y)$ est positive non dégénérée sur $\underline{V}(R)$.

Corollaire 1.2.7. W opère fidèlement dans R (et donc dans les autres ensembles de 1.1.13).

En effet, soit $u \in V^*$. Soit $w \in W$, supposons que $w(r) = r$ pour $r \in R$ et prouvons que $w(u) = u$. On a

$$(w(u) - u, r) = (w(u), r) - (u, r) = (u, w^{-1}(r)) - (u, r) = 0 .$$

Mais $w(u) - u \in \underline{V}(R^*)$. S'il est orthogonal à toutes les racines, il est nul par 1.2.5.

Corollaire 1.2.8. Le groupe W est fini .

Proposition 1.2.9. Les opérations de W respectent la correspondance entre racines et coracines. En d'autres termes, pour $r \in R$ et $w \in W$, on a

$$w(r^*) = w(r)^* .$$

Il suffit de le vérifier pour $w = s_t$, $t \in R$, c'est-à-dire de vérifier la formule

$$s_t(r^*) = s_t(r)^* .$$

Or on a successivement

$$\begin{aligned} s_t(r)^* &= 2\ \ell(s_t(r))^{-1}\ p(s_t(r)) \\ &= 2\ \ell(r)^{-1} \sum_{u \in R^*} (u, s_t(r))\ u \\ &= 2\ \ell(r)^{-1} \sum_{u \in R^*} (s_t(u), s_t(r))\ s_t(u) \\ &= 2\ \ell(r)^{-1} \sum_{u \in R^*} (u, r)\ s_t(u) \\ &= 2\ \ell(r)^{-1}\ s_t(p(r)) = s_t(r^*) . \end{aligned}$$

Corollaire 1.2.10. Si $r \in R$ et $w \in W$, on a

$$w\, s_r\, w^{-1} = s_{w(r)} .$$

En effet,

$$\begin{aligned} w\ s_r\ w^{-1}(x) &= x - (r^*,\ w^{-1}(x))\ \ w(r) \\ &= x - (w(r^*),x)\ \ w(r) \\ &= x - (w(r)^*,x)\ \ w(r) = s_{w(r)}(x) . \end{aligned}$$

Corollaire 1.2.11. Soit $R' \subset R$. Pour que (M,M^*,R',R'^*) soit une donnée radicielle, il faut et il suffit que $r,s \in R'$ entraîne $s_r(s) \in R'$.

2. Relations entre deux racines.

2.1. Racines proportionnelles.

Proposition 2.1.1. Soient r et s deux racines. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe $k \in \underline{Q}$ avec $r = k\,s$.

(ii) $s_r = s_s$.

De plus, sous ces conditions, on a $r^* = k^{-1}\, s^*$ et k est égal à l'un des nombres 1, -1, 2, -2, $1/2$, $-1/2$.

Supposons d'abord (i). On a d'abord

$$r^* = \ell(r)^{-1}\ 2\ \ p(r) = k^{-2}\ \ell(s)^{-1}\ 2\,k\ \ p(s) = k^{-1}\ \ s^* .$$

Cela entraîne aussitôt $s_r = s_s$. Réciproquement, si on a $s_r = s_s$, alors

$$r = s_r(-r) = s_s(-r) = (s^*,r)\ s - r ,$$

donc (ii) entraîne (i). Enfin, si $r = k\,s$, alors

$$(r^*,s) = 2k^{-1} \quad , \quad (s^*,r) = 2k \quad ,$$

donc $2k$ et $2k^{-1}$ sont des entiers et on a terminé .

Application 2.1.2. Les données radicielles $\mathcal{R}$ telles que $rgss(\mathcal{R}) = 1$ sont de l'un des deux types suivants :

(i) Type A_1 : il existe un $r \in M$ tel que les racines soient r et $-r$. Les coracines sont alors r^* et $-r^*$.

(ii) Type A_1' : il existe un $r \in M$ tel que les racines soient r , $-r$, $2r$, $-2r$. Les coracines sont alors r^*, $-r^*$, $r^*/2$, $-r^*/2$.

Définition 2.1.3. On dit que $r \in R$ est indivisible si $r/2 \notin R$.

On dit que $\mathcal{R}$ est réduite si toute racine est indivisible.

Pour que $\mathcal{R}$ soit réduite , il faut et il suffit que $\mathcal{R}^*$ le soit . Si r est indivisible et si $w \in W$, alors $w(r)$ est indivisible.

Définition 2.1.4. Soit $r \in R$. Si r est indivisible , on pose $ind(r) = r$. Sinon, on pose $ind(r) = r/2$.

Corollaire 2.1.5. Si $r \in R$ est indivisible et si $kr \in R$, $k \in \underline{\underline{Q}}$, alors $k \in \underline{\underline{Z}}$.

Proposition 2.1.6. Soit $\mathcal{R}$ une donnée radicielle. Alors $ind(\mathcal{R}) = (M, M^*, ind(R), ind(R)^*)$ est une donnée radicielle réduite . On a

$$W(ind(\mathcal{R})) = W(\mathcal{R}) \ .$$

En effet, $ind(\mathcal{R})$ est une donnée radicielle par 1.2.11 , car le groupe de Weyl permute les racines indivisibles. La seconde assertion résulte de 2.1.1.

Remarque 2.1.7. On n'a pas $\mathrm{ind}(R)^* = \mathrm{ind}(R^*)$, donc pas $\mathrm{ind}(\mathcal{R}^*) = \mathrm{ind}(\mathcal{R})^*$ non plus, si R n'est pas réduite.

2.2. Racines orthogonales .

Lemme 2.2.1. Soient r et s deux racines . On a

(11) $\quad \ell(r)\ (r^*,s) = \ell(s)\ (s^*,r)$.

Cela résulte aussitôt de 1.2.1 , formules (9) et (10) .

Corollaire 2.2.2. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $(r^*,s) = 0$, (ibis) $(s^*,r) = 0$,

(ii) $(p(r),s) = 0$,

(iii) $s_r(s) = s$, (iii bis) $s_s(r) = r$,

(iii) $s_r(s^*) = s^*$, (iii bis) $s_s(r^*) = r^*$,

(iv) $s_r \neq s_s$ et s_r et s_s commutent .

Toutes les équivalences sont immédiates, sauf celles qui portent sur (iv). Montrons que (i) (et (i bis)) entraînent (iv). On a

$$s_r\, s_s(x) = x - (s^*,x)\, s - (r^*,x)\, r + (s^*,x)(r^*,s)\, r \ .$$

Si $(r^*,s) = 0$, alors $(s^*,r) = 0$ et $s_r\, s_s(x) = s_s\, s_r(x)$.

Supposons réciproquement (iv). On a alors

$$s_r = s_s\, s_r\, s_s = s_{s_s(r)} \quad \text{(par 1.2.10)}.$$

Par 2.1 , il existe $k \in \underline{\mathbb{Q}}$ tel que $r = k\, s_s(r) = k\, r - k(s^*,r)\, s$.

Comme $s_r \neq s_s$, s et r ne sont pas proportionnelles par 2.1.1 , donc $(s^*,r) = 0$.

Définition 2.2.3. Deux racines vérifiant les conditions équivalentes de 2.2.2 sont dites orthogonales.

Remarque 2.2.4. Les racines r et s sont orthogonales si et seulement si les coracines r^* et s^* sont orthogonales.

Lemme 2.2.5. Si r et s sont deux racines orthogonales, alors $r + s \in R$ si et seulement si $r - s \in R$.

En effet $s_s(r+s) = s_s(r) + s_s(s) = r - s$.

Lemme 2.2.6. Soient r et s deux racines non orthogonales. Si on définit $\ell(t^*)$ pour une coracine t^* comme ℓ de la racine t^* de R^*, on a la relation

$$\ell(r)\,\ell(r^*) = \ell(s)\,\ell(s^*) \quad (12)$$

En effet, si on multiplie la formule (11) par la formule correspondante de la donnée transposée, on trouve :

$$(s^*,r)(r^*,s)\,\ell(r)\,\ell(r^*) = (s^*,r)(r^*,s)\,\ell(s)\,\ell(s^*) .$$

2.3. Cas général .

Proposition 2.3.1. Si r et s sont deux racines quelconques, on a

$$0 \leqslant (r^*,s)(s^*,r) \leqslant 4 . \quad (13)$$

Si r et s ne sont ni proportionnelles, ni orthogonales, on a

$$1 \leqslant (r^*,s)(s^*,r) \leqslant 3 .$$

En effet, on a $4(p(r),s)^2 = \ell(r)\,\ell(s)\,(r^*,s)(s^*,r)$ et la forme bilinéaire $(p(x),y)$ est positive non dégénérée (1.2.6) sur $V(R)$.

Corollaire 2.3.2. Soient r et s deux racines non orthogonales. Si $\ell(r) = \ell(s)$, il existe $w \in W$ avec $w(r) = s$.

En effet , si r et s sont proportionnelles, on a r = s ou r = -s; en ce cas on prend w = 1 ou $w = s_r$. Si r et s ne sont ni proportionnelles, ni orthogonales, on a $(s^*,r) = (r^*,s) = \pm 1$ (2.3.1 et formule (11)). Si $(s^*,r) = (r^*,s) = 1$, on prend $w = s_s s_r s_s$. Si $(s^*,r) = (r^*,s) = -1$, on prend $w = s_r s_s$.

Corollaire 2.3.3. Si r et s sont deux racines, si $r \neq s$ (resp. $r \neq -s$) et si $(s^*,r) > 0$ (resp. $(s^*,r) < 0$), alors r - s (resp. r + s) est racine.

Le second cas se déduit du premier en changeant s en -s . Si r et s sont proportionnelles et si $(s^*,r) > 0$, alors on a s = r , 2 s = r ou s = 2r . Le premier cas est exclu. Dans les autres, on a respectivement $r - s = s \in R$, $r - s = -r \in R$. Si r et s ne sont pas proportionnelles , (r^*,s) et (s^*,r) sont deux entiers strictement positifs de produit au plus trois. L'un d'eux est donc égal à un. Si $(s^*,r) = 1$; on a $r - s = s_s(r) \in R$; si $(r^*,s) = 1$, on a $r - s = -s_r(s) \in R$.

Lemme 2.3.4. Soient r et s deux racines non proportionnelles. Si s - r n'est pas racine, alors $s + k r \in R$ pour $k = -(r^*,s)$, mais pas pour $k = -(r^*,s) + 1$.

En effet, on a
$$s_r(s) = s - (r^*,s)\, r,$$
$$s_r(s - r) = s + (-(r^*,s) + 1)\, r .$$

Proposition 2.3.5. Soient r et s deux racines non proportionnelles. L'ensemble des entiers k tels que $s + k r \in R$ est un intervalle $[p , q]$ $(p \leqslant 0 , q \geqslant 0)$ et on a $p + q = -(r^*,s)$.

Pour prouver la première assertion, il suffit par exemple de prouver que si $s + k\,r \in R$, k entier > 0, alors $s + (k-1)\,r \in R$. Si $k = 1$, c'est trivial. Si $k \geqslant 2$, on a

$$(r^*, s + kr) = (r^*, s) + 2k \geqslant -3 + 4 > 0 ,$$

et on conclut par 2.3.3. Soit donc $[p , q]$ l'intervalle en question. Appliquant 2.3.4 à $s + p\,r$, on trouve

$$q - p = -(r^*, s + p\,r) = -(r^*, s) + 2p .$$

Remarque 2.3.6. La formule précédente contient les énoncés qualitatifs 2.2.5 et 2.3.3.

3. Racines simples, racines positives.

3.1. Systèmes de racines simples

Lemme 3.1.1. Soient r et r_i, $i = 1,2,\ldots n$, des racines. Supposons r distincts des r_i. Si on a une relation

$$r = \sum_{i=1}^{n} q_i\, r_i , \quad q_i \in \underset{=+}{Q} ,$$

il existe un i avec $q_i \neq 0$, $(r^*, r_i) > 0$, $r - r_i \in R$.

En effet, on écrit $2 = (r^*, r) = \sum_{i=1}^{m} q_i\, (r^*, r_i)$,

ce qui prouve les deux premières assertions. La troisième résulte alors de 2.3.3.

Proposition 3.1.2. Soient r et r_i, $i = 1,2,\ldots n$, des racines. Si

$$r = \sum_{i=1}^{n} m_i\, r_i , \quad m_i \in \underset{=+}{N} ,$$

il existe une suite $s_1,\dots,s_m$ de racines prises parmi les r_i (non nécessairement deux à deux distinctes) telle que si l'on note

$$a_p = \sum_{i=1}^{p} s_i \quad , \; p = 1,2,\dots m \; ,$$

on ait $a_p \in R$ et $a_m = r$.

Raisonnons par récurrence sur l'entier $\sum m_i = m'$. Si r est égal à l'un des r_i soit r_{i_o} (ce qui est automatique si $m' = 1$) , on prend $m = 1$, $s_1 = r_{i_o}$. Sinon, on applique le lemme précédent et il existe un i tel que $m_i \neq 0$ et $r - r_i$ racine . On a alors $(m_i - 1) \in \underline{\underline{N}}$ et

$$r - r_i = (m_i - 1)\, r_i + \sum_{j \neq i} m_j\, r_j \quad .$$

Il n'y a plus qu'à appliquer l'hypothèse de récurrence à $r - r_i$.

Corollaire 3.1.3. Soit $R' \subset R$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Si $r,s \in R'$, $r + s \in R$, alors $r + s \in R'$.

(ii) $\underline{\underline{N}} \,.\, R' \cap R \subset R'$.

En effet, on a clairement (ii) $\Rightarrow$ (i) . La réciproque résulte aussitôt de la proposition .

Définition 3.1.4. Un ensemble de racines vérifiant les conditions de 3.1.3 est dit clos.

Proposition 3.1.5. Soit $S \subset R$ un ensemble de racines. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Les éléments de S sont indivisibles, linéairement indépendants et $\underline{\underline{Q}}_+ \cdot S \cup -\underline{\underline{Q}}_+ \cdot S \supset R$.

(ii) Les éléments de S sont linéairement indépendants et

$$\underline{\underline{N}} \cdot S \cup -\underline{\underline{N}} \cdot S \supset R .$$

(iii) Toute racine s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire à coefficients entiers tous de même signe des éléments de S .

On a évidemment (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) . Prouvons (iii) $\Longrightarrow$ (i) . Il suffit de montrer que (iii) entraîne que les éléments de S sont indivisibles. Soit donc $s \in S$ divisible. On a $s/2 \in R$, d'où

$$s/2 = \sum m_i \ r_i \ , \quad m_i \in \underline{\underline{Z}} \ , \ r_i \in S \ ;$$

mais on a aussi $s/2 = (1/2)\ s$, ce qui est contradictoire avec le fait que les éléments de S sont linéairement indépendants (sur $\underline{\underline{Q}}$) . Prouvons (i) $\Longrightarrow$ (ii) . Soit $r \in R$. Notons $r_1, r_2, \ldots r_n$ les éléments (distincts) de S . On a donc une écriture unique

$$\varepsilon r = \sum q_i \ r_i \qquad q_i \in \underline{\underline{Q}}_+ \ , \ \varepsilon = \pm 1 \ .$$

Montrons que les q_i sont entiers. Cela est certainement vrai s'ils sont tous nuls sauf un (cf. 2.1.5). Sinon, r est distinct des r_i et en appliquant 3.1.1 , on trouve un i_o tel que $r' = \varepsilon r - r_{i_o} \in R$ et $q_{i_o} \neq 0$. Cela donne

$$r' = (q_{i_o} - 1)\ r_{i_o} + \sum_{i \neq i_o} q_i \ r_i \ .$$

Comme l'un au moins des q_i , $i \neq i_o$ est non nul, (i) entraîne que $q_{i_o} - 1 > 0$. On recommence l'opération pour r' et au bout d'un nombre fini de pas, on a démontré que les q_i sont entiers.

Définition 3.1.6. Un ensemble S de racines vérifiant les conditions de 3.1.5 est dit système de racines simples, ou base de R.

Si $w \in W$ et si S est un système de racine simple, alors w(S) est un système de racines simples.

Remarque 3.1.7. Cette définition ne fait intervenir que R et non $\mathcal{R}$, elle ne fait même intervenir en fait que ind(R).

Remarque 3.1.8. Si S est un système de racines simples, S est une base du groupe abélien libre $\Gamma_o(R)$. On a donc Card(S) = rgss($\mathcal{R}$).

Remarque 3.1.9. Les conditions de 3.1.5 sont alors évidemment équivalentes aux suivantes :

(i') Les éléments de S sont indivisibles, en nombre $\leqslant$ rgss($\mathcal{R}$) et $\underline{\underline{Q}}_+ \cdot S \cup -\underline{\underline{Q}}_+ \cdot S \supset R$.

(ii) On a Card(S) $\leqslant$ rgss($\mathcal{R}$) et $\underline{\underline{N}} \cdot S \cup -\underline{\underline{N}} \cdot S \supset R$.

Corollaire 3.1.10. Si S est un système de racines simples, alors ind(S^*) est un système de coracines simples (i.e. un système de racines simples de $\mathcal{R}^*$).

En effet, si

$$r = \sum a_i \, r_i \ ,$$

on a

$$r^* = \sum a_i \frac{\ell(a_i)}{\ell(r)} r_i^* ,$$

ce qui démontre que $\mathrm{ind}(S^*)$ vérifie (i') . De plus

Corollaire 3.1.11. Si S est un système de racines simples et si

$$r = \sum a_i r_i , \quad a_i \in \underline{\underline{Z}}$$

est l'écriture de r suivant S , alors $4 a_i \ell(r_i)$ est divisible par $\ell(r)$ (et même par $4\ell(r)$ si r_i est indivisible).

Avant de continuer à énoncer les propriétés des systèmes de racines simples, montrons qu'il en existe.

3.2. Systèmes de racines positives.

Définition 3.2.1. Un ensemble $P \subset R$ est dit un système de racines positives de $\mathcal{R}$ s'il vérifie les conditions suivantes :

(P 1) $P \cap -P = \emptyset$.

(P 2) $P \cup -P = R$.

(P 3) $\underline{\underline{Q}}_+ . P \cap R \subset P$.

En particulier, un tel ensemble est clos. On verra plus tard qu'en fait un ensemble clos vérifiant (P 1) et (P 2) vérifie aussi (P 3), donc est un système de racines positives. Si $w \in W$ et si P est un système de racines positives , alors $w(P)$ est un système de racines positives.

Remarque 3.2.2. Cette définition ne fait intervenir que R . On dira aussi que P est un système de racines positives de R .

Remarque 3.2.3. De (P 1) et (P 2) , on tire aussitôt

$$\text{Card } P = 1/2 \text{ Card } R \ .$$

Il en résulte que si P et P' sont deux systèmes de racines positives et si $P \subset P'$, alors $P = P'$.

Remarque 3.2.4. Si P est un système de racines positives, P^* est un système de coracines positives (i.e. un système de racines positives de R^*).

Cela résulte aussitôt de 1.1.4 et 1.2.2.

Définition 3.2.5. Soit S un système de racines simples. On pose

$$\underline{P}(S) = \underset{=+}{Q} \ . \ S \cap R = \underset{=+}{N} \ . \ S \cap R \ .$$

Proposition 3.2.6. Si S est un système de racines simples , $\underline{P}(S)$ est un système de racines positives. Si S est un système de racines simples et P un système de racines positives, on a l'équivalence :

$$S \subset P \iff P = \underline{P}(S) \ .$$

La première assertion est immédiate. Si $S \subset P$, alors $\underline{P}(S) \subset P$ par (P 3) , donc $\underline{P}(S) = P$ par 3.2.3. Le reste est trivial.

Remarque 3.2.7. Il existe des systèmes de racines positives : soit $\geqslant$ une structure d'espace vectoriel totalement ordonné sur $V(R)$. L'ensemble des racines $\geqslant 0$ pour cette relation d'ordre est un système de racines positives.

Théorème 3.2.8. Soit P un système de racines positives. Il existe un unique système de racines simples $S(P)$ tel que $S(P) \subset P$, i.e. $P = P(S(P))$.

L'unicité résulte aussitôt de:

Lemme 3.2.9. Soit S un système de racines simples. Alors pour que $r \in P(S)$ appartienne à S, il faut et il suffit que r ne soit pas somme de deux éléments de $P(S)$.

Ce lemme résulte aussitôt des définitions et de 3.1.2.

Démontrons maintenant l'existence de $S(P)$. Considérons l'ensemble des parties T de P telles que $T = \mathrm{ind}(T)$ et que $\underline{\underline{Q}}_+ \cdot T \supset P$. Cet ensemble est non vide, car il contient $\mathrm{ind}(P)$. Soit S un élément minimal de cet ensemble pour la relation d'inclusion. Montrons que S est un système de racines simples, c'est-à-dire par 3.1.5 (i) que S est une partie libre de M .

Lemme 3.2.10. Si $r, s \in S$, $m, n \in \underline{\underline{Q}}$ et $m r + n s \in R$, alors $m n \geqslant 0$.

Si $m n < 0$, on peut écrire (quitte à échanger r et s)

$$a r - b s \in P , \quad a, b \in \underline{\underline{Q}}_+ , \quad a.b. \neq 0 ,$$

donc il existe par hypothèse une relation

$$a r - b s = \sum_{t \in S} c(t)\, t , \quad c(t) \in \underline{\underline{Q}}_+ .$$

Si $a \leqslant c(r)$, elle s'écrit

$$- s = b^{-1}(c(r)-a)\, r + \sum_{\substack{t \in S \\ t \neq r}} b^{-1}\, c(t)\, t \in \underline{\underline{Q}}_+ \cdot P \cap R ,$$

ce qui, par (P 3) et (P 1) donne $s \in P \cap -P = \emptyset$.

Si, au contraire $a > c(r)$, on écrit

$$r = (a - c(r)^{-1})\ b\ s + \sum_{\substack{s \in S \\ s \neq r}} (a - c(r))^{-1}\ c(s)\ s \quad ,$$

ce qui prouve que $S \subset \underline{Q}_{=+} \cdot (S - \{r\})$, contrairement au caractère minimal de S .

Lemme 3.2.11. Si $r,s \in S$, alors $(s^*,r) \leqslant 0$.

En effet, $s_s(r) = r - (s^*,r)\ s \in R$, et on conclut par 3.2.10.

Démontrons maintenant que S est libre. Si on a une relation linéaire entre éléments de S , on peut supposer l'avoir écrite

$$x = \sum_{r \in I} m_r\ r = \sum_{s \in J} n_s\ s$$

avec $I \subset S$; $J \subset S$; $I \cap J = \emptyset$; $I \neq \emptyset$; $m_r, n_s \in \underline{Q}_{=+}$.

On a alors

$$2\ p(x) = \sum_{s \in J} n_s\ \ell(s)\ s^* \quad ,$$

donc

$$0 \leqslant 2(p(x),x) = \sum_{\substack{r \in I \\ s \in J}} m_r\ n_s\ \ell(s)\ (s^*,r) \leqslant 0 \ .$$

Par 1.2.6 cela entraîne $x = 0$, donc une relation non triviale.

$$\sum_{r \in S} m(r)\ r = 0 \quad , \quad m(r) \in \underline{Q}_{=+} \ .$$

Si $m(r_o) \neq 0$, on a $-r_o \in \underline{Q}_{=+} \cdot P \cap -P = \emptyset$.

Corollaire 3.2.12. On a les relations

$$(S \subset P) \iff (P = \underline{P}(S)) \iff (S = \underline{S}(P))$$

$$\underline{P}(\mathrm{ind}(S^*)) = \underline{P}(S)^* \quad , \quad \underline{S}(P^*) = \mathrm{ind}(\underline{S}(P)^*) \ .$$

$$\underline{S}(w(P)) = w(\underline{S}(P)) \ , \quad \underline{P}(w(S)) = w(\underline{P}(S)) \ , \text{ si } w \in W \ .$$

Définition 3.2.13. Si on a choisi un système de racines simples S, les éléments de $P(S)$ seront dits positifs. Si on a choisi un système de racines positives P, les éléments de $S(P)$ seront dits simples.

Corollaire 3.2.14. Soit P un système de racines positives. Soit $r \in P$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) r est simple (i.e. $r \in S(P)$).

(ii) r n'est pas somme de deux éléments de P.

(iii) $P - \{r\}$ est clos.

L'équivalence de (i) et (ii) résulte aussitôt de 3.2.9.

L'équivalence de (ii) et (iii) est immédiate.

Définition 3.2.15. Soit S un système de racines simples. La somme des coefficients de la décomposition d'une racine r suivant S s'appelle l'ordre de r relativement à S et se note $\mathrm{ord}_S(r)$.

On a les équivalences :

$$r \in P(S) \iff \mathrm{ord}_S(r) > 0 .$$

$$r \in S \iff \mathrm{ord}_S(r) = 1 .$$

Lemme 3.2.16. Soit S un système de racines simples. Soit $r \in P$. Il existe une suite $r_i \in S$, $i = 1,2,\ldots,m$, avec

$$r_1 + r_2 + \ldots r_p \in P(S) \quad \text{pour} \quad p = 1,2,\ldots m ,$$

$$r_1 + r_2 + \ldots . r_m = r .$$

De plus, pour toute suite r_i vérifiant ces conditions, on a

$$m = \mathrm{ord}_S(r) .$$

Trivial par 3.1.2.

3.3. Caractérisation et conjugaison des systèmes de racines positives .

Lemme 3.3.1. Si $r \in \underline{P}(S)$, $s \in S$ et si r et s ne sont pas proportionnelles, alors $s_s(r) \in \underline{P}(S)$.

En effet, $s_s(r) = r - (s^*, r)\, s$. Comme il y a au moins une racine simple autre que s qui intervient dans la décomposition de r avec un coefficient non nul (donc strictement positif), donc aussi dans la décomposition de $s_s(r)$ avec le même coefficient, $s_s(r)$ est aussi positive.

Corollaire 3.3.2. Si $s \in S$, la symétrie s_s échange les éléments de $\underline{P}(S)$ non proportionnels à S .

Lemme 3.3.3. Si $r \in P(S)$, $r \notin S$, r indivisible, il existe un $s \in S$ avec $s_s(r) \in \underline{P}(S)$, $\mathrm{ord}_S(s_s(r)) < \mathrm{ord}_S(s)$.

En effet, il existe d'après 3.1.1 un $s \in S$ avec $(s^*, r) > 0$. Comme r est indivisible et $\notin S$, il ne peut être proportionnel à s .

Corollaire 3.3.4. Si $r \in P(S)$ est indivisible, il existe une suite s_p , $p=1,2,\ldots q$, $s_p \in S$ avec

$$r_p = s_{s_1} s_{s_2} \cdots s_{s_p}(r) \in \underline{P}(S) \quad , \quad p = 1, \ldots q \ ,$$

et $r_q \in S$.

Cela résulte de 3.3.3 par récurrence sur $\mathrm{ord}_S(r)$.

Proposition 3.3.5. Le groupe de Weyl est engendré par les s_r , $r \in S$. Toute racine indivisible est conjuguée d'une racine simple par un élément du groupe de Weyl.

La seconde assertion résulte aussitôt de 3.3.4. La première en résulte

par 1.2.10 et 2.1.1.

Proposition 3.3.6. Soit P un système de racines positives. Soit $P' \subset R$ vérifiant (P 2) et clos. Alors il existe un $w \in W$ tel que $w(P) \subset P'$.

Enonçons tout de suite les corollaires.

Corollaire 3.3.7. Le groupe de Weyl opère transitivement sur l'ensemble des systèmes de racines positives (resp. des systèmes de racines simples).

Corollaire 3.3.8. Pour qu'une partie P de R soit un système de racines positives, il faut et il suffit qu'elle vérifie (P 1) et (P 2) et soit close.

Corollaire 3.3.9. Si on munit $\Gamma_o(R)$ d'une structure de groupe ordonné telle que toute racine soit > 0 ou < 0, l'ensemble des racines positives pour cette structure d'ordre est un système de racines positives.

Démontrons maintenant 3.3.6. On peut trouver un $w \in W$ tel que $\mathrm{Card}(w(P) \cap P')$ soit maximum, donc en remplaçant P par w(P), supposer que

$$\mathrm{Card}(P \cap P') \geqslant \mathrm{Card}(P \cap s_r(P'))$$

pour tout $r \in \underline{S}(P) = S$. Prouvons que $P \subset P'$. Sinon, P' étant clos, il existe $r \in S$, $r \notin P'$. Mais P' vérifiant (P 2), on a alors $-r \in P'$ (donc $-2r \in P'$ si 2r est racine). Pour tout $b \in P \cap P'$, on a $b \neq r$; si 2r n'est pas racine, on a alors $s_r(b) \in P$ (par 3.3.1), donc

$$s_r(P \cap P') \subset P \cap s_r(P') \ ;$$

mais $P \cap s_r(P')$ contient aussi $r = s_r(-r)$, ce qui contredit l'inégalité supposée. Si 2r est racine, on raisonne de même.

Pour étudier les ensembles de racines vérifiant (P 2) et clos, on est donc ramené au cas où ils contiennent l'ensemble des racines positives.

Proposition 3.3.10. Soit P un système de racines positives. Soit P' clos, $P \subset P' \subset R$. Si on note $T = \underline{S}(P) \cap -P'$, alors P' est la réunion de P et de l'ensemble des racines qui sont combinaison linéaire à coefficients négatifs des éléments de T.

Démontrons l'assertion par récurrence sur l'ordre d'une racine $u \in P' - P$. Si $ord_P(u) = -1$, alors $-u \in S(P)$ et $u \in -T$. Si $ord_P(u) > -1$, il existe $s \in \underline{S}(P) = S$ telle que $u + s \in R$ et $ord_S(u+s) > ord_S(u)$ (on applique 3.1.4 à $-u$). Comme $u + s$ est la somme de deux racines de P', c'est un élément de P', donc par l'hypothèse de récurrence une combinaison linéaire des éléments de T. Il suffit de vérifier que $s \in -P'$. Or $-s = u - (u + s)$, mais $u \in P'$ et $-(u + s)$ est positive donc appartient à P'.

Scholie 3.3.11. Soit P' un ensemble de racines vérifiant (P 2) et clos. Il existe un système de racines simples S, une partie T de S tel que

$$P' = \left[\underline{\underline{N}} \,.S \cup -\underline{\underline{N}} \,.\, T\right] \cap R .$$

Si on note $R(T) = \underline{\underline{Z}} \,.\, T \cap R$, qui est une partie close et symétrique de R, P' est donc la réunion disjointe de R(T) et de la partie close de P(S) formée des $r \in P(S)$, $r \notin \underline{\underline{N}} \,.\, T$, i.e. des racines positives qui dans la décomposition sur S "contiennent au moins une racine de $S - T$".

3.4. Ensembles de racines clos et symétriques.

Proposition 3.4.1. Soit $R' \subset R$ un ensemble de racines de la donnée radicielle $\mathcal{R}$. Supposons R' clos et symétrique (i.e. $R' = -R'$). Alors (M, M^*, R', R'^*) est une donnée radicielle; pour tout système de racines positives P de R,

$P' = P \cap R'$ est un système de racines positives de R' ; le groupe de Weyl $W_{R'}$ de (M,M^*,R',R'^*) est le sous-groupe de $W(R)$ engendré par les s_r , $r \in R'$

La première assertion est triviale par 1.2.11, la seconde résulte de 3.3.8 , la troisième est évidente.

Corollaire 3.4.2. Soit $w \in W_{R'}$. L'ordre de w est le plus petit entier $n > 0$ tel que $w^n(r') = r'$ pour tout $r' \in R'$.

Il suffit d'appliquer 1.2.7 à la donnée radicielle (M,M^*,R',R'^*) .

Corollaire 3.4.3. Soient r et s deux racines non proportionnelles. Soit n le plus petit entier positif tel que $(s_r\, s_s)^n(r) = r$, $(s_r\, s_s)^n(s) = s$. Alors le sous-groupe W_{rs} de W engendré par s_r et s_s est défini par les relations

$$s_r^2 = 1 \ , \quad s_s^2 = 1 \ , \quad (s_r\, s_s)^n = 1 \ .$$

Compte tenu de 3.4.2 , il suffit de vérifier:

Lemme 3.4.4. Soit G le groupe engendré par deux éléments x et y soumis aux relations $x^2 = y^2 = 1$. Tout sous-groupe invariant de G ne contenant ni x ni y est engendré (comme sous-groupe invariant) par un élément de la forme $(xy)^n$.

En effet, un élément quelconque de G s'écrit $(xy)^n$, ou $y(xy)^n$, ou $(xy)^n x$, n entier $\geqslant 0$. Or le second élément est conjugué à x , le troisième à y .

Remarque 3.4.5. On calcule immédiatement l'entier n : si on pose

$$(r^*,s) = p \ , \quad (s^*,r) = q \ ,$$

on a $(s_r\, s_s)\,(r) = (pq - 1)\, r - p\, s$,

$(s_r\, s_s)\,(s) = q\, r - s$.

L'entier n est donc l'ordre de la matrice $\begin{pmatrix} pq-1 & -p \\ q & -1 \end{pmatrix}$.

On trouve

$pq = 0 \Longrightarrow n = 2$,

$pq = 1 \Longrightarrow n = 3$,

$pq = 2 \Longrightarrow n = 4$,

$pq = 3 \Longrightarrow n = 6$.

N.B. En écrivant que l'ordre de la matrice précédente est fini, on retrouve l'inégalité (13).

Définition 3.4.6. Soit S un système de racines simples et $S' \subset S$. On note $R(S') = R \cap \underline{\underline{Q}} \,.\, S' = R \cap \underline{\underline{Z}} \,.\, S'$.

Lemme 3.4.7. $R(S')$ est clos et symétrique , S' est un système de racines simples de la donnée radicielle $(M, M^*, R(S'), R(S')^*)$ dont le groupe de Weyl est le sous-groupe $W_{S'}$ de W engendré par les s_r , $r \in S'$. On a $S \cap R' = S'$.

Trivial .

Proposition 3.4.8. Soit $R' \subset R$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe un sous-espace vectoriel V' de V (ou de $V(R)$) tel que $R' = R \cap V'$.

(ii) Il existe un système de racines simples S de R et une partie S' de S telle que $R' = R(S')$.

Plus précisément, sous ces conditions, tout système de racines simples S' de (M,M^*,R',R'^*) est contenu dans un système de racines simples S de R et $R' = \underline{R}(S')$.

On a évidemment (ii) $\Rightarrow$ (i). Supposons (i) vérifiée; alors R' est clos et symétrique, donc (M,M^*,R',R'^*) est une donnée radicielle. Soient S' un système de racines simples de cette donnée et $P' = \underline{P}(S')$. Si $V' = V$, alors S' est un système de racines simples de R et on a terminé. Sinon, il existe un $x \in V^*$ avec

$$(x,V') = \{0\}\ ,\quad (x,r) \neq 0 \text{ pour tout } r \in R - R'\ .$$

Soit $P_o = \{r \in R\ ,\ (x,r) > 0\}$. Posons $P = P_o \cup P'$.

Pour un $r \in R$, on a les équivalences

$$(x,r) > 0 \iff r \in P_o\ ,$$

$$(x,r) < 0 \iff r \in -P_o\ ,$$

$$(x,r) = 0 \iff r \in R'\ .$$

Il résulte aussitôt de 3.3.8 que P est un système de racines positives de R. Posons $S = \underline{S}(P)$. Il suffit évidemment de prouver $S' \subset S$. Sinon soit $r \in S'$, $r \notin S$. Alors, par 3.2.14, il existe $s,t \in P$ avec $r = s + t$. Si s, $t \in P_o$, on a $r \in P_o$, ce qui est idiot. Si s ou t, par exemple s, appartient à P', alors $t = r - s \in R' \cap P = P'$; mais alors r n'est pas simple dans P'.

Lemme 3.4.9. Sous les conditions précédentes, soit $r \in \underline{P}(S)$, $r \notin R'$. Pour tout $w \in W_{S'}$, on a $w(r) \in \underline{P}(S)$, $w(r) \notin R'$.

Il suffit en effet de le vérifier pour $w = s_t$, $t \in S'$, auquel cas c'est trivial (3.3.1).

Lemme 3.4.10. Sous les conditions précédentes, les conditions suivantes sur un $w \in W$ sont équivalentes :

(i) $w \in W_{S'}$.

(ii) Pour tout $m \in M$, $w(m) - m \in V'$.

(iii) Pour tout $r \in R$, $w(r) - r \in V'$.

On a évidemment (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) . Prouvons (iii) $\Rightarrow$ (i) .

Soit donc un $w \in W$, $w \notin W_{S'}$, $w(r) - r \in V'$ pour tout $r \in R$.

Ecrivons w comme un produit de symétries $s_{r_o} s_{r_1} \cdots s_{r_n}$, avec $r_i \in S$. Quitte à remplacer w par un produit partiel de s_{r_i} , on peut supposer que $w' = s_{r_1} \cdots s_{r_n} \in W_{S'}$. On a alors

$$w(r) - r = w'(r) - r - (w'^{-1}(r_o^*), r)\, r_o .$$

Prenant $r = w'^{-1}(r_o)$, on trouve $2\, r_o \in V'$, donc $r_o \in S'$, donc enfin $w = s_{r_o} w' \in W_{S'}$, contrairement à l'hypothèse.

3.5. Remarques diverses .

Proposition 3.5.1. Soit P un système de racines positives . Notons

$$g_P = (1/2) \sum_{r \in \mathrm{ind}(P)} r .$$

Alors $(s^*, g_P) = 1$ pour tout $s \in S(P)$.

En effet, on peut écrire

$$2\, g_P = \sum_{r \in \mathrm{ind}(P),\ r \neq s} r + s ,$$

donc $s_s(2\, g_P) = 2\, g_P - 2s$, par 3.3.2.

Corollaire 3.5.2. Posons $h_P = (1/2) \sum_{r^* \in \mathrm{ind}(P^*)} r^*$. Alors

(i) $(h_p, r) > 0$ pour $r \in P$, i.e. (3.6.8) $h_p \in \underline{C}(P)$.

(ii) Pour $r \in R$, on a $\mathrm{ord}_{S(P)}(r) = (h_P, r)$.

Remarque 3.5.3. Si $w \in W$, on a $h_{w(P)} = w\, h_P$, $g_{w(P)} = w\, g_P$.

Proposition 3.5.4. Soient r et s deux racines non proportionnelles, r étant supposée indivisible. Il existe un système de racines simples contenant r et une racine t telle que $s = ar + bt$, $a, b \in \underline{\underline{N}}$.

En effet, construisons une base de l'espace vectoriel $\underline{V}(R)$ contenant $r_1 = r$, $r_2 = s$. Considérons l'ordre lexicographique par rapport à cette base . L'ensemble des racines > 0 étant noté P , il est clair que P est un système de racines positives et que les deux plus petits éléments de P sont simples . Or le plus petit est r , le suivant est de la forme

$$t = ar + bs \quad , \quad 0 < b \leqslant 1 .$$

On a donc $s = b^{-1} t - b^{-1} a\, r$ et $b^{-1} > 0$, donc aussi $- b^{-1} a > 0$.

Faisons enfin deux remarques sur le groupe $\Gamma_o(R)$.

Proposition 3.5.5. Soient G un groupe abélien et $f : R \longrightarrow G$ une application vérifiant les deux conditions suivantes :

(i) Si $r \in R$, $f(-r) = -f(r)$.

(ii) Si r , s , $r+s \in R$, $f(r+s) = f(r) + f(s)$.

Alors il existe un homomorphisme de groupes unique $\bar{f} : \Gamma_o(R) \longrightarrow G$ tel que $\bar{f}(r) = f(r)$ pour $r \in R$.

En effet, si S est un système de racines simples de R , et si $r \in R$

s'écrit $\sum_{s \in S} a(s)\ s$, il résulte aussitôt de 3.2.16 que $f(r) = \sum_{s \in S} a(s)\ f(s)$.

Or S est une base de $\Gamma_o(R)$.

Proposition 3.5.6. Soit S un système de racines simples. Il existe sur $\Gamma_o(R)$ une structure de groupe totalement ordonné telle que les racines > 0 soient les éléments de $P(S)$ et que $r \mapsto ord_S(r)$ soit une fonction croissante .

Soient en effet $r_1, r_2, \dots r_n$ $\left(n = rgss(\mathcal{R}) \right)$, les éléments de S .

Pour $x \in \Gamma_o(R)$, on a une décomposition

$$x = \sum_{i=1}^{n} m_i(x)\ r_i \quad .$$

Il suffit de prendre l'ordre lexicographique relativement aux fonctions

$\sum m_i$, $m_n, m_{n-1}, \dots, m_2$.

Remarque 3.5.7. Les premières racines sont dans l'ordre :

$$r_1 , r_2 , \dots , r_n ;$$

on a ensuite (si ce sont des racines) $2r_1$, $r_1 + r_2$, $r_1 + r_3$, ...

3.6. Chambres de Weyl .

Lemme 3.6.1. Soit V un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension finie .

Soient f_i des formes linéaires indépendantes . Posons

$$C = \left\{ x \in V ,\ f_i(x) > 0 \right\} .$$

Alors C est une partie convexe maximale de $X = V - \bigcup f_i^{-1}(0)$.

Trivial.

Définition 3.6.2. Une partie C de V pouvant se décrire par le procédé de 3.6.1 sera appelée (ici) une chambre de V .

Définition 3.6.3. On dit que l'hyperplan H de V est un mur de C si $H \cap \overline{C} - C$ contient une partie ouverte non vide de H .

Remarque 3.6.4. Pour une partie convexe, l'adhérence se décrit sans faire appel à la topologie de V : c'est l'ensemble des extrèmités de tous les segments ouverts contenus dans la partie donnée.

Lemme 3.6.5. Sous les conditions de 3.6.1 , on a

$$\overline{C} = \left\{ x \in V , \ f_i(x) \geqslant 0 \right\} .$$

Les murs de C sont les plans $f_i^{-1}(0)$.

C'est clair pour la première assertion. La seconde résulte alors de ce que $\overline{C} - C \subset \cup f_i^{-1}(0)$ et de ce que les $f_i^{-1}(0)$ sont évidemment des murs de C .

Proposition 3.6.6. Soit C une chambre de V . Si H_i , i=1,2,... n , sont les murs distincts de C , pour tout système de formes linéaires $\{u_i\}$ tel que $H_i = u_i^{-1}(0)$, il existe des $e_i \in \{-1,+1\}$ tels que C soit définie par

$$C = \left\{ x \in V , \ e_i u_i(x) > 0 \right\} .$$

Pour tout mur H de C , on a $H \cap C = \emptyset$ et $H \cap \overline{C} = \overline{C}_H$, où C_H est une chambre dans H . Les murs de C_{H_i} sont les $H_j \cap H_i$, pour $j \neq i$.

Cela résulte trivialement du lemme.

Définition 3.6.7. Les C_{H_i} sont les faces de C .

Soit maintenant $\mathcal{R} = (M, M^*, R, R^*)$ une donnée radicielle.

Définition 3.6.8. On note $X = V^* - \bigcup_{r \in R} \{ x , (x,r) = 0 \}$.

Pour tout $x \in X$, on pose

$$\underline{P}(x) = \{ r \in R , (x,r) > 0 \} .$$

Pour tout système de racines positives P , on note

$$\underline{C}(P) = \{ x \in V^*, (x,r) > 0 \text{ pour } r \in P \} .$$

Proposition 3.6.9. (i) Pour tout $x \in X$, $P(x)$ est un système de racines positives. Pour tout système de racines positives P , $\underline{C}(P)$ est une chambre dans V^* . Les $\underline{C}(P)$ sont les parties convexes maximales de X .

(ii) Soit S un système de racines simples . On a $\underline{C}(\underline{P}(S)) = \{ x \in V^*, (x,r) > 0 \text{ pour } r \in S \}$. Les murs de $\underline{C}(\underline{P}(S))$ sont les plans $r^{-1}(0)$, $r \in S$; ses faces sont les $C_r = \{ x \in V , r(x) = 0 , s(x) > 0 \text{ pour } s \in S - \{r\} \}$.

(iii) On a l'équivalence

$$\underline{P}(x) = P \iff x \in \underline{C}(P) .$$

Il est d'abord clair que $\underline{P}(x)$ est un système de racines positives . Comme $\underline{C}(\underline{P}(x)) \ni x$, la réunion des $\underline{C}(\underline{P}(x))$ est X . La propriété (iii) est immédiate; il en résulte que les $\underline{C}(P)$ forment une partition de X . La première assertion de (ii) est évidente. Il en résulte aussitôt que $\underline{C}(P)$ est une chambre dans V , ce qui prouve le reste de (ii). Il ne reste qu'à remarquer que $\bigcup_{r \in R} r^{-1}(0) = \bigcup_{r \in S} s^{-1}(0)$ pour achever la démonstration de (i) par 3.6.1.

Définition 3.6.10. Les $\underline{C}(P)$ sont appelées les chambres de Weyl de la donnée radicielle.

Corollaire 3.6.11. Les applications $P \longmapsto \underline{C}(P)$ et $C \longmapsto \underline{P}(x)$ pour un $x \in C$ quelconque, réalisent une correspondance bijective entre systèmes de racines positives et chambres de Weyl.

Cette correspondance est invariante par le groupe de Weyl :

Lemme 3.6.12. Si $w \in W(\mathcal{R})$, on a $\underline{C}(w(P)) = w(\underline{C}(P))$.

Corollaire 3.6.13. Les correspondances $S \longleftrightarrow P \longleftrightarrow C$ sont des isomorphismes d'espaces homogènes sous $W(\mathcal{R})$.

On verra plus loin que ces espaces homogènes sont principaux (5.5).

Remarque 3.6.14. Si C est une chambre de Weyl, alors $-C$ en est aussi une, dite l'opposée de C. Il existe donc un $w_o \in W$ (et en fait un seul, cf. 5.5) tel que $w_o(C) = -C$, on l'appelle la symétrie de la donnée radicielle relativement à la chambre de Weyl C, (ou à $\underline{P}(C)$ ou à $(\underline{S}(\underline{P}(C))\ldots)$

4. Données radicielles réduites de rang semi-simple 2 .

Soit $\mathcal{R}$ une donnée radicielle de rang semi-simple 2 . Soit $\{r , s\}$ un système de racines simples. Supposons $\ell(r) \leqslant \ell(s)$. On a alors par 2.3.1 et 3.2.11 quatre possibilités :

Type	$\ell(s)/\ell(r)$	$\ell(s^*)/\ell(r^*)$	(s^*,r)	(r^*,s)
$A_1 + A_1$	—	—	0	0
A_2	1	1	- 1	- 1
B_2	2	1/2	- 1	- 2
G_2	3	1/3	- 1	- 3 .

Il résulte alors de 3.4.5 que l'ordre de $s_r s_s$ est respectivement 2 , 3 , 4 , 6.

Etudions séparément chacun de ces systèmes et donnons la liste des racines indivisibles.

Type $A_1 + A_1$. Les racines indivisibles sont r , s , $-r$, $-s$. Les coracines correspondantes sont r^*, s^* , $-r^*$, $-s^*$.

Type A_2 . Les racines indivisibles sont comme suit :

racine t	r	S	$r + s$
$\ell(t)/\ell(r)$	1	1	1
coracine t^*	r^*	s^*	$r^* + s^*$
$\ell(t^*)/\ell(s^*)$	1	1	1

.

La demi-somme des racines indivisibles positives est $g = r + s$.

Type B_2 . Les racines indivisibles sont les suivantes :

racine t	r	s	$r + s$	$2r + s$
$\ell(t)/\ell(r)$	1	2	1	2
coracine t^*	r^*	s^*	$2r^* + s^*$	$r^* + s^*$
$\ell(t^*)/\ell(s^*)$	2	1	2	1

.

La demi-somme des racines indivisibles positives est $g = 2r + (3/2)\, s$.

Type G_2 . Les racines indivisibles sont les suivantes :

racine t	r	s	$r + s$	$2r + s$	$3r + s$	$3r + 2s$
$\ell(t)/\ell(r)$	1	3	1	1	3	3
coracine t^*	r^*	s^*	$r^* + 3s^*$	$2r^* + 3s^*$	$r^* + s^*$	$r^* + 2s^*$
$\ell(t^*)/\ell(s^*)$	3	1	3	3	1	1

.

La demi-somme des racines indivisibles positives est $g = 5\,r + 3\,s$.

Proposition 4.1. Soit n l'ordre de $(s_r\, s_s)$. Posons

$$u_o = 0 \quad , \quad u_{2p+1} = u_{2p} + (s_r\, s_s)^p(r) \qquad \text{pour } p \in \underline{\underline{Z}}_+ \ ,$$

$$u_{2p+2} = u_{2p+1} + (s_r\, s_s)^p\, s_r(s) \qquad \text{pour } p \in \underline{\underline{Z}}_+ \ .$$

Alors

(i) $u_{k+2n} = u_k \quad , \quad k \in \underline{\underline{Z}}_+$

(ii) $u_o = 0 \ , \ u_1 = r \ , \ u_{2n-1} = s \ , \ u_{2n} = 0$.

(iii) Si $1 < k < 2n - 1$, on a

$$u_k = a_k\, r + b_k\, s \quad , \quad a_k, b_k \in \underline{\underline{N}} \ .$$

L'assertion (i) résulte aussitôt de $(s_r\, s_s)^n = 1$ et $u_{2n} = 0$. Prouvons (ii) et (iii) . Le calcul donne aussitôt dans les quatre cas les suites de valeurs :

Type $A_1 + A_1$: $0 , r , r+s , s , 0$.

Type A_2 : $0 , r , 2r + s , 2r + 2s , r + 2s , s , 0$.

Type B_2 : $0 , r , 2r + s , 3r + 3s , 3r + 4s , 2r + 4s , r + 3s , s , 0$.

Type G_2 : $0 \ r \ 2r + s , 4r + 4s , 5r + 6s , 6r + 9s , 6r + 10\,s , 5r + 10s , 4r + 9s , 2r + 6s , r + 4s, s, 0$.

Lemme 4.2 (*). Posons $w_{2p} = (s_s\, s_r)^p$, $w_{2p+1} = s_r(s_s\, s_r)^p$, de telle sorte que les w_i , $i = 0 , \ldots . 2n - 1$, sont les éléments distincts de W .

(*) Les lemmes suivants 4.2 et 4.4 sont utilisés dans la démonstration de 5.1. Il y a actuellement des démonstrations plus simples de 5.1 (voir Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Ch. IV).

Soit $u \in V^*$. On a

$$w_k(u) - u = n_k r^* + m_k s^* , \quad n_k, m_k \in \underline{Q} ,$$

avec $n_k + m_k = -(u, u_k)$.

La démonstration se fait par récurrence sur k . Si $k = 0$, la formule est trivialement vérifiée. Effectuons par exemple le passage de w_{2p} à w_{2p+1} . On a $w_{2p+1} = s_r \, w_{2p}$, d'où

$$w_{2p+1}(x) - x = s_r(w_{2p}(x)) - w_{2p}(x) + w_{2p}(x) - x =$$

$$= - (w_{2p}(x), r) \, r^* + n_{2p} \, r^* + n_{2p} \, s^* .$$

D'où $n_{2p+1} + m_{2p+1} = n_{2p} + m_{2p} - ((s_s \, s_r)^p(x) , r)$

$$= -(x, u_{2p}) - (x, (s_r \, s_s)^p(r)) = - (x, u_{2p+1}) .$$

Corollaire 4.3. Si $(u,r) \geqslant 0$, $(u,s) \geqslant 0$, et si on pose

$$w(u) - u = a_w r + b_w s ,$$

on a $a_w + b_w \geqslant 0$. Si de plus $(u,r) > 0$ (resp. $(u,s) > 0$), $a_w + b_w > 0$ pour $w \neq 1$, s_s (resp. $w \neq 1$, s_r) .

Cela résulte aussitôt de 4.1 et 4.2.

Corollaire 4.4. Soit $\mathcal{A}$ une donnée radicielle quelconque et soit S un système de racines simples. Soient u une racine positive, r et s deux racines simples. Si

$$\mathrm{ord}_S(s_r(u)) < \mathrm{ord}_S(u) ,$$

$$\mathrm{ord}_S(s_s(u)) \leqslant \mathrm{ord}_S(u) ,$$

alors $\mathrm{ord}_S(w(u)) \leqslant \mathrm{ord}_S(u)$ pour tout $w \in W_{rs}$ (sous-groupe de W engendré

par s_r et s_s) et $\mathrm{ord}_S(w(u)) < \mathrm{ord}_S(u)$ pour tout $w \in W_{rs}$, $w \neq 1$, $w \neq s_s$.

En effet, considérons la donnée radicielle duale $\mathcal{R}^*$, puis la donnée (M^*, M, R'^*, R') où R' est l'ensemble des racines combinaisons linéaires rationnelles de r et de s. Appliquant 4.3 à cette donnée, on trouve le corollaire annoncé.

5. Le groupe de Weyl : générateurs et relations.

Soit $\mathcal{R}$ une donnée radicielle. Comme le groupe de Weyl est le même pour cette donnée et pour la donnée réduite correspondante, on peut la supposer réduite pour étudier le groupe de Weyl.

Soit S un système de racines simples dont les éléments seront notés $r_1, r_2, \ldots r_n$, $n = \mathrm{rgss}(\mathcal{R})$. Soit n_{ij} l'ordre de l'élément $s_{r_i} s_{r_j}$ de W. En particulier, on a $n_{ii} = 1$ et on a vu en 3.4.2 et 3.4.3 que le sous-groupe W_{ij} de W engendré par s_{r_i} et s_{r_j} était défini par les relations

$$s_{r_i}^2 = s_{r_j}^2 = (s_{r_i} s_{r_j})^{n_{ij}} = 1 .$$

Théorème 5.1. Le groupe W est le groupe engendré par les éléments s_{r_i}, $i = 1, 2, \ldots n$, soumis aux relations $(s_{r_i} s_{r_j})^{n_{ij}} = 1$.

Nous avons déjà vu que le théorème est vrai lorsque $n = 2$; nous nous servirons de cette remarque dans le cours de la démonstration. Introduisons le groupe $\overline{W}$ engendré par des éléments T_i, $i = 1,2,\ldots n$, soumis aux

relations $(T_i T_j)^{n_{ij}} = 1$. On a en particulier $n_{ij} = 1$, d'où $T_i^2 = 1$. Soit $p : \overline{W} \longrightarrow W$ le morphisme de groupes qui envoie T_i sur s_{r_i} . On sait que p est surjectif, on va montrer qu'il est injectif.

Lemme 5.2. On peut définir de manière unique pour chaque $r \in P(S)$ un élément $T_r \in \overline{W}$ de telle manière que l'on ait les propriétés suivantes :

(i) $p(T_r) = s_r$,

(ii) $T_{r_i} = T_i$

(iii) Si s et r sont deux racines positives telles que $s_{r_i}(r) = s$, alors $T_i T_r T_i = T_s$.

Remarquons d'abord qu'il résulte de 1.2.10 et 3.3.6 que (i) est une conséquence de (ii) et (iii) et que (ii) et (iii) déterminent parfaitement les T_r . Nous allons faire la construction par récurrence sur $ord_S(r)$. Si $ord_S(r) = 1$, alors $r \in S$ et on pose $T_r = T_i$ si $r = r_i$. Considérons l'hypothèse :

(H_p) il existe des T_r , pour $r \in P(S)$, $ord_S(r) \leqslant p$, vérifiant (ii) et la condition (iii) chaque fois que $ord_S(r) \leqslant p$, $ord_S(s) \leqslant p$.

Celle-ci est vérifiée pour $p = 1$: en effet si r et $s_{r_i}(r) = s$ sont simples, r_i et r sont orthogonales , $s = r = r_j$, ce qui donne

$$T_i T_j T_i = T_i ,$$

par $n_{ij} = 2$.

Supposons (H_{p-1}) vérifiée .

A) Construction des T_r pour $ord_S(r) \leq p$. Il suffit évidemment de le faire pour $ord_S(r) = p$. Il existe alors $r_i \in S$, avec $s_{r_i}(r) \in \underline{P}(S)$, $ord_S(s_{r_i}(r)) < p$ (3.3.3) . On posera alors

$$T_r = T_i \, T_{s_{r_i}(r)} \, T_i \ .$$

Vérifions que T_r ne dépend que de r . Soit donc $r_j \in S$ avec $s_{r_j}(r) \in \underline{P}(S)$, $ord_S(s_{r_j}(r)) < p$. Prouvons que

$$(+) \qquad T_i \, T_{s_{r_i}(r)} \, T_i = T_j \, T_{s_{r_j}(r)} \, T_j \ .$$

Distinguons deux cas. 1) Supposons r combinaison linéaire de r_i et de r_j . Il en est alors de même de $s_{r_i}(r)$ et $s_{r_j}(r)$ et par (H_{p-1}) , $T_{s_{r_i}(r)}$ et $T_{s_{r_j}(r)}$ s'écrivent comme des mots en T_i et T_j . Comme la projection de (+) dans W est vérifiée et que le théorème est vrai pour $n = 2$, donc que p est injectif sur le sous-groupe de $\overline{W}$ engendré par T_i et T_j, (+) est bien vérifiée.

2) Supposons r non combinaison linéaire de r_i et de r_j . Alors si $w \in W_{r_i r_j}$, les $w(r)$ seront tous positifs (cf. 3.4.9). La relation à vérifier s'écrit aussi

$$(++) \qquad (T_i \, T_j)^{n_{ij}-1} \, T_{s_{r_i}(r)} \, (T_j \, T_i)^{n_{ij}-1} = T_{s_{r_j}(r)} \ .$$

Or il résulte de 4.4 que les $w(r)$ sont tous d'ordre $< p$ pour $w \in W_{r_i r_j}$ $w \neq 1$. On peut donc appliquer $2(n_{ij} - 1)$ fois l'hypothèse (H_{p-1}) et on a terminé.

B) Vérification de (H_p). Il ne reste plus qu'à vérifier l'assertion suivante : si $ord_S(r) = p$, $ord_S(s_{r_i}(r)) < p$, $ord_S(s_{r_j}(r)) = p$, on a

$$(+++) \quad T_j T_i T_{s_{r_i}(r)} T_i T_j = T_i T_{s_{r_i}(r)} T_i \ .$$

Cela se fait exactement comme précédemment .

Lemme 5.3. Soit $h \in \overline{W}$. Ecrivons-le

$$h = T_{i_1} \cdots T_{i_p} \cdots T_{i_m}$$

de telle manière que m soit minimum. Alors

$$p(h)\,(r_m) \in -\underline{P}(S) \ .$$

En effet, comme $h(T_{i_m})(r_{m_m}) = s_{r_m}(r_m) = -r_m$, si $p(h)(r_m)$ était positif, il existerait un k , $1 \leqslant k < m - 1$ avec

$$u = s_{r_{k+1}} \cdots s_{r_m}(r_m) = -s_{r_{k+1}} \cdots s_{r_{m-1}}(r_m) \in -\underline{P}(S) \ ,$$

$$s_{r_k}(u) \in \underline{P}(S) \ .$$

Mais alors on a nécessairement $u = - r_k$ (3.3.1) , d'où

$$s_{r_{k+1}} \cdots s_{r_{m-1}}(r_m) = r_k \ ,$$

ce qui entraîne par (iii)

$$T_k T_{k+1} \cdots T_{m-1} T_m = T_{k+1} \cdots T_{m-1} \ ,$$

et contredit le caractère minimal de m .

Soit maintenant $h \in \overline{W}$ avec $p(h)(\underline{P}(S)) \subset \underline{P}(S)$. Par le lemme 5.3 , on a $p(h) = 1$, ce qui démontre le théorème et en outre le

Corollaire 5.4. Si P est un système de racines positives et si $w \in W$ est tel que $w(P) = P$, alors $w = 1$.

Corollaire 5.5. Le groupe de Weyl opère librement et transitivement dans l'ensemble de systèmes de racines positives (resp. des systèmes de racines simples, resp. des chambres de Weyl, resp...).

Choisissons maintenant un système de racines simples S . Posons $P = \underline{P}(S)$. Pour tout couple de racines simples $(r,s) \in S \times S$, notons R_{rs} l'ensemble des racines combinaison linéaire r et de s . Notons $P_{rs} = P \cap R_{rs}$ et soit W_{rs} le groupe de Weyl de R_{rs} , c'est-à-dire le sous-groupe de W engendré par s_r et s_s .

Théorème 5.6. (Tits) Soient r et s deux racines simples et soit $w \in W$ tel que $w(r) = s$. Il existe une suite de racines simples r_i $(i = 0,\dots,m)$ et une suite d'éléments de W , w_i $(i = 0,\dots,m-1)$ vérifiant les conditions suivantes :

(i) On a $r_o = r$, $r_m = s$.

(ii) On a $w = w_{m-1} \cdot w_{m-2} \cdots w_o$.

(iii) On a $w_i(r_i) = r_{i+1}$, pour $0 \leqslant i \leqslant m-1$.

(iv) Pour tout i , $0 \leqslant i \leqslant m-1$, tel que $r_i \neq r_{i+1}$, on a

$$w_i \in W_{r_i r_{i+1}} .$$

(v) Pour tout i , $0 \leqslant i \leqslant m-1$, tel que $r_i = r_{i+1}$, il existe une racine simple s_i telle que

$$w_i \in W_{r_i s_i} .$$

Posons $M(w) = \mathrm{Card}(P \cap -w^{-1}(P))$. Si $M(w) = 0$, alors $w = 1$ par 5.4 et le théorème est trivial ($m = 0$, les assertions (iii) à (v) sont vides). Raisonnons par récurrence sur $M(w)$. Si $M(w) > 0$, il existe $s_o \in S$ avec $w(s_o) \in P$. Posons $r_o = r$. Considérons l'ensemble

$$A = w^{-1}(P) \cap R_{r_o s_o} .$$

C'est un système de racines positives de $R_{r_o s_o}$. Il existe donc $w_o \in W_{r_o s_o}$ avec

$$w_o^{-1}(P_{r_o s_o}) = A .$$

Posons $w' = w\, w_o^{-1}$. Par 3.4.9 , on a aussitôt

$$P - P_{r_o s_o} = w_o(P - P_{r_o s_o}) ,$$

d'où

$$\left(P - P_{r_o s_o}\right) \cap -w^{-1}(P) = \left(P - P_{r_o s_o}\right) \cap -w'^{-1}(P) .$$

D'autre part

$$P_{r_o s_o} \cap -w'^{-1}(P) = P_{r_o s_o} \cap -w_o(A) = P_{r_o s_o} \cap -P_{r_o s_o} = \emptyset ,$$

tandis que

$$P_{r_o s_o} \cap -w^{-1}(P) \ni s_o .$$

On a donc prouvé que $M(w') < M(w)$. Posons $r_i = w_o(r_o)$, montrons que $r_1 \in S$, c'est-à-dire $r_o \in w_o^{-1}(S)$. On sait que $w(r_o) \in S$, donc que $r_o \in w^{-1}(S)$, donc aussi que $r_o \in w^{-1}(S) \cap R_{r_o s_o}$, donc que r_o est une racine simple de $A = w_o^{-1}(P_{r_o s_o})$, donc appartient à $w_o^{-1}(S \cap P_{r_o s_o}) \in w_o^{-1}(S)$ (voir 3.4.8). On sait donc que r_1 est simple et $\in R_{r_o s_o}$. Si $r_o \neq r_1$, on a donc $s_o = r_1$. On a $s = w'(r_1)$, avec $M(w') < M(w)$ et on conclut par récurrence.

6. Morphismes de données radicielles.

6.1. Définition.

Soient $\mathcal{R} = (M, M^*, R, R^*)$ et $\mathcal{R}' = (M', M'^*, R', R'^*)$ deux données radicielles. Soit $f : M' \longrightarrow M$ une application linéaire et ${}^t f : M'^* \longrightarrow M^*$ l'application transposée.

Définition 6.1.1. *On dit que* f *est un* morphisme *de* $\mathcal{R}'$ *dans* $\mathcal{R}$ *et on note* $f : \mathcal{R}' \longrightarrow \mathcal{R}$, *si* f *induit une bijection de* R' *sur* R *et* ${}^t f$ *une bijection de* R^* *sur* R'^*.

Alors ${}^t f$ est un morphisme des données radicielles duales :

$$ {}^t f : \mathcal{R}^* \longrightarrow \mathcal{R}'^* \ . $$

On voit facilement que si f est un morphisme de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$, et si on note $r = f(r')$ pour $r' \in R'$, on a $r'^* = {}^t f(r^*)$. En effet, on voit immédiatement que si on note p et p' les applications de 1.2.1 respectives à $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, on a $p' = {}^t f \circ p \circ f$, et l'assertion cherchée en résulte aussitôt. Nous laissons au lecteur le soin de démontrer les énoncés qui suivent et qui sont presque tous triviaux.

Proposition 6.1.2. *Soit* $f : \mathcal{R}' \longrightarrow \mathcal{R}$ *un morphisme de données radicielles. Si* $r' \in R'$ *et* $r = f(r')$, *alors* $r'^* = {}^t f(r^*)$. *De plus,* f *induit des isomorphismes*

$$ R' \xrightarrow{\sim} R \ , \quad \Gamma_o(R') \xrightarrow{\sim} \Gamma_o(R) \ , \quad \underline{V}(R') \xrightarrow{\sim} \underline{V}(R) \ , $$

${}^t f$ *induit des isomorphismes*

$$ R^* \xrightarrow{\sim} R'^* \ , \quad \Gamma_o(R^*) \xrightarrow{\sim} \Gamma_o(R'^*) \ , \quad \underline{V}(R^*) \xrightarrow{\sim} \underline{V}(R'^*) \ , $$

le dernier étant le transposé du morphisme correspondant induit par f. L'application $s_{r'} \longmapsto s_{f(r')}$ se prolonge en un isomorphisme $W(\mathcal{R}') \xrightarrow{\sim} W(\mathcal{R})$ compatible avec les opérations de ces deux groupes dans les ensembles de 1.1.13.

Proposition 6.1.3. Les applications $S' \longmapsto f(S')$, $P' \longmapsto f(P')$ et $C' \longmapsto ({}^t f \otimes \underline{\underline{Q}})^{-1}(C')$ définissent des correspondances bijectives entre systèmes de racines simples, systèmes de racines positives et chambres de Weyl pour $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{R}$. Ces correspondances sont compatibles avec l'action des groupes de Weyl et avec les correspondances $\underline{S}(P) \longleftrightarrow P \longleftrightarrow \underline{C}(P)$.

Lemme 6.1.4. Les morphismes se composent. Pour que le morphisme $f : \mathcal{R}' \longrightarrow \mathcal{R}$ soit un isomorphisme, il faut et il suffit que $f : M' \longrightarrow M$ soit bijectif.

6.2. Isogénies.

Définition 6.2.1. Un morphisme $f : \mathcal{R}' \longrightarrow \mathcal{R}$ de données radicielles est dit une isogénie si $f : M' \longrightarrow M$ est injectif de conoyau fini.

Si f est une isogénie, alors ${}^t f$ est une isogénie.

Définition 6.2.2. Soit $f : \mathcal{R}' \longrightarrow \mathcal{R}$ une isogénie. On pose

$K(f) = \mathrm{Coker}(f : M' \longrightarrow M)$.

Lemme 6.2.3. On a un accouplement naturel

$$K(f) \times K({}^t f) \longrightarrow \underline{\underline{Q}}/\underline{\underline{Z}} ,$$

qui met ces deux groupes finis en dualité.

C'est classique.

Lemme 6.2.4. Si $f : \mathcal{R}' \longrightarrow \mathcal{R}$ est un morphisme, alors $\mathrm{rgss}(\mathcal{R}') = \mathrm{rgss}(\mathcal{R})$. Si de plus f est une isogénie, on a aussi $\mathrm{rgred}(\mathcal{R}') = \mathrm{rgred}(\mathcal{R})$.

Trivial.

Lemme 6.2.5. Tout morphisme de données radicielles semi-simples est une isogénie.

Cela résulte aussitôt du fait que f doit induire un isomorphisme de $V' = \underline{V}(R')$ sur $V = \underline{V}(R)$.

Si $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{R}$ sont semi-simples, toute isogénie f définit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_o(R') & \xrightarrow{\sim} & \Gamma_o(R) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M' & \xrightarrow{f} & M \end{array} .$$

Si $M = \Gamma_o(R)$, alors f est nécessairement un isomorphisme.

Définition 6.2.6. Une donnée radicielle est dite adjointe (resp. simplement connexe) si $M = \Gamma_o(R)$, resp. $M^* = \Gamma_o(R^*)$.

Une donnée radicielle adjointe ou simplement connexe est donc semi-simple. $\mathcal{R}$ est adjointe (resp. s.connexe) si et seulement si $\mathcal{R}^*$ est s.connexe (resp. adjointe). En vertu du résultat précédent, on a :

Proposition 6.2.7. Soit $\mathcal{R}$ une donnée radicielle semi-simple. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathcal{R}$ est adjointe (resp. simplement connexe).

(ii) Toute isogénie $\mathcal{R}' \longrightarrow \mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}'$) est un isomorphisme.

Proposition 6.2.8. Soit $\mathcal{R}$ une donnée radicielle adjointe (resp. simplement connexe. Toute racine (resp. coracine) indivisible est un élément indivisible de M (resp. M^*).

En effet, toute racine indivisible fait partie d'une base de $\Gamma_0(R)$, par 3.3.5.

6.3. Radical et coradical.

Soit $\mathcal{R}$ une donnée radicielle. Posons

$$N = \{ x \in M , \ (r^*,x) = 0 \text{ pour tout } r^* \in R^* \}.$$
$$N^* = \{ M^*/\underline{V}(R^*) \cap M^* \}$$

Lemme 6.3.1. Considérons les morphismes canoniques :

$$N \longrightarrow M , \quad M^* \longrightarrow N^* .$$

Ils sont transposés l'un de l'autre et N^* s'identifie au dual de N.

C'est immédiat, compte tenu de 1.2.5.

Définition 6.3.2. On appelle coradical de $\mathcal{R}$ et on note $\mathrm{corad}(\mathcal{R})$ la donnée radicielle triviale

$$\mathrm{corad}(\mathcal{R}) = (N,N^*,\emptyset,\emptyset) .$$

Si on pose $\mathcal{R}^\circ = (M,M^*,\emptyset,\emptyset)$ (c'est une donnée radicielle triviale), on a donc un morphisme

$$\mathrm{corad}(\mathcal{R}) \longrightarrow \mathcal{R}^\circ .$$

Définition 6.3.3. On appelle radical de $\mathcal{R}$ et on note $\mathrm{rad}(\mathcal{R})$ la donnée radicielle triviale :

$$\mathrm{rad}(\mathcal{R}) = (\mathrm{corad}(\mathcal{R}^*))^* .$$

On a donc un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{corad}(\mathcal{R}) & \longrightarrow & \mathrm{rad}(\mathcal{R}) \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & \mathcal{R}^\circ & \end{array} ,$$

dont le transposé est le diagramme correspondant pour $\mathcal{R}^*$.

Lemme 6.3.4. Le morphisme canonique $u : \mathrm{corad}(\mathcal{R}) \longrightarrow \mathrm{rad}(\mathcal{R})$ est une isogénie.

Définition 6.3.5. On pose $N(\mathcal{R}) = K(u) = M / \left[(V(R) \cap M) + \bigcap \mathrm{Ker}\ r^* \right]$.

On a un accouplement canonique

$$N(\mathcal{R}) \times N(\mathcal{R}^*) \longrightarrow \underline{\underline{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}} \quad .$$

Lemme 6.3.6. On a $\mathrm{rgred}(\mathrm{rad}(\mathcal{R})) = \mathrm{rgred}(\mathrm{corad}(\mathcal{R})) = \mathrm{rgred}(\mathcal{R}) - \mathrm{rgss}(\mathcal{R})$.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathcal{R}$ est semi-simple ,

(ii) $\mathrm{rad}(\mathcal{R}) = 0$,

(iii) $\mathrm{corad}(\mathcal{R}) = 0$.

6.4. Produits de données radicielles.

Définition 6.4.1. Soient $\mathcal{R} = (M, M^*, R, R^*)$ et $\mathcal{R}' = (M', M'^*, R', R'^*)$ deux données radicielles. On appelle donnée radicielle produit de $\mathcal{R}$ et de $\mathcal{R}'$ et on note $\mathcal{R}'' = \mathcal{R} \times \mathcal{R}'$ la donnée radicielle (M'', M''^*, R'', R''^*) où $M'' = M \times M'$, $M''^* = M^* \times M'^*$, $R'' = R \times 0 \cup 0 \times R'$, $R''^* = R^* \cup R'^*$ (on considère $R'' \subset M''$ et $R''^* \subset M''^*$ de la manière évidente,...) , l'application $r \mapsto r^*$ étant l'application évidente.

Proposition 6.4.2. Sous les conditions précédentes on a des isomorphismes canoniques

$$\Gamma_o(R'') \simeq \Gamma_o(R) \times \Gamma_o(R') \quad , \quad \underline{V}(R'') \simeq \underline{V}(R) \times \underline{V}(R') \quad ,$$
$$W(\mathcal{R}'') \simeq W(\mathcal{R}) \times W(\mathcal{R}') \text{ , etc.}$$

et des relations

$$\mathrm{rgred}(\mathcal{R}'') = \mathrm{rgred}(\mathcal{R}) + \mathrm{rgred}(\mathcal{R}') ,$$

$$\mathrm{rgss}(\mathcal{R}'') = \mathrm{rgss}(\mathcal{R}) + \mathrm{rgss}(\mathcal{R}') .$$

On a également un isomorphisme canonique de données radicielles

$$(\mathcal{R} \times \mathcal{R}')^* \simeq \mathcal{R}^* \times \mathcal{R}'^* .$$

Les définitions précédentes se généralisent aussitôt à un produit de plusieurs facteurs. On a aussitôt :

Proposition 6.4.3. Soit $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2 \ldots \times \mathcal{R}_n$ un produit de données radicielles. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathcal{R}$ est semi-simple (resp. simplement connexe, resp. adjointe, resp. réduite).

(ii) Chaque $\mathcal{R}_i$ est semi-simple (resp. simplement connexe, resp. adjointe, resp. réduite).

Considérons le cas particulier suivant : soit $\mathcal{R}_0$ une donnée radicielle triviale et $\mathcal{R}_1$ une donnée radicielle semi-simple. On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{R}_0 \times \mathcal{R}_1 & \\ \nearrow & & \searrow \\ \mathcal{R}_1 & \xrightarrow{\ \mathrm{id}\ } & \mathcal{R}_1 \end{array} .$$

Lemme 6.4.4. On a des isomorphismes canoniques

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{corad}(\mathcal{R}_0 \times \mathcal{R}_1) & \xrightarrow{\ \sim\ } & \mathrm{rad}(\mathcal{R}_0 \times \mathcal{R}_1) . \\ & \searrow^{\sim} \quad \nearrow_{\sim} & \\ & \mathcal{R}_0 & \end{array}$$

En particulier $\mathrm{N}(\mathcal{R}_0 \times \mathcal{R}_1) = 0$.

Nous verrons plus tard que si réciproquement $\mathrm{N}(\mathcal{R}) = 0$, alors la donnée radicielle $\mathcal{R}$ est produit d'une donnée semi-simple par une donnée triviale.

6.5. Données radicielles induites et coinduites.

Soit $\mathcal{R} = (M, M^*, R, R^*)$ une donnée radicielle. Soit $N \subset M$ un sous-groupe contenant les racines, i.e., soit

$$\Gamma_o(R) \subset N \subset M .$$

L'application linéaire canonique $i_N : N \longrightarrow M$ donne par transposition une application linéaire

$${}^t i_N : M^* \longrightarrow N^* .$$

Posons $R_N = R$, $R_N^* = {}^t i_N (R^*)$.

Lemme 6.5.1. $(N, N^*, R_N, R_N^*) = \mathcal{R}_N$ est une donnée radicielle, et i_N un morphisme.

Montrons d'abord que ${}^t i_N$ induit un isomorphisme de R^* sur R_N^*. Si ${}^t i_N(r^*) = {}^t i_N(s^*)$, $r, s \in R$, on a $(r^*, x) = (s^*, x)$ pour tout $x \in N$, en particulier pour $x \in R$, ce qui donne $r = s$ par 1.1.4. Le reste s'en déduit sans difficultés.

Définition 6.5.2. $\mathcal{R}_N$ est dite la donnée radicielle induite par $\mathcal{R}$ sur N.

Lemme 6.5.3. Soit $f : \mathcal{R}' \to \mathcal{R}$ un morphisme. Posons $f(M') = N \subset M$. Alors f se factorise de manière unique par i_N.

En particulier, les isogénies $\mathcal{R}' \to \mathcal{R}$, à isomorphisme près, correspondent biunivoquement aux sous-groupes d'indice fini de $M/\Gamma_o(R)$, ce qui précise 6.2.7.

Soit maintenant N^* un sous-groupe de M^* contenant R^*. On définit la donnée coinduite par $\mathcal{R}$ sur N^* par

$$\mathcal{R}^{N^*} = (\mathcal{R}^*_{N^*})^* \ ,$$

et on a un morphisme canonique :

$$p^{N^*} : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}^{N^*} \ .$$

Lemme 6.5.4. Soit $f : \mathcal{R}' \longrightarrow \mathcal{R}$ un morphisme. Il existe un $N \subset M$, un $N'^* \subset M'^*$ tels que f se factorise en

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}' & \xrightarrow{f} & \mathcal{R} \\ {\scriptstyle p^{N'}}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle i_N} \\ \mathcal{R}'^{N'^*} & \xrightarrow{f_o} & \mathcal{R}_N \end{array} \ ,$$

où f_o est un isomorphisme .

En effet, on commence comme dans 6.5.3. Le morphisme $M' \longrightarrow N$ obtenu est surjectif, donc son transposé injectif. On prend l'image de ce dernier comme N'^*.

Traitons maintenant certains cas particuliers. Si on prend $N = \Gamma_o(R)$, on notera $\mathcal{R}_N = \mathrm{ad}(\mathcal{R})$. Si on prend $N = \underline{V}(R) \cap M$, on notera $\mathcal{R}_N = \mathrm{ss}(\mathcal{R})$. On a donc un diagramme :

$$\mathrm{ad}(\mathcal{R}) \longrightarrow \mathrm{ss}(\mathcal{R}) \longrightarrow \mathcal{R} \ .$$

Par dualité, on en déduit de même un diagramme $\mathcal{R} \longrightarrow \mathrm{der}(\mathcal{R}) \longrightarrow \mathrm{scon}(\mathcal{R})$ où $\mathrm{der}(\mathcal{R}) = \mathrm{ss}(\mathcal{R}*)*$, $\mathrm{scon}(\mathcal{R}) = \mathrm{ad}(\mathcal{R}*)*$.

Proposition 6.5.5. (i) Dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{ad}(\mathcal{R}) & \longrightarrow & \mathrm{ss}(\mathcal{R}) & \longrightarrow & \mathrm{der}(\mathcal{R}) & \longrightarrow & \mathrm{scon}(\mathcal{R}) \\ & & & \searrow & \uparrow & & \\ & & & & \mathcal{R} & & \end{array}$$

les quatre données de la première ligne sont semi-simples et les trois morphismes des isogénies.

(ii) $\mathrm{ad}(\mathcal{R})$ est une donnée adjointe. $\mathcal{R}$ est adjointe si et seulement si $\mathrm{ad}(\mathcal{R}) \longrightarrow \mathcal{R}$ est un isomorphisme.

(iii) $\mathrm{scon}(\mathcal{R})$ est une donnée simplement connexe. $\mathcal{R}$ est simplement connexe si et seulement si $\mathcal{R} \to \mathrm{scon}(\mathcal{R})$ est un isomorphisme.

(iv) Les conditions suivantes sont équivalentes :

- $\mathcal{R}$ est semi-simple,
- $\mathrm{ss}(\mathcal{R}) \longrightarrow \mathcal{R}$ est un isomorphisme ,
- $\mathcal{R} \longrightarrow \mathrm{der}(\mathcal{R})$ est un isomorphisme .

Arrêtons-nous un instant sur le morphisme $\mathrm{ss}(\mathcal{R}) \longrightarrow \mathrm{der}(\mathcal{R})$. En se reportant à la construction de $\mathrm{ss}(\mathcal{R})$ et de $\mathrm{der}(\mathcal{R})$, il est aisé de démontrer le

Lemme 6.5.6. Soit $h : \mathrm{ss}(\mathcal{R}) \longrightarrow \mathrm{der}(\mathcal{R})$ l'isogénie canonique. On a $K(h) \simeq N(\mathcal{R})$.

6.5.7. Considérons maintenant d'autres cas particuliers de données induites. Posons $N = \left\{ x \in M \ , \ (r^*,x) = 0 \ \text{ pour } \ r \in R \right\} \times \Gamma_o(R)$; on sait que la somme est directe par 1.2.5. Il en résulte que la donnée radicielle $\mathcal{R}_N$ s'identifie au produit $\mathrm{ad}(\mathcal{R}) \times \mathrm{corad}(\mathcal{R})$. On peut faire de même en remplaçant $\Gamma_o(R)$ par $V(R) \cap M$, puis dualiser ces deux constructions. On obtient ainsi un diagramme de données radicielles :

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{ad}(\mathcal{R}) & \longrightarrow & \mathrm{ss}(\mathcal{R}) & \longrightarrow & \mathrm{der}(\mathcal{R}) & \longrightarrow & \mathrm{scon}(\mathcal{R}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{ad}(\mathcal{R}) \times \mathrm{corad}(\mathcal{R}) & \longrightarrow & \mathrm{ss}(\mathcal{R}) \times \mathrm{corad}(\mathcal{R}) & \longrightarrow & \mathcal{R} & \longrightarrow & \mathrm{der}(\mathcal{R}) \times \mathrm{rad}(\mathcal{R}) \longrightarrow \mathrm{scon}(\mathcal{R}) \times \mathrm{rad}(\mathcal{R}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{ad}(\mathcal{R}) & \longrightarrow & \mathrm{ss}(\mathcal{R}) & \longrightarrow & \mathrm{der}(\mathcal{R}) & \longrightarrow & \mathrm{scon}(\mathcal{R}) \ ;
\end{array}$$

qui est commutatif, comme on le vérifie aussitôt. Ce diagramme est auto-dual en un

sens évident. Les morphismes horizontaux sont des isogénies. Les composés des flèches verticales sont l'identité.

Lemme 6.5.8. Soient $h_1 : ss(\mathcal{R}) \times corad(\mathcal{R}) \longrightarrow \mathcal{R}$,

$h_2 : \mathcal{R} \longrightarrow der(\mathcal{R}) \times rad(\mathcal{R})$,

les isogénies canoniques. On a $K(h_1) \simeq K(h_2) \simeq N(\mathcal{R})$.

C'est trivial sur les définitions.

Corollaire 6.5.9. Soit $\mathcal{R}$ une donnée radicielle. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $N(\mathcal{R}) = 0$, i.e. $corad(\mathcal{R}) \longrightarrow rad(\mathcal{R})$ est un isomorphisme .

(ii) h est un isomorphisme .

(iii) h_1 est un isomorphisme .

(iv) h_2 est un isomorphisme .

(v) $\mathcal{R}$ est le produit d'une donnée semi-simple et d'une donnée triviale.

Enonçons également une conséquence triviale des remarques précédentes :

Corollaire 6.5.10. Pour toute donnée radicielle $\mathcal{R}$, il existe des isogénies $ad(\mathcal{R}) \times \mathcal{R}_o \longrightarrow \mathcal{R} \longrightarrow scon(\mathcal{R}) \times \mathcal{R}_o$, où $\mathcal{R}_o$ est "la" donnée radicielle triviale de rang $rgred(\mathcal{R}) - rgss(\mathcal{R})$.

Signalons enfin un résultat qui peut être utile :

Lemme 6.5.11. Soient $\mathcal{R}$ une donnée radicielle, S un système de racines simples, S' une partie de S , considérons la donnée radicielle (cf. 3.4.7)

$$\mathcal{R}_{S'} = (M, M^*, R(S'), R(S')^\vee) .$$

(i) Si $\mathcal{R}$ est simplement connexe, alors $\mathrm{der}(\mathcal{R}_{S'})$ est simplement connexe.

(ii) Si $\mathcal{R}$ est adjointe, alors $\mathrm{ss}(\mathcal{R}_{S'})$ est adjointe .

Les deux assertions sont évidemment équivalentes par dualité. La seconde se ramène à vérifier la formule :

$$M \cap \underline{V}(R(S')) = \Gamma_o(R(S')) \ ;$$

or, si $M = \Gamma_o(R)$, les deux membres sont égaux au sous-groupe de M engendré par S'.

6.6. Poids.

Définition 6.6.1. Soit $\mathcal{R}$ une donnée radicielle. On pose

$$\Gamma(\mathcal{R}) = \left\{ x \in V(R) \ , \ (r^*,x) \in \underline{\underline{Z}} \text{ pour tout } r^* \in R^* \right\}.$$

Les éléments de $\Gamma(\mathcal{R})$ sont appelés les poids de $\mathcal{R}$. Les poids de $\mathcal{R}^*$ sont appelés les copoids de $\mathcal{R}$.

On a $\Gamma_o(R) \subset \Gamma(\mathcal{R})$ et $\Gamma(\mathcal{R})$ est stable sous $W(\mathcal{R})$.

Lemme 6.6.2. L'application bilinéaire $V^* \times V \longrightarrow \underline{\underline{Q}}$ induit une dualité $\Gamma_o(\mathcal{R}^*) \times \Gamma(\mathcal{R}) \longrightarrow \underline{\underline{Z}}$.

Trivial.

Corollaire 6.6.3. Soit $S^* = (r_1^*, \ldots, r_n^*)$ un système de coracines simples. Soient p_i , $i=1,2,\ldots n$, les éléments de $\underline{V}(R)$ définis par

$$(r_i^*, p_j) = \delta_{ij} \ ,$$

c'est-à-dire $s_{r_i}(p_j) = p_j$ pour $i \neq j$, $s_{r_i}(p_j) = p_j - r_i$

(Attention : si la donnée n'est pas réduite, les r_i ne forment pas un système de racines simples). Alors $\Gamma(\mathcal{K})$ est le groupe abélien libre engendré par les p_i .

Les p_i sont les poids fondamentaux correspondant au système de coracines simples S^* .

Corollaire 6.6.4. Pour tout $r^* \in S^*$, on a donc $(r^*, \sum p_i) = 1$, donc $\sum p_i = g_p$ (3.5.1) où $P = \underline{P}(\mathrm{ind}(S))$.

Corollaire 6.6.5. Pour tout $x \in \underline{V}(R)$, on a $x = \sum (r_i^*, x)\, p_i$.

Corollaire 6.6.6. Remarquons que $R^* \subset \Gamma_o(R^*)$, $R \subset \Gamma(\mathcal{R})$, donc que $(\Gamma(\mathcal{R}), \Gamma_o(R^*), R, R^*)$ est une donnée radicielle. Le morphisme canonique $\Gamma_o(R^*) \longrightarrow M^*$ est le transposé du morphisme $x \longmapsto \sum (r_i^*, x) p_i$ qui définit un morphisme de données radicielles et on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & & \mathrm{scon}(\mathcal{R}) \\ & \nearrow & \wr\downarrow \\ \mathcal{R} & & \\ & \searrow & (\Gamma(\mathcal{K}),\ \Gamma_o(R^*), R, R^*) \end{array} \quad .$$

On a donc une description explicite de $\mathrm{scon}(\mathcal{R})$ en termes des poids de $\mathcal{R}$. De même, on trouve un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{ad}(\mathcal{R}) & \longrightarrow & \mathcal{R} \\ \wr\downarrow & \nearrow & \\ (\Gamma_o(R), \Gamma(\mathcal{R}^*), R, R^*) & & \end{array} \quad .$$

Corollaire 6.6.7. Pour que $\mathcal{R}$ soit simplement connexe, il faut et il suffit que $M = \Gamma(\mathcal{R})$.

Remarque 6.6.8. On a $\Gamma(\mathcal{R}) \cap M = \underline{V}(R) \cap M$. Pour que $\mathcal{R}$ soit semi-simple, il est donc nécessaire et suffisant que $M \subset \Gamma(\mathcal{R})$.

Des résultats de 6.5 il résulte aussi:

Corollaire 6.6.9. Pour que $\mathcal{R}$ soit produit d'une donnée simplement connexe par une donnée triviale, il faut et il suffit que $M \supset \Gamma(\mathcal{R})$.

Considérons maintenant l'isogénie canonique

$$f : ad(\mathcal{R}) \longrightarrow scon(\mathcal{R}) ,$$

et posons $Z(\mathcal{R}) = K(f)$. On a $Z(\mathcal{R}) \simeq Z(scon\,\mathcal{R}) \simeq Z(ad\,\mathcal{R})$.

Corollaire 6.6.10. On a un isomorphisme canonique $Z(\mathcal{R}) = \Gamma(\mathcal{R})/\Gamma_o(R)$. Plus précisément, on a une suite exacte de $W(\mathcal{R})$-modules :

$$0 \longrightarrow \Gamma_o(R) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{R}) \longrightarrow Z(\mathcal{R}) \longrightarrow 0 .$$

Corollaire 6.6.11. On a un accouplement canonique

$$Z(\mathcal{R}^*) \times Z(\mathcal{R}) \longrightarrow \underline{\underline{Q}}/\underline{\underline{Z}}$$

qui met ces groupes en dualité.

Remarque 6.6.12. On a $Z(\mathcal{R} \times \mathcal{R}') \simeq Z(\mathcal{R}) \times Z(\mathcal{R}')$. Considérons en particulier des données simplement connexes $\mathcal{R}_i$, $i=1,2,\ldots n$ et une donnée triviale $\mathcal{R}_o$. Posons $\mathcal{R} = \mathcal{R}_o \times \mathcal{R}_1 \times \ldots \times \mathcal{R}_n$. Soient $\mathcal{R} = (M, M^*, R, R^*)$, $\mathcal{R}_o = (M_o^*, M_o^*, \emptyset, \emptyset)$. On a

$$M/\Gamma_o(R) \simeq M_o \times Z(\mathcal{R}_1) \times \ldots \times Z(\mathcal{R}_n) .$$

6.7. Automorphismes .

Un automorphisme de $\mathcal{R}$, c'est, d'après 6.1.4 , un automorphisme de M , soit u , tel que $u(R) = R$, ${}^t u(R^*) = R^*$. En particulier, tout élément w de $W(\mathcal{R})$ définit un automorphisme de $\mathcal{R}$.

Lemme 6.7.1. $W(\mathcal{R})$ est un sous-groupe invariant de $\mathrm{Aut}(\mathcal{R})$. Plus précisément, si $u \in \mathrm{Aut}(\mathcal{R})$ et $r \in R$, on a

$$u \, s_r \, u^{-1} = s_{u(r)} \ .$$

La démonstration est la même que celle de 1.2.10.

Proposition 6.7.2. Soit S un système de racines simples. Posons

$$E_S(\mathcal{R}) = \left\{ u \in \mathrm{Aut}(\mathcal{R}) \ , \ u(S) = S \right\} \ .$$

Alors $\mathrm{Aut}(\mathcal{R})$ est le produit semi-direct de $W(\mathcal{R})$ par $E_S(\mathcal{R})$.

Cela résulte aussitôt de ce que $W(\mathcal{R})$ opère de façon simplement transitive sur les systèmes de racines simples et de ce que si S est un système de racines simples de R , alors $u(S)$ est un système de racines simples pour tout automorphisme u de $\mathcal{R}$.

Nous verrons plus tard une description plus simple de $E_S(\mathcal{R})$ dans le cas des données radicielles réduites et irréductibles.

Définition 6.7.3. On note $\mathrm{Aut}^S(\mathcal{R})$ l'ensemble des $u \in \mathrm{Aut}(\mathcal{R})$, tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R} & \xrightarrow{\ u\ } & \mathcal{R} \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \mathrm{rad}(\mathcal{R}) & \end{array} \ .$$

On note $E_S^s(\mathcal{R}) = E_S(\mathcal{R}) \cap \mathrm{Aut}^s(\mathcal{R})$.

Remarque 6.7.4. Si $u \in \mathrm{Aut}(\mathcal{R})$, on a donc $u \in \mathrm{Aut}^s(\mathcal{R})$ si et seulement si $(u - \mathrm{id.})(M) \subset \underline{V}(R)$. En particulier $W(\mathcal{R}) \subset \mathrm{Aut}^s(\mathcal{R})$. Il en résulte aussitôt:

Proposition 6.7.5. Le groupe $\mathrm{Aut}^s(\mathcal{R})$ est le produit semi-direct de $W(\mathcal{R})$ par $E_S^s(\mathcal{R})$, pour tout système de racines simples S .

A tout automorphisme de $\mathcal{R}$ est associé par fonctorialité un automorphisme de $\mathrm{ad}(\mathcal{R})$. On a donc un morphisme canonique

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{R}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathrm{ad}(\mathcal{R})).$$

Lemme 6.7.6. Le morphisme $\mathrm{Aut}^s(\mathcal{R}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathrm{ad}(\mathcal{R}))$ est injectif .

Soit en effet u un automorphisme de M tel que $(u - \mathrm{id})(M) \subset V(R)$ et que ${}^t u(r^*) = r^*$ pour $r^* \in R^*$. Pour tout $x \in M$, on a

$$(r^*, u(x) - x) = ({}^t u(r^*) - r^*, x) = 0 ,$$

donc $u(x) - x = 0$, par 1.2.5.

Lemme 6.7.7. Le groupe $\mathrm{Aut}^s(\mathcal{R})$ est fini .

En effet, il nous suffit de prouver que $\mathrm{Aut}(\mathcal{R})$ est fini si $\mathcal{R}$ est adjoint. Comme M est engendré alors par R , tout automorphisme de $\mathcal{R}$ est déterminé par la permutation de R qu'il définit.

Remarque 6.7.8. On voit aussitôt que $\mathrm{Aut}(\mathcal{R})$ (resp. $E_S(\mathcal{R})$) est fini si et seulement si $\mathrm{rgred}(\mathcal{R}) - \mathrm{rgss}(\mathcal{R}) \leq 1$.

6.8. p-morphismes de données radicielles réduites.

Dans ce n° p est un nombre entier > 0 fixé une fois pour toute.

Définition 6.8.1. Soient $\mathcal{R}=(M,M^*,R,R^*)$ et $\mathcal{R}'=(M',M'^*,R',R'^*)$ deux données radicielles réduites. On dit qu'un morphisme de groupes

$$f : M' \longrightarrow M$$

est un p-morphisme de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$, si les conditions suivantes sont vérifiées: il existe une bijection

$$u : R \xrightarrow{\sim} R'$$

et une application $q : R \longrightarrow \{p^n , n \in \underline{\mathbb{N}}\}$ telles que

(i) on a $f(u(r)) = q(r)\, r$ pour tout $r' \in R'$.

(ii) on a ${}^t f(r^*) = q(r)\, u(r)^*$ pour tout $r \in R$.

Corollaire 6.8.2. Un 1-morphisme n'est autre qu'un morphisme.

Corollaire 6.8.3. Le transposé d'un p-morphisme est un p-morphisme.

Lemme 6.8.4. Si $w \in W(\mathcal{R})$, $r \in R$, on a

$q(w(r)) = q(r)$. L'application $s_r \longmapsto s_{u(r)}$ se prolonge en un isomorphisme $\bar{u} : W(\mathcal{R}) \longrightarrow W(\mathcal{R}')$ tel que

$$u(\, w(r)) = \bar{u}(w)\big[u(r)\big] .$$

Il suffit de prouver que pour $r,s \in R$, on a $u(s_r(s)) = s_{u(r)}u(s)$ et $q(s_r(s)) = q(s)$. Or on a successivement :

$$\begin{aligned} f(s_{u(r)}u(s)) &= f(u(s)) - (u(r)^*,u(s))\, f(u(r)) \\ &= q(s)\, s - q(s)\, q(r)^{-1}\, (r^*,s)\, q(r) \\ &= q(s)\, (s - (r^*,s)\, r) = q(s)\, s_r(s) . \end{aligned}$$

Si $h = u^{-1}(s_{u(r)}u(s))$, on a donc $q(h).h = q(s).s_r(s)$. Les deux racines h et $s_r(s)$ sont donc proportionnelles (sur $\underline{\underline{Q}}$) , donc égales ou opposées , mais $q(h)$ et $q(s)$ sont positifs. On a donc $q(h) = q(s)$, $h = s_r(s)$.

Définition 6.8.5. Les $q(r)$ sont dits les exposants radiciels de f .

Exemple 6.8.6. Soit $\mathcal{R}$ une donnée radicielle réduite et $q = p^n$.

Alors $q : M \longrightarrow M$ ($q(x) = qx$) est un p-morphisme

$$q : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R} ,$$

dont tous les exposants radiciels sont égaux à q .

Proposition 6.8.7. Dans les notations de 6.8.1 , u réalise un isomorphisme de l'ensemble des systèmes de racines simples (resp. de racines positives) de R sur l'ensemble correspondant pour R' .

Cela résulte aussitôt de 3.1.5 (resp. 3.2.1).

7. Structure .

7.1. Décomposition d'une donnée radicielle.

Proposition 7.1.1. Soient $\mathcal{R}$ une donnée radicielle, S un système de racines simples.

(i) Soient R' et R" deux ensembles de racines clos et symétriques formant une partition de R . Si on note $S' = S \cap R'$, $S" = S \cap R"$, alors $R' = \underline{R}(S')$, $R" = \underline{R}(S")$, et toute racine de S' est orthogonale à toute racine de S".

(ii) Soient S' et S" deux sous-ensembles de S faisant une partition de S et orthogonaux. Alors $R' = \underline{R}(S')$ et $R" = \underline{R}(S")$ forment une partition de R .

Prouvons d'abord (i).

Lemme 7.1.2. Sous les conditions de (i) , si r, s et r+s sont racines, elles appartiennent toutes les trois à R' où toutes les trois à R" .

Supposons par exemple $r + s \in R'$. Alors on ne peut avoir $r,s \in R"$, car R" est clos; supposons donc $r \in R'$. Alors $-r \in R'$ et $s = (s + r) - r \in R'$

Montrons maintenant que $R' = \underline{R}(S')$ par récurrence sur l'ordre d'une racine $r \in R' \cap \underline{P}(S)$. Si $ord_S(r) = 1$, alors $r \in R' \cap S = S'$. Si $ord_S(r) > 1$, il existe $s \in S$ avec $r - s \in R$. Par le lemme, on a $s \in S'$, $r-s \in R'$, donc $r - s \in \underline{R}(S')$ par récurrence et enfin $r = (r-s)+s \in \underline{R}(S')$. Montrons enfin que S' et S" sont orthogonaux. Si $r \in S'$ et $s \in S"$, alors $(s^*,r) \leqslant 0$. Si $(s^*,r) \neq 0$, alors $s + r$ est racine contrairement au lemme.

Démontrons (ii) . Si S' où S" est vide, c'est immédiat. Sinon et si $\underline{R}(S')$ et $\underline{R}(S")$ ne forment pas une partition de R , il existe une racine r de la forme

$$r = \sum m'_i r'_i + \sum m"_j r"_j \quad , \quad m'_i \in \underline{Z}_+ \quad , \quad m"_j \in \underline{Z}_+ \quad ;$$

où on note r'_i (resp. $r"_j$) des éléments de S' (resp. S"). Appliquant 3.1.2., on en déduit une relation de la forme (quitte à inverser S' et S") :

$$u = v + s \quad , \quad v \in \underline{R}(S') \quad , \quad s \in S" \quad , \quad u \in R \; .$$

Mais comme $(s^*, v) = 0$, $v - s$ est aussi racine par 2.2.5 , ce qui est impossible.

Proposition 7.1.3. *Soit* $\mathcal{R}$ *une donnée radicielle. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Il n'existe pas de partition non triviale de* R *en deux sous-ensembles clos et symétriques.*

(ii) *Pour un (resp. tout) système de racines simples* S *de* R , *il n'existe pas de partition de* S *en deux sous-ensembles non vides orthogonaux.*

(iii) *La représentation naturelle de* $W(\mathcal{R})$ *dans* $\underline{V}(R)$ *est irréductible.*

(iv) *Pour tout couple* (r,s) *de racines, il existe une suite de racines* $r_0, r_1, r_2, \ldots, r_n$, *avec* $r = r_0$, $r_n = s$, *les racines* r_i *et* r_{i+1} $(i = 0, \ldots, n-1)$ *étant non orthogonales.*

On a (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) par 7.1.1. On a évidemment (iv) $\Longrightarrow$ (ii) . Réciproquement, si (ii) est vérifiée pour S , la condition (iv) est vérifiée si $r, s \in S$. Or pour toute racine , il existe une racine simple qui ne lui soit pas orthogonale (3.1.1 par exemple). D'autre part (iii) $\Longrightarrow$ (i) . En effet sous les conditions

de 7.1.1 , $\underline{V}(R')$ est stable par $W(\mathcal{R})$. Il reste à prouver (i) $\Rightarrow$ (iii) . Soit donc H un sous-espace vectoriel de $\underline{V}(R)$, stable par $W(\mathcal{R})$. Pour tout $r \in R$, l'équation $s_r(H) = H$ donne aussitôt $r \in H$, ou $r^* \in H^0$ (orthogonal de H dans $\underline{V}(R^*)$ en dualité avec $\underline{V}(R)$). Si on pose $R' = \{ r \in R , r \in H \}$ et $R'' = \{ r \in R , r^* \in H^0 \}$, on a réalisé une partition de R en deux sous-ensembles clos et symétriques.

Définition 7.1.4. Une donnée radicielle (resp. un système de racines) vérifiant les conditions équivalentes de 7.1.3 et de rang semi-simple $\neq 0$ est dite irréductible.

Corollaire 7.1.5. Pour toute donnée radicielle $\mathcal{R}$, il existe une partition unique (à l'ordre près) de R en sous-ensembles clos, symétriques et irréductibles.

Corollaire 7.1.6. Toute donnée radicielle adjointe (resp. simplement connexe) est produit de données radicielles adjointes (resp. simplement connexes) irréductibles.

Il suffit de le voir dans le cas adjoint. L'assertion résulte alors de ce que sous les conditions de 7.1.1 , on a

$$\Gamma_0(R) = \Gamma'_0(R') \times \Gamma_0(R'') \quad .$$

Corollaire 7.1.7. Pour toute donnée radicielle (resp. et réduite) $\mathcal{R}$, il existe une isogénie $\mathcal{R} \to \mathcal{R}'$, où $\mathcal{R}'$ est produit d'une donnée radicielle triviale et de données simplement connexes irréductibles (resp. et réduites).

7.2. Propriétés des données radicielles irréductibles.

Définition 7.2.1. Soit $\mathcal{R}$ une donnée radicielle irréductible. On pose pour tout $r \in R$,

$$\text{long}(r) = \ell(r)/\ell(r_o) ;$$

où $r_o \in R$ est telle que $\ell(r_o)$ soit minimum ; on dit que long(r) est la longueur de r.

Lemme 7.2.2. Soit $\mathcal{R}$ une donnée radicielle irréductible. Le groupe de Weyl opère transitivement dans l'ensemble des racines de même longueur.

En effet, soient $r,s \in R$. Comme la représentation de W dans $V(R)$ est irréductible, r ne peut être orthogonale à tous les $w(s)$, $w \in W$. Il existe donc $w \in W$, avec $w(s)$ non orthogonale à r, Or $\ell(w(s)) = \ell(s)$ et on conclut par 2.3.2.

Lemme 7.2.3. Si $\mathcal{R}$ est irréductible et réduite, alors long(R) est $\{1\}$, $\{1,2\}$, où $\{1,3\}$.

En vertu de la remarque utilisée ci-dessus, pour tout $r,s \in R$, il existe toujours un $w \in W$ tel que $w(s)$ ne soit pas orthogonale à s. On a donc $\ell(r)/\ell(s) = 1,2,3,1/2$ ou $1/3$ (par 2.3.1). On a donc $\text{long}(r) = 1,2$ ou 3, mais si $\text{long}(r) = 2$, $\text{long}(s) = 3$, alors $\ell(r)/\ell(s) = 2/3$, ce qui est impossible.

Remarque 7.2.4. En raisonnant de manière semblable, on prouve le résultat suivant ; si R est irréductible et non réduit avec $\text{rgss}(R) > 1$, on a $\text{long}(R) = \{1,2,4\}$. Si on pose $\text{long}^{-1}(i) = R_i$, alors $\text{ind}(R) = R_1 \cup R_2$, $R_4 = 2R_1$ et deux racines non proportionnelles de R_1 sont orthogonales. Réciproquement si R est un système irréductible et réduit tel que $\text{long}(R) = \{1,2\}$, posons $\text{long}^{-1}(i) = R_i$ et supposons que deux racines non proportionnelles de R_1 soient orthogonales ; alors $R \cup 2R_1$ est irréductible, non réduit et $\text{ind}(R \cup 2R_1) = R$.

Lemme 7.2.5. Si $\mathcal{R}$ est une donnée radicielle irréductible, $\mathcal{R}^*$ l'est aussi et $\mathrm{long}(r)\ \mathrm{long}(r^*) = \mathrm{Cte}$.

Cela résulte aussitôt de 7.1.3 (iv) et 2.2.6.

Définition 7.2.6. Soit $\mathcal{R}$ une donnée radicielle quelconque. On appelle longueur de $r \in R$ et on note $\mathrm{long}(r)$ la longueur de r dans sa composante irréductible.

Lemme 7.2.7. Il existe un unique homomorphisme de groupes $u: \Gamma_o(R) \to \Gamma_o(R^*)$ tel que $u(r) = \mathrm{long}(r)\ r^*$ pour $r \in R$.

En vertu de 3.5.5 , il suffit de vérifier que si r,s , $r+s \in R$, on a $\mathrm{long}(r)\ r^* + \mathrm{long}(s)\ s^* = \mathrm{long}(r+s)(r+s)$. Mais r,s et $r+s$ sont dans la même composante irréductible de R par 7.1.2 et on est ramené à 1.2.2.

Remarque 7.2.8. Pour $r,s \in R$, on a $(u(r),s) = (u(s),r)$. En effet, cela revient à

$$\mathrm{long}(r)\ (r^*,s) = \mathrm{long}(s)\ (s^*,r)$$

qui est évidemment vérifiée si r et s sont orthogonales. Si r et s ne sont pas orthogonales, alors elles sont dans la même composante irréductible de R , et on est ramené à 1.2.1 , formule (9).

Remarque 7.2.9. La forme bilinéaire symétrique $(u(x),y)$ est positive non dégénérée sur $\Gamma_o(R)$.

En effet, soient R_i les composantes irréductibles de R . On a

$$\Gamma_o(R) = \prod \Gamma_o(R_i) \ ,$$

et la forme bilinéaire $(u(x),y)$ est le produit des formes

$$2^{-1}\ell(r_i)^{-1}\ (p(x),y)$$

sur les $\Gamma_o(R_i)$, où $\ell(r_i)$ est le minimum de $\ell(r)$ pour $r \in R_i$. Or ces différentes formes bilinéaires symétriques sont positives non dégénérées (1.2.6).

7.3. Matrice de Cartan.

Soit $\mathcal{R}$ une donnée radicielle. Si S est un système de racines simples, on appelle matrice de Cartan de $\mathcal{R}$ relativement à S la matrice carrée sur l'ensemble d'indices S définie par

$$a_{rs} = (r^*, s) \quad ; \quad r, s \in S \ .$$

Remarquons d'abord que si S' est un autre système de racines simples et w un élément de $W(\mathcal{R})$ tel que $w(S) = S'$, on a

$$(w(r)^*, w(s)) = (r^*, s) \ ,$$

donc que la matrice de Cartan de $\mathcal{R}$ relativement à S' s'obtient à partir de celle relative à S par l'isomorphisme $S \longrightarrow S'$ sur l'ensemble d'indices défini par w . Il en résulte qu'à un isomorphisme près sur l'ensemble d'indices, la matrice de Cartan ne dépend que de $\mathcal{R}$.

Proposition 7.3.1. La matrice de Cartan possède les propriétés suivantes :

(i) $a_{rr} = 2$, $a_{rs} \leqslant 0$ pour $r \neq s$.

(ii) $a_{rs} = 0$ entraîne $a_{sr} = 0$.

(iii) Il existe des entiers strictement positifs $m_r (= \mathrm{long}(r))$ tels que la matrice

$$(m_r \quad a_{rs})$$

soit symétrique, positive et non dégénérée.

(iv) Les mineurs diagonaux de a_{rs} , i.e. les déterminants

$$\det(a_{rs})_{r,s \in S'} \quad \text{pour} \quad S' \subset S ,$$

sont strictement positifs.

(v) On a $s_r(s) = s - a_{rs}\, r$, $s_r(s^*) = s^* - a_{sr}\, r^*$.

En effet, (v) est une définition, (i) résulte de 3.2.11. , (ii) de 2.2.2 , (iii) de 7.2.9 (iv) se déduit aussitôt de (iii) par la relation

$$\det(m_r\, a_{rs})_{r,s \in S'} = \prod_{r \in S'} m_r \cdot \det(a_{rs})_{r,s \in S'} .$$

Proposition 7.3.2. Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ deux données radicielles simplement connexes (resp. adjointes) et réduites.

Soient S (resp. S') un système de racines simples de $\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{R}'$) , et $u : S \longrightarrow S'$ un isomorphisme tel que si on note (a_{rs}) et $(a'_{r's'})$ les matrices de Cartan de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ relativement à S et S' , on ait

$$a'_{u(r),u(s)} = a_{r,s} ;$$

il existe un unique isomorphisme de $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{R}'$ qui induise u sur S .

Il suffit évidemment de faire la démonstration dans le cas adjoint . Alors $M = \Gamma_o(R)$ et $M' = \Gamma_o(R')$ sont les groupes abéliens libres engendrés par S et S' . Il existe donc un unique isomorphisme de groupes de M sur M' qui induise u sur S . Notons-le aussi u . Montrons que $u(R) \subset R'$. Toute racine r de $\mathcal{R}$ s'écrit $s_{r_1} \cdots\cdots s_{r_n}(r_{n+1})$ avec $r_i \in S$. On a évidemment

$$u(r) = s_{u(r_1)} \cdots s_{u(r_n)}(u(r_{n+1})) ,$$

en vertu de l'hypothèse sur u et des relations (v) de 7.3.1.

Il reste à prouver que ${}^t u(R'^*) \subset R^*$, ce qui résulte de ce que les éléments

de M^* (resp. M'^*) sont déterminés par la dualité avec R ou S (resp. R' ou S'), par 1.2.5.

Corollaire 7.3.3. Une donnée radicielle réduite simplement connexe ou adjointe est déterminée à isomorphisme près par sa matrice de Cartan.

Corollaire 7.3.4. Soient $\mathcal{R}$ une donnée radicielle réduite et simplement connexe (resp. adjointe), et S un système de racines simples. Le groupe $E_S(\mathcal{R})$ s'identifie au groupe des automorphismes de l'ensemble S qui invarient la matrice de Cartan.

Remarque 7.3.5. La question de l'existence d'une donnée radicielle correspondant à une matrice de Cartan donnée vérifiant (i) (ii) et (iv) (par exemple) ne se résoud pas facilement directement, sans utiliser la classification.

7.4. Diagrammes de Dynkin.

Définition 7.4.1. On appelle structure de diagramme de Dynkin (le mot "schéma" a été banni pour des raisons évidentes) sur un ensemble fini S la donnée d'un ensemble de couples d'éléments distincts de S, dits couples liés, et d'une application de S dans l'ensemble $\{1,2,3\}$. La notion d'isomorphisme de telles structures est évidente.

Définition 7.4.2. Soient $\mathcal{R}$ une donnée radicielle et S un système de racines simples. On appelle diagramme de Dynkin de $\mathcal{R}$ relativement à S, l'ensemble S,

deux racines simples étant liées si et seulement si elles ne sont pas orthogonales, à chaque racine étant associée sa longueur.

Proposition 7.4.3. Diagramme de Dynkin et matrice de Cartan se déterminent biunivoquement.

En effet l'équivalence

$$r \text{ et } s \text{ ne sont pas liés} \iff a_{rs} = 0 ,$$

et la relation

$$\text{long}(r)\, a_{rs} = \text{long}(s)\, a_{sr} ,$$

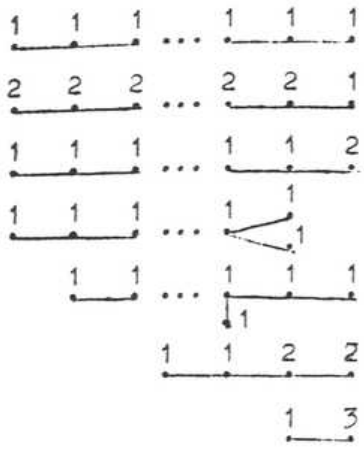
(avec $\inf \text{long}(r) = 1$ dans chaque composante connexe du diagramme) déterminent les a_{rs} en fonction des liaisons et des longueurs, et réciproquement (le détail de la vérification est laissé au lecteur).

Corollaire 7.4.4. Une donnée radicielle réduite simplement connexe ou adjointe est déterminée par son diagramme de Dynkin.

Corollaire 7.4.5. Soient $\mathcal{R}$ une donnée radicielle réduite simplement connexe ou adjointe et S un système de racines simples. Le groupe $E_S(\mathcal{R})$ s'identifie au groupe des automorphismes du diagramme de Dynkin de $\mathcal{R}$ relativement à S, c'est-à-dire au groupe des permutations de S conservant les longueurs et les liaisons.

Remarque 7.4.6. On classifie avec la méthode habituelle (*) les divers diagrammes de Dynkin connexes, et on montre que chacun correspond effectivement à une donnée radicielle réduite simplement connexe irréductible. On trouve les types bien connus

(*) Confer Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, chap. VI, ou Séminaire Sophus L



A_n , $n \geqslant 1$.

B_n , $n \geqslant 2$.

C_n , $n \geqslant 3$.

D_n , $n \geqslant 4$.

E_n , $n = 6,7,8$.

F_4 .

G_2 .

Par 7.4.5 , on trouve aussitôt le groupe $E_S(\mathcal{R})$ correspondant ; on a :

$E_S(\mathcal{R}) = \{e\}$ pour A_1 , B_n , C_n , E_7 , E_8 , F_4 , G_2 .

$E_S(\mathcal{R}) = \underline{\underline{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}}$ pour A_n $(n \geqslant 2)$, D_n $(n \geqslant 5)$, E_6 .

$E_S(\mathcal{R}) = \mathfrak{S}_3$ pour D_4 .

7.5. Compléments sur les p-morphismes.

Il est clair sur les définitions que la bijection $u : R \xrightarrow{\sim} R'$ associée à un p-morphisme (6.8) fait se correspondre systèmes de racines simples, systèmes de racines positives, composantes irréductibles (etc) de R et de R' . Supposons donc pour simplifier R et R' irréductibles.

Lemme 7.5.1. Si R et R' sont irréductibles, alors il existe $k \in \underline{\underline{\mathbb{Q}}}$ avec pour tout $r \in R$

$$k \, \mathrm{long}(u(r)) = q(r)^2 \, \mathrm{long}(r) .$$

En effet, on a

$$\mathrm{long}(r)\ (r^*,s) \;=\; \mathrm{long}(s)\ (s^*,r)\ ,$$

$$\mathrm{long}(u(r))(u(r)^*,u(s)) \;=\; \mathrm{long}(u(s))\ (u(s)^*,u(r))\ .$$

On en déduit aussitôt que pour r et s non orthogonales, on a

$$\mathrm{long}(u(r))^{-1}\ q(r)^2\ \mathrm{long}(r) \;=\; \mathrm{long}(u(s))^{-1}\ q(s)^2\ \mathrm{long}(s)\ .$$

On conclut alors par 7.1.3.

Remarque 7.5.2. Il résulte de 7.2.2 et 6.8.4 que $q(r)$ ne dépend que de $\mathrm{long}(r)$. On voit alors facilement que si $q(r)$ n'est pas constant, alors $q(r)\ \mathrm{long}(r)$ est constant, ce qui montre qu'alors $p = 2$ ou 3. Un coup d'oeil sur les diagrammes du n° précédent montre qu'il y a quatre cas possibles :

$p = 2$, $B_n \xrightarrow{\alpha} C_n$, $C_n \xrightarrow{\beta} B_n$ avec $(B_2 = C_2)$.

$p = 2$, $F_4 \xrightarrow{\gamma} F_4$.

$p = 3$, $G_2 \xrightarrow{\delta} G_2$.

(On désigne par la même lettre un diagramme de Dynkin et la donnée radicielle simplement connexe réduite correspondante). Le lecteur remarquera que $\alpha \circ \beta$, $\beta \circ \alpha$, $\gamma \circ \gamma$ et $\delta \circ \delta$ sont des p-morphismes de la forme décrite en 6.8.6.

7.5.3. On voit aussitôt sur la description précédente que si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont deux données radicielles réduites de rang semi-simple $\leqslant 2$ et si on a un p-morphisme de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$, alors $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont de même type. Plus précisément, on a le tableau suivant.

Notations : $f : \mathcal{R}' \longrightarrow \mathcal{R}$ p-morphisme. On désigne par q (resp. q_1) une puissance positive quelconque de p. On utilise pour les systèmes de rang 2 les notations du n° 4 (on désigne par r une racine simple courte).

Type	p	valeurs de f	valeurs de ${}^t f$
Trivial	quelconque	-	-
A_1	quelconque	$f(r') = q\,r$	${}^t f(r^*) = q\,r'^*$
$A_1 + A_1$	quelconque	$f(r') = q\,r$ $f(s') = q_1 s$	${}^t f(r^*) = q\,r'^*$ ${}^t f(s^*) = q_1\,s'^*$
A_2 , B_2 G_2	quelconque	$f(r') = q\,r$ $f(s') = q\,s$	${}^t f(r^*) = q\,r'^*$ ${}^t f(s^*) = q\,s'^*$
B_2	$p = 2$	$f(r') = q\,s$ $f(s') = 2\,q\,r$	${}^t f(r^*) = 2\,q\,s'^*$ ${}^t f(s^*) = q\,r'^*$
G_2	$p = 3$	$f(r') = q\,s$ $f(s') = 3\,q\,r$	${}^t f(r^*) = 3\,q\,s'^*$ ${}^t f(s^*) = q\,r'^*$

Exposé XXII

GROUPES RÉDUCTIFS : DÉPLOIEMENTS, SOUS-GROUPES, GROUPES-QUOTIENTS

par M. DEMAZURE

Cet exposé comporte deux parties. La première (1 à 5.5) rassemble les résultats techniques nécessaires à la démonstration des théorèmes d'unicité et d'existence. La seconde (5.6 à la fin) ne sera pas utilisée dans cette démonstration; la fin du n° 5 sera utilisée en particulier dans l'exposé XXVI consacré aux sous-groupes paraboliques; le n° 6 établit dans le cadre des schémas les résultats classiques sur le groupe dérivé d'un groupe réductif.

***

1. Racines et coracines. Groupes déployés et données radicielles.

Théorème 1.1. Soient S un préschéma , G un S-groupe réductif, T un tore maximal de G , r une racine de G par rapport à T .

(i) Il existe un unique morphisme de groupes à groupe d'opérateurs T

$$\exp_r : W(\mathfrak{g}^r) \longrightarrow G$$

qui induise sur les Algèbres de Lie le morphisme canonique $\mathfrak{g}^r \longrightarrow \mathfrak{g}$.

Ce morphisme est une immersion fermée. Le morphisme correspondant

$$T \cdot_r W(\mathcal{O}_S^r) \longrightarrow G$$

est également une immersion fermée. Si $p_r : \underline{G}_{a\,S} \longrightarrow G$ est un monomorphisme normalisé par T avec le multiplicateur r, il existe un unique $X_r \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S^r)^*$ tel que $p_r(x) = \exp_r(x\, X_r)$; on a $\mathrm{Lie}(p_r)(1) = X_r$ et les deux formules précédentes établissent une correspondance bijective entre $\Gamma(S, \mathcal{O}_S^r)^*$ et l'ensemble des monomorphismes $\underline{G}_{a\,S} \longrightarrow G$ normalisés par T avec le multiplicateur r.

(ii) Il existe une dualité unique (notée $(X,Y) \longmapsto XY$)

$$\mathcal{O}_S^r \otimes_{\underline{O}_S} \mathcal{O}_S^{-r} \xrightarrow{\sim} \underline{O}_S ,$$

et un unique morphisme de groupes

$$r^* : \underline{G}_{m\,S} \longrightarrow T ,$$

tels que l'on ait la formule (F) de Exp. XX 2.1. On a

$$r \circ r^* = 2 , \quad (-r)^* = -r^* ,$$

et r^* est donné par la formule de Exp. XX 2.7.

En effet, un morphisme normalisé par T avec le multiplicateur r se factorise nécessairement par le sous-groupe fermé $Z_r = \mathrm{Cent}_G(T_r)$ de G (cf. Exp. XIX 3.9). Or (Z_r, T, r) est un S-système élémentaire (Exp. XX 1.4), et on est ramené aux résultats de l'exposé XX (1.5 , 2.1 et 5.9).

Remarque 1.2. La partie (i) du théorème 1.1 reste valable si on suppose seulement que r est un caractère de T, non trivial sur chaque fibre. En effet, on a alors une décomposition $S = S' \amalg S''$, telle que $r|S'$ soit une racine de $G_{S'}$, par rapport à $T_{S'}$, et $\mathcal{O}_S^r|S'' = 0$. Si $S = S'$, on est ramené à 1.1 ; si $S = S''$ le résultat est trivial; le cas général s'en déduit aussitôt.

Notations 1.3. Comme dans l'exposé XX, on note P_r l'image de $W(\mathfrak{g}^r)$; c'est un sous-groupe fermé de G, muni canoniquement d'une structure vectorielle. On dira que c'est le groupe vectoriel associé à la racine r. On dit que r^* est la coracine associée à r. Des sections $X_r \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^r)$ et $X_{-r} \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^{-r})$ sont dites appariées si $X_r X_{-r} = 1$. Alors $X_r \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^r)^*$ et de même pour X_{-r}. Les morphismes p_r et p_{-r} correspondants sont contragrédients l'un de l'autre et on a

$$p_r(x)\ p_{-r}(y) = p_{-r}\left(\frac{y}{1+xy}\right)\ r^*(1+xy)\ p_r\left(\frac{x}{1+xy}\right) .$$

Proposition 1.4. Sous les conditions de 1.1, soit $w \in \mathrm{Norm}_G(T)(S)$. Alors $r' = r \circ \mathrm{int}(w)^{-1} : T \to \mathbb{G}_{m\,S}$ est une racine de G par rapport à T, $r'^* = \mathrm{int}(w) \circ r^*$ est la coracine correspondante, et le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} W(\mathfrak{g}^r) & \xrightarrow{\exp_r} & G \\ {\scriptstyle \mathrm{Ad}(w)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{int}(w)} \\ W(\mathfrak{g}^{r'}) & \xrightarrow[\exp_{r'}]{} & G \end{array} .$$

Trivial : transport de structure.

Définition 1.5. Sous les conditions de 1.1 on note s_r l'automorphisme de T défini par

$$s_r(t) = t \cdot r^*(r(t))^{-1} .$$

Alors s_r opère dans $\mathrm{Hom}_{S\text{-gr}}(T, \mathbb{G}_{m\,S})$, resp. $\mathrm{Hom}_{S\text{-gr}}(\mathbb{G}_{m\,S}, T)$ par les formules

$$s_r(m) = m - (r^*, m)\ r$$
$$s_r(u) = u - (u, r)\ r^* ,$$

où m (resp. u) désigne une section arbitraire de $\underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr}}(T, \underline{G}_{m\,S})$ (resp. $\underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr}}(\underline{G}_{m\,S}, T)$) et (,) l'accouplement canonique

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr}}(\underline{G}_{m\,S}, T) \times \underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr}}(T, \underline{G}_{m\,S}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr}}(\underline{G}_{m\,S}, \underline{G}_{m\,S}) = \underline{Z}_S \ .$$

On a $s_r \circ s_r = \mathrm{id}.$, $s_{-r} = s_r$.

Si $X \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^r)^*$, alors l'automorphisme intérieur de T défini par $w_r(X) = \exp_r(X) \exp_{-r}(-X^{-1}) \exp_r(X)$ (Exp. XX 3.1) coïncide avec s_r (loc. cit.) On conclut alors de 1.4:

Corollaire 1.6. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, T un tore maximal de G , r et r' deux racines de G par rapport à T . Alors

$$s_r(r') = r' - (r^*, r')\, r$$

est une racine de G par rapport à T , la coracine correspondante étant

$$s_r(r')^* = s_r(r'^*) = r'^* - (r'^*, r)\, r^* \ .$$

Corollaire 1.7. Sous les conditions précédentes, $r^* = r'^*$ implique $r = r'$.

En effet, si $r^* = r'^*$, on a

$$s_{r'}(r) = r - 2r' \ , \quad s_r(r') = r' - 2r \ ,$$

et on en déduit aussitôt

$$(s_{r'}\, s_r)^n (r) = r + 2n(r' - r) \ .$$

Si $r' \neq r$, il existe un $s \in S$ avec $r_s \neq r'_s$. Mais alors la formule précédente montre qu'il existe une infinité de racines distinctes de $G_{\overline{s}}$ par rapport à $T_{\overline{s}}$, ce qui est impossible.

Si $u : \underline{G}_{m\,S} \longrightarrow T$ est un morphisme de groupes, on dira que u est une coracine de G par rapport à T, s'il existe une racine r de G par rapport à T telle que $r^* = u$. Considérons le foncteur $\mathcal{R}^*$ des coracines de G par rapport à T défini comme suit :

$\mathcal{R}^*(S')$ = ensemble des coracines de $G_{S'}$ par rapport à $T_{S'}$.

Si $\mathcal{R}$ est le foncteur des racines de G par rapport à T (Exp. XIX 3.8.), on a un morphisme canonique $\mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}^*$. En vertu de 1.7 et de Exp. XIX 3.8, on a :

Corollaire 1.8. Le morphisme canonique $\mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}^*$ est un isomorphisme. En particulier, $\mathcal{R}^*$ est représentable par un S-préschéma fini constant tordu qui est un sous-préschéma ouvert et fermé de $\mathrm{Hom}_{S\text{-gr}}(\underline{G}_{m\,S}, T)$.

Ceci conduit à poser la définition suivante :

Définition 1.9. Soient S un préschéma, T un S-tore. On appelle donnée radicielle tordue dans T la donnée :

(i) d'un sous-schéma fini $\mathcal{R}$ de $\mathrm{Hom}_{S\text{-gr}}(T, \underline{G}_{m\,S})$,

(ii) d'un sous-schéma fini $\mathcal{R}^*$ de $\mathrm{Hom}_{S\text{-gr}}(\underline{G}_{m\,S}, T)$,

(iii) d'un isomorphisme $\mathcal{R} \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}^*$ noté $r \longmapsto r^*$,

vérifiant les conditions suivantes :

(DR 1) Pour tout $S' \longrightarrow S$ et tout $r \in \mathcal{R}(S')$, on a

$$r \circ r^* = 2 .$$

(DR 2) Pour tout $S' \longrightarrow S$ et tous $r, r_1 \in \mathcal{R}(S')$, on a

$$r - (r_1^*, r)\, r_1 \in \mathcal{R}(S') ,$$

$$r^* - (r^*, r_1)\, r_1^* \in \mathcal{R}(S') .$$

De plus, si $r \in \mathcal{R}(S')$ $(S' \neq \emptyset)$ entraîne $2r \notin \mathcal{R}(S')$, on dit que la donnée radicielle est réduite.

Proposition 1.10. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, T un tore maximal de G, $\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{R}^*$) le schéma des racines (resp. des coracines) de G par rapport à T. Alors $(\mathcal{R}, \mathcal{R}^*)$ est une donnée radicielle tordue réduite dans T.

Le seul fait qui reste à vérifier est que cette donnée radicielle tordue est réduite. C'est ce qu'on a fait en Exp. XIX 3.10.

1.11. Soit $T = D_S(M)$ un tore trivialisé. Si on note M^* le groupe abélien dual de M, on a des isomorphismes canoniques

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr}}(T, \underline{G}_{m\,S}) \xrightarrow{\sim} M_S$$
$$\underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr}}(\underline{G}_{m\,S}, T) \xrightarrow{\sim} M^*_S \quad ,$$

(Exp. VIII 1.5), donc des isomorphismes de groupes

$$\mathrm{Hom}_{S\text{-gr}}(T, \underline{G}_{m\,S}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\text{loc.const.}}(S, M) \quad ,$$
$$\mathrm{Hom}_{S\text{-gr}}(\underline{G}_{m\,S}, T) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\text{loc.const.}}(S, M^*) \quad .$$

Un caractère de T (resp. un morphisme de groupes $\underline{G}_{m\,S} \longrightarrow T$) sera dit constant (relativement à la trivialisation donnée) si l'isomorphisme précédent le transforme en une application constante de S dans M (resp. M^*).

1.12. Sous les mêmes notations, soit (M, M^*, R, R^*) une donnée radicielle (Exp. XXI). Alors (R_S, R^*_S) est une donnée radicielle tordue dans T. Réciproquement, si $(\mathcal{R}, \mathcal{R}^*)$ est une donnée radicielle tordue dans un tore T, on appellera

déploiement de cette donnée radicielle la donnée d'une donnée radicielle habituelle (M,M^*,R,R^*) et d'un isomorphisme $T \simeq D_S(M)$ qui transforme (R,R^*) en (R_S,R_S^*).

Définition 1.13. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, T un tore maximal de G. On appelle déploiement de G relativement à T la donnée

(i) d'un groupe abélien M et d'un isomorphisme $T \simeq D_S(M)$,

(ii) d'un système de racines R de G par rapport à T (Exp. XIX 3.6),

vérifiant les deux conditions suivantes :

(D_1) S est non vide et les racines $r \in R$ (resp. les coracines correspondantes) s'identifient à des fonctions constantes de S dans (resp. M^*).

(D_2) Les $\mathfrak{g}^r$ $(r \in R)$ sont des O_S-Modules libres.

On dit que G est déployable relativement à T s'il existe un déploiement de G relativement à T. On appelle déploiement de G la donnée d'un tore maximal T de G et d'un déploiement de G par rapport à T. On dit que G est déployable s'il existe un déploiement de G. On appelle S-groupe déployé un S-groupe réductif muni d'un déploiement; on le notera par un symbole du type (G,T,M,R), ou simplement G s'il n'y a pas de confusion possible.

La condition (D 1) entraîne que R (resp. R^*) s'identifie canoniquement à une partie de M (resp. M^*).

Proposition 1.14. Soient S un préschéma (non vide), (G,T,M,R) un S-groupe déployé, alors

$$\mathcal{R}(G,T,M,R) = (M,M^*,R,R^*)$$

est une donnée radicielle réduite (Exp. XXI 1.1 et 2.1.3); c'est un déploiement de la donnée radicielle tordue de 1.10.

C'est une conséquence triviale de 1.10 et de Exp. XIX 3.7.

Nous noterons parfois pour simplifier $\mathcal{R}(G,T,M,R) = \mathcal{R}(G)$. Nous utiliserons systématiquement les notations V , $\underline{V}(R)$, W ,... de Exp. XXI.

Remarques 1.15. a) Si S est connexe non vide (resp. si Pic(S) = 0) la condition (D 1) (resp. (D 2)) est automatiquement vérifiée.

b) Si (G,T,M,R) est un S-groupe déployé, pour tout $S' \to S$, $S' \neq \emptyset$, $(G_{S'},T_{S'},M,R)$ est un S'-groupe déployé et $\mathcal{R}(G,T,M,R) = \mathcal{R}(G_{S'},T_{S'},M,R)$.

1.16. Soit $T = D_S(M)$ un tore trivialisé. L'Algèbre de Lie $\mathfrak{t}$ de T s'identifie canoniquement (Exp. II 5.1 , cor.) à

$$\mathfrak{t} \simeq M^* \otimes \underline{O}_S \ .$$

Pour tout morphisme de groupes $u : T \to \underline{G}_{m\,S}$, $\underline{Lie}(u)$ est une forme linéaire

$$\underline{Lie}(u) : \mathfrak{t} \to \underline{O}_S = \underline{Lie}(G_{m\,S}/S) \ .$$

En particulier, si u est défini par un élément $r \in M$, alors $\underline{Lie}(u)$ est la forme linéaire $\overline{r}$ sur $M^* \otimes \underline{O}_S$ définie par r :

$$\overline{r}(m \otimes x) = (m,r)\,x \ .$$

Symétriquement, pour tout morphisme de groupes $h : \underline{G}_{m\,S} \to T$, $\underline{Lie}(h)$ est un $\underline{O}_S$-morphisme $\underline{O}_S = \underline{Lie}(G_{m\,S}/S) \to \mathfrak{t}$, défini canoniquement par la section

$$H = \underline{Lie}(h)(1) \in \Gamma(S,\mathfrak{t}) \ .$$

En particulier, si h est défini par un élément $m \in M^*$, on a

$$H = \underline{Lie}(h)(1) = m \otimes 1 .$$

Comparant les deux définitions, on trouve en particulier

$$\overline{r}(H) = (h,r) \cdot 1 \in \Gamma(S, \underline{O}_S) .$$

1.17. Ces définitions s'appliquent en particulier au cas où T est le tore maximal d'un groupe déployé. Toute racine $r \in R$ définit une <u>racine infinitésimale</u> $\overline{r} \in \mathrm{Hom}_{\underline{O}_S}(\mathfrak{t}, \underline{O}_S)$ avec

$$\overline{r}(m \otimes x) = (m,r)\, x .$$

Chaque coracine $r \in R$ définit une <u>coracine infinitésimale</u>

$$H_r \in \Gamma(S, \mathfrak{t}) , \quad H_r = r^* \otimes 1 .$$

On a pour $r, s \in R$, la relation

$$\overline{r}(H_s) = (s^*, r) \cdot 1 ,$$

et en particulier

$$\overline{r}(H_r) = 2 .$$

En particulier, si 2 est inversible sur S, $\overline{r}$ et H_r sont non nuls sur chaque fibre.

2. Existence d'un déploiement . Type d'un groupe réductif .

Proposition 2.1. *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-groupe réductif ,* T *un tore maximal de* G . *Supposons* T *trivial . Alors* G *est localement déployable par rapport à* T : *pour tout* $s_o \in S$, *il existe un voisinage ouvert* U *de* s_o *tel que le* U*-groupe* G_U *soit déployable relativement à* T_U .

En effet , écrivons $T \simeq D_S(M)$ et

$$\mathcal{G} = \coprod_{m \in M} \mathcal{G}^m \quad .$$

Soit $R = \{ m \in M , m \neq 0 , \mathcal{G}^m(s_o) \neq 0 \}$. Quitte à restreindre S et à le remplacer par un voisinage ouvert de s_o , on peut supposer les $\mathcal{G}^r$, $r \in R$, libres, et les $\mathcal{G}^m$, $m \neq 0$, $m \notin R$, nuls. On a alors

$$\mathcal{G} = \mathcal{L} \oplus \coprod_{r \in R} \mathcal{G}^r \quad ,$$

les $\mathcal{G}^r$ étant libres de rang un. Il en résulte que R est un système de racines de G par rapport à T (Exp. XIX 3.6). Les coracines r^* correspondant aux $r \in R$ s'identifient alors à des fonctions localement constantes sur S à valeurs dans M^* . En restreignant encore S , on peut les supposer constantes et on a terminé.

Notons que la démonstration donne aussitôt :

Proposition 2.2. *Soit* S *un préschéma* connexe *non vide tel que* $Pic(S) = 0$, *par exemple* $Spec(\underline{Z})$ *ou un schéma local* (*en particulier le spectre d'un corps*). *Si* G *est un* S*-groupe réductif possédant un tore maximal trivial* T , *alors* G *est déployable relativement à* T .

On déduit aussitôt de 2.1 et du fait qu'un groupe réductif possède localement des tores maximaux pour la topologie étale (Exp. XIX 2.5) :

Corollaire 2.3. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif (resp. et T un tore maximal de G). Alors G est localement déployable (resp. localement déployable relativement à T) pour la topologie étale sur S .

Corollaire 2.4. Soient k un corps, G un k-groupe réductif. Il existe une extension séparable finie K/k telle que G_K soit déployable.

Remarque 2.5. En utilisant 2.1 et Exp. XIX 2.9 , on prouve aussitôt le résultat suivant : soit $G = (G,T,M,R)$ un S-groupe déployé; il existe un recouvrement de S par des ouverts U_i tel que chaque groupe déployé G_{U_i} provienne par changement de base d'un groupe déployé sur un anneau noethérien (et en fait une $\underline{\underline{Z}}$-algèbre de type fini). Nous prouverons d'ailleurs que tout groupe déployé sur S provient déjà d'un $\underline{\underline{Z}}$-groupe déployé (Exp. XXV).

2.6. Soient k un corps algébriquement clos et G un k-groupe réductif. On sait (2.4 par exemple) qu'il existe des déploiements de G . Soient (G,T,M,R) et (G,T',M',R') deux déploiements de G ; alors les deux données radicielles $\mathcal{R}(G,T,M,R)$ et $\mathcal{R}(G,T',M',R')$ sont isomorphes.

En effet, on voit d'abord qu'on peut se ramener au cas où $T = T'$ (car il existe $g \in G(k)$ avec $T' = \mathrm{int}(g)\,T$, et on vérifie facilement que si on transporte un déploiement par un automorphisme de G , on trouve une donnée radicielle isomorphe à la donnée initiale); mais $S = \mathrm{Spec}(k)$ étant connexe, l'isomorphisme $D_k(M) \xrightarrow{\sim} T \xrightarrow{\sim} D_k(M')$ provient d'un unique isomorphisme $M \xrightarrow{\sim} M'$;

pour la même raison, il existe au plus un système de racines de G par rapport à T .

On appellera <u>type de</u> G la classe d'isomorphisme de la donnée radicielle définie par un déploiement quelconque de G ; si G est un tore, de type M au sens de Exp. IX 1.4 , alors le type de G comme groupe réductif est donné par la donnée radicielle triviale $(M,M^*,\emptyset,\emptyset)$. Par 1.17 , le type est invariant par extension (algébriquement close) du corps de base.

<u>Définition</u> 2.7. <u>Si</u> G <u>est un</u> S-<u>groupe réductif et si</u> $s \in S$, <u>on appelle</u> type de G en s <u>le type du</u> $\overline{s}$-<u>groupe réductif</u> $G_{\overline{s}}$.

Pour tout $S' \to S$ et tout $s' \in S'$ se projetant en $s \in S$, le type de $G_{S'}$ en s' est égal au type de G en s .

Si G est déployable, et si (G,T,M,R) est un déploiement de G , alors le type de G en s est la classe d'isomorphisme de $\mathcal{R}(G,T,M,R)$ en vertu de 1.17. Il résulte alors aussitôt de 2.3 la

<u>Proposition</u> 2.8. <u>Soit</u> G <u>un</u> S-<u>groupe réductif</u>. <u>La fonction</u>

$$s \longmapsto \underline{\text{type de}}\ G\ \underline{\text{en}}\ s$$

<u>est</u> localement constante <u>sur</u> S . <u>En particulier, il existe une partition de</u> S <u>en sous-préschémas ouverts non vides tels que sur chacun d'eux</u> G <u>soit de type constant. Plus précisément, soit</u> E <u>l'ensemble des types des fibres de</u> G ; <u>pour tout</u> $t \in E$, <u>soit</u> S_t <u>l'ensemble des points</u> $s \in S$ <u>où</u> G <u>est de type</u> t ; <u>alors</u> $(S_t)_{t \in E}$ <u>est une partition de</u> S <u>et chaque</u> S_t <u>est ouvert et fermé (et non vide)</u>.

3. Le groupe de Weyl .

3.1. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif , T un tore maximal de G . Alors

$$W_G(T) = \underline{\mathrm{Norm}}_G(T) \,/\, T$$

est un S-groupe étale fini (Exp. XIX 2.5). Par passage au quotient à partir de $n \longmapsto \mathrm{int}(n)$, on a un monomorphisme canonique (c'est d'ailleurs une immersion ouverte)

$$W_G(T) \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{S\text{-}gr}(T) \quad .$$

3.2. Supposons maintenant que G soit déployable relativement à T . Choisissons un déploiement, soit (G,T,M,R). On a alors un isomorphisme canonique (Exp. VIII 1.5)

$$\underline{\mathrm{Aut}}_{S\text{-}gr}(T) \simeq (\mathrm{Aut}_{gr}(M))_S \quad .$$

En particulier, si W est le groupe de Weyl de la donnée radicielle $\mathscr{R}(G)$ (Exp. XXI 1.1.8) , on a un monomorphisme

$$W_S \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{S\text{-}gr}(T) \quad .$$

3.3. Pour chaque racine $r \in R$, la symétrie $s_r \in W$ opère dans M par

$$s_r(x) = x - (r^*, x)\, r \quad ,$$

donc dans T (par le morphisme précédent), par

$$s_r(t) = t \,.\, r^*(r(t))^{-1} \quad .$$

D'autre part, comme $\mathscr{L}^r$ est supposé libre , il existe un $X \in \Gamma(S, \mathscr{L}^r)^*$. Considérons alors $w_r(X) \in \underline{\mathrm{Norm}}_G(T)(S)$ (Exp. XX 3.1) . On a (loc. cit.)

$$\mathrm{int}(w_r(X))(t) = s_r(t) \quad .$$

Comme W est engendré par les s_r , $r \in R$, il résulte des remarques précédentes que si on considère W et $\underline{\mathrm{Norm}}_G(T)(S)/T(S)$ comme des groupes d'automorphismes de T , on a

$$W \subset \underline{\mathrm{Norm}}_G(T)(S) \,/\, T(S) \subset W_G(T)(S) \quad .$$

Par définition du groupe constant W_S associé à W , on a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} W_S & \longrightarrow & W_G(T) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \underline{\mathrm{Aut}}_{S\text{-gr}}(T) & \end{array} \quad .$$

Proposition 3.4. *Soient* S *un préschéma,* (G,T,M,R) *un* S*-groupe déployé,* W *le groupe de Weyl de la donnée radicielle* $\mathcal{R}(G)$. *Alors le monomorphisme canonique*

$$W_S \longrightarrow W_G(T) = \underline{\mathrm{Norm}}_G(T)/T$$

est un isomorphisme.

Ce sont en effet des groupes étales sur S ; il suffit donc de vérifier que pour tout $s \in S$, $W_S(\overline{s}) \to W_G(T)(\overline{s})$ est un isomorphisme. Or cette dernière assertion résulte, par exemple, de BIBLE , 11-07, th. 2 .

Remarque 3.5. En utilisant 2.3 , 3.4 donne une nouvelle démonstration du fait que le groupe de Weyl d'un tore maximal d'un groupe réductif est fini (Exp. XIX 2.5 (ii)).

3.6. Sous les conditions de 3.1 , pour tout $w \in W_G(T)(S)$, on note Q_w le produit fibré du diagramme

$$\begin{array}{ccc} Q_w & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Norm}}_G(T) \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \xrightarrow{w} & W_G(T) \end{array} .$$

C'est un sous-préschéma ouvert et fermé de $\underline{\mathrm{Norm}}_G(T)$, qui est un fibré principal homogène sous T à gauche (resp. à droite) par la loi $(t,q) \longmapsto tq$ (resp. $(q,t) \longmapsto qt$). Si $n \in Q_w(S)$, on a

$$Q_{w\,w'} = n \cdot Q_{w'} \quad , \quad Q_{w'\,w} = Q_{w'} \cdot n \quad .$$

3.7. En particulier, si r est une racine de G par rapport à T , Q_{s_r} n'est autre que ce qui avait été noté Q en Exp. XX n° 3 . Si $\mathfrak{g}^r$ est libre sur S , on a donc $Q_{s_r}(S) \neq \emptyset$.

Par 3.4 et la condition (D 2) du déploiement, on en déduit le

Corollaire 3.8. Sous les conditions de 3.4 ,

$$\underline{\mathrm{Norm}}_G(T)(S) \longrightarrow W_G(T)(S) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{loc.cons.}}(S,W)$$

est surjectif. En particulier, pour tout $w \in W$, il existe un $n_w \in \underline{\mathrm{Norm}}_G(T)(S)$ tel que $\mathrm{int}(n_w) \mid T = w$.

4. Homomorphismes de groupes déployés.

4.1. La "grosse cellule" .

4.1.1. Soit (G,T,M,R) un S-groupe déployé. Choisissons un système de racines positives (Exp. XXI 3.2.1) R_+ de la donnée radicielle $\mathcal{R}(G)$.

On pose $R_- = -R_+$.

Choisissons un ordre total sur R_+ (resp. R_-) et considérons le morphisme induit par le produit dans G

$$u : \prod_{r \in R_-} P_r \times_S T \times_S \prod_{r \in R_+} P_r \longrightarrow G .$$

C'est une immersion ouverte . En effet, comme les deux membres sont plats et de présentation finie sur S , il suffit de le vérifier sur chaque fibre géométrique (SGA I 5.7 et VIII 5.4); on est donc ramené au cas où S est le spectre d'un corps algébriquement clos; mais, par BIBLE, 13-11, cor. 2 au th. 3, u est radiciel et dominant; comme l'application tangente à u à l'origine est un isomorphisme (définition d'un système de racines), u est birationnel; mais G étant normal, on peut appliquer le Main Theorem (EGA III 4.4.9) et u est une immersion ouverte. Montrons que l'image Ω de cette immersion ouverte est indépendante de l'ordre choisi sur R_+ (resp. R_-) . Comme il s'agit de comparer des ouverts de G , on est ramené à prouver qu'ils ont mêmes points géométriques , donc on peut supposer encore que S est le spectre d'un corps algébriquement clos. Mais alors l'assertion n'est autre que BIBLE , 13-05, th. 1 , et 13-02 , prop. 1 .

On a donc prouvé:

Proposition 4.1.2. Soit (G,T,M,R) un S-groupe déployé. Soit R_+ un système de racines positives de R. Il existe un ouvert Ω_{R_+} de G tel que pour tout ordre total sur R_+ (resp. R_-), le morphisme induit par le produit dans G

$$\prod_{r \in R_-} P_r \times_S T \times_S \prod_{r \in R_+} P_r \longrightarrow G$$

soit une immersion ouverte d'image Ω_{R_+}.

Remarque 4.1.3. On peut traduire 4.1.2 de la façon suivante : choisissons pour tout $r \in R$ un isomorphisme de groupes vectoriels $p_r : \underline{G}_{a\,S} \xrightarrow{\sim} P_r$ (cf. 1.19); alors le morphisme (on pose $N = \mathrm{Card}(R_+) = \mathrm{Card}(R_-)$)

$$\underline{G}_{a\,S}^N \times_S T \times_S \underline{G}_{a\,S}^N \longrightarrow G$$

défini ensemblistement par

$$((x_r)_{r \in R_-}, t, (x_r)_{r \in R_+}) \longmapsto \prod_{r \in R_-} p_r(x_r) \cdot t \cdot \prod_{r \in R_+} p_r(x_r)$$

est une immersion ouverte, dont l'image ne dépend que de R_+ (et non du choix des p_r et des ordres sur R_+ et R_-).

Notation 4.1.4. On note $\Omega_{R_+} = \prod_{r \in R_-} P_r \cdot T \cdot \prod_{r \in R_+} P_r$.

Proposition 4.1.5. Le préschéma Ω_{R_+} est de présentation finie sur S (donc rétrocompact dans G) et relativement schématiquement dense dans G (Exp. XVIII 1).

La première assertion est triviale , la seconde résulte de ce que Ω_{R_+}

contient la section unité , donc coupe chaque fibre de G , et de Exp. XVIII 1.3.

Corollaire 4.1.6. Sous les conditions de 4.1.2 , on a

$$\underline{\mathrm{Cent}}(G) = \bigcap_{r \in R} \mathrm{Ker}\ r$$

On peut invoquer Exp. XII 4.8 et 4.11 ; on peut aussi le démontrer directement comme suit. Il suffit évidemment de prouver que $\underline{\mathrm{Cent}}(G)(S) = \bigcap_r \mathrm{Ker}\ r\ (S)$. Si $t \in T(S)$ et si $r(t) = 1$ pour tout $r \in R$, alors $\mathrm{int}(t)$ induit l'identité sur T et chaque P_r , $r \in R$, donc aussi sur Ω_{R_+} , donc sur G par densité schématique. Réciproquement , si $g \in G(S)$ centralise T et les P_r , c'est une section de T (Exp. XIX 2.8) qui annule les $r \in R$.

Corollaire 4.1.7. Soient S un préschéma , G un S-groupe réductif . Alors le centre de G est représentable par un sous-groupe fermé de G , de type multiplicatif; c'est aussi "l'intersection des tores maximaux de G" au sens suivant : Pour tout $S' \to S$, $\underline{\mathrm{Cent}}(G)(S')$ est l'ensemble des $g \in G(S')$ dont l'image réciproque dans $G(S'')$, pour tout $S'' \to S'$, est contenue dans tous les $T(S'')$, où T parcourt l'ensemble des tores maximaux de $G_{S''}$.

La première assertion est triviale par descente. Démontrons la seconde. Soit H "l'intersection des tores maximaux de G" au sens précédent. On a évidemment $\underline{\mathrm{Cent}}(G) \subset H$. Pour prouver $\underline{\mathrm{Cent}}(G) = H$, il suffit de prouver que si G est déployé , $\underline{\mathrm{Cent}}(G)$ est l'intersection des tores maximaux de G (au sens habituel); cela résulte alors de la remarque suivante : si $X \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^r)^*$, alors $\left(\mathrm{int}(\exp_r(X))\ T\right) \cap T = \mathrm{Ker}\ r$, comme le montre un calcul trivial . (Cf. aussi Exp. XII 8.6 et 8.8 pour un énoncé plus général).

Remarque 4.1.8. Dans la suite, nous identifierons systématiquement dans le cas déployé T à $D_S(M)$. Alors $\underline{Cent}(G)$ n'est autre que $D_S(M/\Gamma_o(R))$, où $\Gamma_o(R)$ est le sous-groupe de M engendré par R. Si $\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$ est un système de racines simples de R, on a aussitôt $\underline{Cent}(G) = \bigcap \mathrm{Ker}\, r_i = \bigcap \underline{Cent}(Z_{r_i})$ (cf. Exp. XX 1.19). (Exp. XXI)

Proposition 4.1.9. Soient S un préschéma, (G,T,M,R) un S-groupe déployé, Q un S-tore, r_o un caractère de Q, $\underline{L}$ un $\underline{O}_S$-Module inversible,

$$f : Q \longrightarrow T$$

$$p : W(\underline{L}) \longrightarrow G$$

des morphismes de groupes vérifiant la relation ensembliste

$$p(r_o(q)\, x) = \mathrm{int}(f(q))\, p(x) ,$$

pour tous $q \in Q(S')$, $x \in W(\underline{L})(S')$, $S' \longrightarrow S$. Supposons que f sépare les éléments de R au sens suivant : si $r,r' \in R$ et si $m,m' \in \underline{Z}$ alors $mr \circ f = m'r' \circ f$ entraîne $mr = m'r'$. Soit enfin $s \in S$ tel que $r_{o_s} \neq e$, $p_s \neq e$. Il existe alors un ouvert U de S contenant s, un entier $q > 0$ tel que $x \longmapsto x^q$ soit un endomorphisme de $G_{a\,U}$, une racine $r \in R$ et un isomorphisme de $\underline{O}_U$-Modules

$$h : (\underline{L}|U)^{\otimes q} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_Y^{\,r}|U$$

tels que

(i) $(r \circ f)_U = q\, r_{oU}$,

(ii) $p(X) = \exp_r(h(X^q))$ pour tout $X \in W(\underline{L})(S')$, $S' \longrightarrow U$.

De plus, une fois U choisi, q, r et h sont uniquement déterminés.

Quitte à restreindre S, nous pouvons supposer que r_o est non nul sur chaque fibre de S. Choisissons un système de racines positives R_+ de R et soit $U = p^{-1}(\Omega_{R_+})$. C'est un ouvert de $W(\underline{L})$ contenant la section nulle et stable par multiplication par tout $r_o(q)$, $q \in Q(S')$, $S' \to S$. Comme r_o est non trivial sur chaque fibre, il s'ensuit immédiatement que $U = W(\underline{L})$, donc que p se factorise par Ω_{R_+}. Choisissons un ordre quelconque sur R_+ et R_- ; tous les produits seront supposés pris dans cet ordre. On a donc des morphismes uniques

$$a_r : W(\underline{L}) \longrightarrow P_r \quad , \quad r \in R \ ,$$

$$b : W(\underline{L}) \longrightarrow T$$

tels que

$$p(x) = \prod_{r \in R_-} a_r(x) \cdot b(x) \prod_{r \in R_+} a_r(x) \ .$$

Ecrivant la condition de covariance sous Q, on obtient aussitôt

$$a_r(r_o(q)\, x) = r(f(q))\, a_r(x) \quad , \quad r \in R$$

$$b(r_o(q)\, x) = b(x)$$

pour tous $x \in W(\underline{L})(S')$, $q \in Q(S')$, $S' \to S$. La seconde condition donne aussitôt $b = e$.

Soit maintenant $r \in R$ tel que $(a_r)_{\overline{s}} \neq e$ (nous savons qu'il existe un tel r, car $p_{\overline{s}}$ est supposé $\neq e$). Appliquant Exp. XIX 4.12 (a), on en déduit qu'il existe un entier $n > 0$, tel que $(r \circ f)_{\overline{s}} = n\, r_{o\overline{s}}$. Quitte à restreindre S, on peut supposer $(r \circ f) = n\, r_o$ (Exp. IX 5.3). Mais alors, pour tout $r' \in R$, $r' \neq r$, on a $(r' \circ f)_{\overline{s}} \neq n\, r_o$ pour tout entier $m > 0$ en vertu de l'hypothèse faite sur f (et du fait que les seules racines proportionnelles à r sont r et $-r$). Appliquant de nouveau Exp. XIX 4.12 (a), à $a_{r'}$, cette fois, on en

déduit que $a_{r'}$ est nul au voisinage de S ; R étant fini, on peut, quitte à restreindre encore S, supposer les $a_{r'}$ nuls pour $r' \in R$, $r' \neq r$.
On a alors $p = a_r$, et on peut lui appliquer Exp. XIX 4.12 (b), puis (c), qui donne le résultat annoncé (les assertions d'unicité sont évidentes).

Remarque 4.1.10. La condition imposée à f en 4.1.9 est vérifiée en particulier si f est surjectif (= fidèlement plat).

Proposition 4.1.11. Soient (G,T,M,R) un S-groupe déployé, R_+ un système de racines positives de R, Ω_{R_+} la "grosse cellule" correspondante.

(i) Soit H un S-foncteur en groupes, séparé pour (fppf). Si $f,g : G \rightrightarrows H$ sont deux morphismes de groupes qui coïncident sur Ω_{R_+}, alors $f = g$.

(ii) Soient H un S-faisceau en groupes pour (fppf) et $f : \Omega_{R_+} \longrightarrow H$ un S-morphisme vérifiant la condition suivante : pour tout $S' \longrightarrow S$ et tous $x,y \in \Omega_{R_+}(S')$ tels que $xy \in \Omega_{R_+}(S')$, on a $f(xy) = f(x)\,f(y)$. Il existe un (unique, par (i)) morphisme de groupes $\overline{f} : G \longrightarrow H$ qui prolonge f.

En effet, par 4.1.5, (i) (resp. (ii)) résulte aussitôt de Exp. XVIII 2.2 (resp. 2.3 et 2.4).

Remarque 4.1.12. Si $r \in R_+$, on a

$$\Omega_{R_+} \cap Z_r = P_{-r} \cdot T \cdot P_r .$$

En particulier, si $X \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^r)$ et $Y \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^{-r})$, on a

$$(\exp_r(X)\,\exp_{-r}(Y) \in \Omega(S)) \Longleftrightarrow (1 + XY \text{ inversible}).$$

En effet $Z_r = \underline{\mathrm{Cent}}_G(T_r)$, et r et $-r$ sont les deux seuls éléments de R s'annulant sur T_r.

4.2. Morphismes de groupes déployés .

Définition 4.2.1. Soient S un préschéma (non vide) , (G,T,M,R) et (G',T',M',R') deux S-groupes déployés. On dit que le morphisme de groupes $f : G \longrightarrow G'$ est compatible avec les déploiements, ou définit un morphisme de groupes déployés, si la restriction de f à T se factorise en un morphisme $f_T : T \longrightarrow T'$ qui soit de la forme $f_T = D_S(h)$, où $h : M' \longrightarrow M$ est un homomorphisme de groupes vérifiant la condition suivante :

il existe une bijection $u : R \longrightarrow R'$ et pour chaque $r \in R$ un entier $q(r) > 0$ tel que $x \longmapsto x^{q(r)}$ soit un endomorphisme de $G_{a\,S}$ et que $h(u(r)) = q(r)\ r$, ${}^t h(r^*) = q(r)\ u(r)^*$.

Remarque 4.2.2. Il est immédiat que h , u , $q(r)$ pour $r \in R$, sont uniquement déterminés par f . On note $h = \mathcal{R}(f)$. Les $q(r)$ sont les exposants radiciels de f (ou de h) . Soit p le nombre premier (s'il existe) qui est nul sur S ; posons $p = 1$ s'il n'existe aucun nombre premier nul sur S . Alors $\mathcal{R}(f)$ est un p-morphisme de données radicielles réduites au sens de Exp. XXI 6.8. On a donc défini un foncteur $\mathcal{R}$ de la catégorie des S-groupes déployés dans celle des données radicielles réduites [pour la notion de p-morphisme] .

Proposition 4.2.3. Sous les conditions de 4.2.1 , on a les propriétés suivantes :

(i) Pour tout $r \in R$, il existe un isomorphisme unique de O_S-Modules

$$f_r : (\mathcal{O}_S^r)^{\otimes q(r)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_S^{u(r)}$$

tel que

$$f(\exp_r(X)) = \exp_{u(r)}(f_r(X^{q(r)}))$$

pour tout $X \in W(\mathcal{O}_S^r)(S')$, $S' \longrightarrow S$.

(ii) Pour tout $r \in R$, on a $q(-r) = q(r)$ et f_r et f_{-r} sont contragrédients l'un de l'autre.

(iii) Pour tout $r \in R$, tout $Z \in W(\mathcal{G}^r)^*(S')$, $S' \to S$, on a

$$f(w_r(Z)) = w_{u(r)}(Z^{q(r)}) .$$

Par hypothèse le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \underline{G}_m S & \xrightarrow{r^*} & T & \xrightarrow{r} & \underline{G}_m S \\ {\scriptstyle q(r)}\downarrow & & {\scriptstyle f_T}\downarrow & & {\scriptstyle q(r)}\downarrow \\ \underline{G}_m S & \xrightarrow{u(r)^*} & T' & \xrightarrow{u(r)} & \underline{G}_m S \end{array} ,$$

est commutatif. Il en résulte que f applique Ker r dans Ker u(r), donc T_r dans $T'_{u(r)}$, donc Z_r dans $Z'_{u(r)}$. Il n'y a plus alors qu'à appliquer Exp. XX 3.10 et 3.11 au groupes Z_r et $Z'_{n(r)}$.

Proposition 4.2.4. Le morphisme f induit un morphisme f_N de $\mathrm{Norm}_G(T)$ dans $\mathrm{Norm}_{G'}(T')$, donc un morphisme f_W de $W_G(T)$ dans $W_{G'}(T')$; celui-ci est un isomorphisme. Plus précisément, si on note $\bar{u} : W(\mathcal{R}(G)) = W \to W' = W(\mathcal{R}(G'))$ l'isomorphisme qui prolonge $s_r \mapsto s_{u(r)}$ (Exp. XXI 6.8.4), on a un diagramme commutatif d'isomorphismes :

$$\begin{array}{ccc} W_G(T) & \xrightarrow{\sim\ f_W} & W_G(T') \\ \uparrow\wr & & \uparrow\wr \\ W_S & \xrightarrow[\sim]{\bar{u}_S} & W'_S \end{array} .$$

Cela résulte aussitôt de 3.4, Exp. XXI 6.8.4, et (iii) ci-dessus

Remarque 4.2.5. Avec les notations de 4.2.3 , la restriction de f à Ω_{R_+} (pour un système de racines positives R_+) s'écrit explicitement : elle applique Ω_{R_+} dans $\Omega'_{u(R_+)}$ ($u(R_+)$ est un système de racines positives de R' par Exp. XXI 6.8.7) et est donnée par la formule ensembliste :

$$f\Big(\prod_{r \in R_-} \exp_r(X_r) \cdot t \cdot \prod_{r \in R_+} \exp_r(X_r)\Big) =$$

$$= \prod_{r \in R_-} \exp_{u(r)}(f_r(X_r^{q(r)})) \cdot f_T(t) \cdot \prod_{r \in R_+} \exp_{u(r)}(f_r(X_r^{q(r)})) .$$

Proposition 4.2.6. (i) f est surjectif (= fidèlement plat dans le cas présent, cf Exp. VI) si et seulement si f_T l'est .

(ii) On a $\mathrm{Ker}\, f \subset \Omega_{R_+}$.

Prouvons (i) : si f est surjectif , alors $f(T) = f_T(T)$ est un tore maximal de G' (en effet $f_T(T)$ est un sous tore de T' , Exp. IX 6.8 ; pour vérifier qu'il est maximal, on est ramené au cas d'un corps algébriquement clos, où c'est BIBLE 7.05, th. 3. a)) , donc égal à T' . Si f_T est surjectif, alors la formule précédente montre que $f \mid \Omega$ est surjectif, ce qui entraîne que f est surjectif (Exp. VI). Prouvons (ii) et pour cela admettons un résultat qui sera démontré ci-dessous (5.7.4) : choisissons pour chaque $w \in W$ un $n_w \in \underline{\mathrm{Norm}}_G(T)(S)$ qui le représente; alors les ouverts $n_w \Omega$ ($w \in W$) forment un recouvrement de G . Il suffit de prouver que $\mathrm{Ker}\, f \cap n_w \Omega \neq \emptyset$ entraîne $w = 1$. Si $x \in \Omega(S')$, $S' \to S$ et $f(n_w x) = e$, on a $f(x) = f(n_w)^{-1}$; or $f(x) \in \Omega'(S')$ et $f(n_w)^{-1} \in \underline{\mathrm{Norm}}_{G'}(T')(S')$. En vertu de 4.2.4 , on est ramené à prouver :

Lemme 4.2.7. Sous les conditions de 4.1.2 , on a

$$\Omega \cap \underline{\mathrm{Norm}}_G(T) = T .$$

Soit

$$x = \prod_{r \in R_-} p_r(x_r) \cdot t \cdot \prod_{r \in R_+} p_r(x_r) = v\,t\,u \in \Omega(S') \ .$$

Si x normalise $T_{S'}$, on a pour tout $t' \in T(S')$,

$$x\,t'\,x^{-1} = t'' \in T(S') \ ,$$

c'est-à-dire $x\,t' = t''\,x$, ce qui s'écrit

$$v(tt')(t'^{-1}u\,t') = (t''vt''^{-1})\,t''t\,u \ ,$$

ce qui donne $t'^{-1}u\,t' = u$, donc $u \in \underline{\mathrm{Cent}}_G(T)(S') = T(S')$, soit $u = e$.
De même $v = e$.

Corollaire 4.2.8. On a

$$\mathrm{Ker}\ f = \prod_{r \in R_-} K_r \cdot \mathrm{Ker}\ f_T \cdot \prod_{r \in R_+} K_r \ ,$$

où pour chaque $r \in R$, K_r désigne le S-groupe fini

$$K_r = \mathrm{Ker}\,(P_r \longrightarrow P_r^{\mathbb{G}_m q(r)}) \simeq \alpha_{q(r)S} \ .$$

Pour appliquer ce lemme, posons:

Définition 4.2.9. Soient S un préschéma, G et G' deux S-groupes réductifs. Un morphisme de groupes $f : G \longrightarrow G'$ fidèlement plat et fini (i.e. surjectif et à noyau fini sur S) est appelé une isogénie. Si Ker f est un sous-groupe central de G, on dit que f est une isogénie centrale.

Proposition 4.2.10. Soit $f : G \longrightarrow G'$ un morphisme de groupes déployés. Pour que f soit une isogénie (resp. une isogénie centrale) il faut et il suffit que f_T soit une isogénie i.e. que $\mathcal{R}(f)$ soit injectif de conoyau fini (resp. et que pour tout $r \in R$, on ait $q(r) = 1$).

En effet, par 4.2.8 Ker f est fini sur S si et seulement si $\mathrm{Ker}\, f_T$ est fini sur S et $\mathrm{Ker}\, f \subset T$ si et seulement si chaque $q(r) = 1$ ($\mathrm{Ker}\, f$ alors central car de type multiplicatif et distingué, Exp. IX 5.5).

Remarques 4.2.11. a) On voit donc que $f : G \to G'$ est une isogénie centrale si et seulement si $\mathcal{R}(f) : \mathcal{R}(G') \to \mathcal{R}(G)$ est une isogénie au sens de Exp. XXI 6.2 ; de plus on a dans ce cas $\mathrm{Ker}\, f = D_S(K(\mathcal{R}(f)))$ (Notations de loc. cit. , $K(\mathcal{R}(f)) = \mathrm{Coker}(\mathcal{R}(f))$).

b) Si G et G' sont semi-simples, tout morphisme de groupes déployés $G \to G'$ est une isogénie.

c) Si $f : G \to G'$ est fidèlement plat et fini et si G est réductif (resp. semi-simple), alors G' l'est aussi. Il est en effet de présentation finie sur S (Exp. V 9.1), affine sur S (EGA II 6.7.1), lisse sur S (Exp. VI) , à fibres géométriques connexes et réductives (resp. semi-simples) par Exp. XIX 1.7.

La définition 4.2.1 peut sembler arbitraire. Elle est justifiée par la proposition qui suit (que nous énoncerons, pour simplifier, pour des groupes semi-simples). Disons qu'un morphisme $f : G \to G'$ de S-groupes réductifs est déployable s'il existe des déploiements de G et G' avec lesquels f soit compatible. On a alors la

Proposition 4.2.12. Soient S un préschéma , G et G' deux S-groupes semi-simples , $f : G \to G'$ un morphisme de groupes . Soit $s \in S$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Ker $f_{\overline{s}}$ est fini ($\Leftrightarrow$ e est isolé dans Ker $f(\overline{s})$) et $f_{\overline{s}}$ est surjectif, i.e. $f_{\overline{s}}$ est une isogénie.

(ii) $f_{\overline{s}}$ est déployable .

(iii) Il existe un morphisme étale $S' \longrightarrow S$ couvrant s tel que $f_{S'} : G_{S'} \longrightarrow G'_{S'}$ soit déployable.

On a évidemment (iii) $\Longleftrightarrow$ (ii) ; (ii) $\Longleftrightarrow$ (i) résulte de 4.2.10 b) (C'est ici qu'intervient l'hypothèse que G et G' sont semi-simples - les autres implications sont valables pour des groupes réductifs). Prouvons maintenant (i) $\Longrightarrow$ (iii) . On peut supposer G et G' déployés de telle sorte que f induise un morphisme $f_T : T \longrightarrow T'$ (2.3 et Exp. XIX 2.8) ; quitte à restreindre S, on peut supposer que $f_T = D_S(h)$ où h est un morphisme de groupes $M' \longrightarrow M$. Soit $r \in R$, considérons le morphisme composé

$$p : W(\mathcal{J}^r) \xrightarrow{\exp_r} G \xrightarrow{f} G' .$$

Comme Ker $p_{\overline{s}}$ est fini, $p_{\overline{s}} \neq e$. D'autre part $f_{T\,\overline{s}}$ est surjectif; on peut donc appliquer 4.1.9 et il existe un ouvert U_r de S contenant s , une racine $r' \in R'$, un entier $q(r)$ tel que $x \longmapsto x^{q(r)}$ soit un endomorphisme de $\underline{G}_a\,U_r$ et un isomorphisme de $\underline{O}_U$-Modules

$$f_r : (\mathcal{J}^r)^{\otimes q(r)}|_{U_r} \longrightarrow \mathcal{J}^{r'}|_{U_r}$$

tel que $f(\exp_r(X_r)) = \exp_{u(r)}(f_r(X_r^{q(r)}))$ et $r' \circ f_T = h(r') = q(r)\, r$. On peut remplacer S par l'intersection des U_r , $r \in R$. Posons $r' = u(r)$. Il est clair que $u : R \longrightarrow R'$ est une bijection, car le noyau de h est fini ($f_{T\,\overline{s}}$ étant surjectif). Il ne reste plus qu'à prouver que $f_T \circ r^* = q(r)\, r'^*$, ce qui se fait par une modification triviale de l'argument utilisé en Exp. XX 3.11.

De toutes façons, comme on l'a vu au cours de la démonstration, on a (i) $\Longrightarrow$ (iii) . On a donc :

Corollaire 4.2.13. Soient S un préschéma , $f : G \to G'$ une isogénie de groupes réductifs. Alors f est localement déployable pour la topologie étale.

4.3. Quotients centraux de groupes réductifs .

Considérons d'abord un cas particulier.

Proposition 4.3.1. Soient S un préschéma , (G,T,M,R) un S-groupe déployé, N un sous-groupe de M contenant R , $Q = D_S(M/N) \subset \mathrm{Cent}(G)$. Alors $G' = G/Q$ est un S-groupe réductif, $T' = T/Q$ en est un tore maximal; si on identifie T' à $D_S(N)$, alors $R \subset N$ est un système de racines de G' par rapport à T' , (G',T',N,R) est un déploiement de G , $\mathcal{R}(G')$ s'identifie canoniquement à la donnée radicielle induite (Exp. XXI 6.5) $\mathcal{R}(G)_N$; le morphisme canonique

$$G \longrightarrow G'$$

est compatible avec les déploiements et d'exposants radiciels 1 et donne par fonctorialité le morphisme canonique (loc. cit.) $\mathcal{R}(G)_N \longrightarrow \mathcal{R}(G)$.

On sait que $G' = G/Q$ est représentable par un préschéma affine sur S (Exp. VIII 5.7) , lisse sur S (Exp. VI) , à fibres géométriques connexes et réductives (comme quotients de groupes réductifs (Exp. XIX 1.7); G' est donc un S-groupe réductif. Il est clair que $T' = T/Q \simeq D_S(N)$ en est un tore maximal. Remarquons ensuite qu'en choisissant un système de racines positives R_+ de R ,

l'ouvert Ω_{R_+} de 4.2 est stable sous Q et que l'on a un isomorphisme canonique

$$\Omega_{R_+}/Q \simeq \prod_{r\in R_-} P_r \times_S T/Q \times_S \prod_{r\in R_+} P_r ,$$

Ω_{R_+}/Q étant un ouvert de G' , contenant la section unité (Exp. IV 4.7.2 et 6.4.1). Il en résulte que si on note $\mathfrak{g}'$ l'Algèbre de Lie de G' et r le caractère de T/Q induit par r (ou, ce qui revient au même défini par $r \in N$ dans l'identification $T/Q = D_S(N)$), le morphisme canonique $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}'$ induit pour chaque $r \in R$ un isomorphisme

$$\mathfrak{g}^r \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}'^r .$$

On a donc prouvé que R est un système de racines de G' par rapport à T' , et on termine la démonstration sans difficulté.

Corollaire 4.3.2. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, Q un sous-groupe invariant de type multiplicatif de G . Alors Q est central dans G, le quotient G/Q est représentable par un S-groupe réductif. Le morphisme canonique $G \longrightarrow G/Q$ est localement déployable pour la topologie étale (avec des exposants radiciels égaux à 1).

La première assertion résulte de Exp. IX 5.5 ; les autres sont locales pour la topologie étale et on est ramené à 4.3.1.

Définition 4.3.3. Soit G un S-groupe réductif. On dit que G est adjoint (resp. simplement connexe) si pour tout $s \in S$, le type de G en s est donné par une donnée radicielle adjointe (resp. simplement connexe), i.e. (Exp. XXI 6.2.6) telle que M soit engendré par R (resp. M^* engendré par R^*).

Proposition 4.3.4. (i) Un groupe réductif adjoint (resp. simplement connexe) est semi-simple.

(ii) Si T est un tore maximal du groupe réductif adjoint (resp. simplement connexe) G et si r est une racine de G par rapport à T, alors la racine infinitésimale $\overline{r}$ est non nulle sur chaque fibre (resp. r^* est un monomorphisme et la coracine infinitésimale H_r est non nulle sur chaque fibre).

En effet, (i) est trivial, (ii) se vérifie sur les fibres géométriques et résulte aussitôt de Exp. XXI 6.2.8.

Proposition 4.3.5. (i) Pour que le groupe réductif G soit adjoint, il faut et il suffit que $\underline{Cent}(G) = e$.

(ii) Pour tout groupe réductif G, le groupe quotient $G/\underline{Cent}(G)$ est un groupe réductif adjoint.

En effet, on peut supposer G déployé, (i) est trivial (car $\underline{Cent}(G) = D_S(M/\Gamma_0(R))$, (ii) résulte de 4.3.1.

Définition 4.3.6. Soit G un S-groupe réductif. On appelle groupe adjoint à G et on note $ad(G)$ le groupe $G/\underline{Cent}(G)$. On appelle radical de G et on note $rad(G)$ le tore maximal (unique Exp. XII 1.12) de $\underline{Cent}(G)$. On appelle groupe semi-simple associé à G le quotient $G/rad(G)$.

Les définitions précédentes sont compatibles avec changement de base. Si $s \in S$, $rad(G)_{\overline{s}}$ est bien le radical de $G_{\overline{s}}$ au sens habituel (Exp. XIX 1.6).

4.3.7. Si (G,T,M,R) est un groupe déployé, alors $rad(G) = D_S(M/N)$, où $N = M \cap V(R)$, donc le groupe semi-simple associé à G (comme d'ailleurs le

groupe adjoint à G) est muni d'un déploiement canonique (4.3.1) et on a un diagramme de groupes déployés

$$G \longrightarrow ss(G) \longrightarrow ad(G)$$

correspondant au diagramme canonique de données radicielles (Exp. XXI 6.5.5)

$$ad(\mathcal{R}(G)) \longrightarrow ss(\mathcal{R}(G)) \longrightarrow \mathcal{R}(G) \quad .$$

Remarque 4.3.8. Soit (G,T,M,R) un S-groupe déployé, adjoint (resp. simplement connexe), R_o un système de racines simples de R . Alors la famille $\{r\}_{r \in R_o}$ (resp. $\{r^*\}_{r \in R_o}$) induit un isomorphisme

$$T \xrightarrow{\sim} (\underline{G}_{m\,S})^{R_o}$$

(resp.

$$(\underline{G}_{m\,S})^{R_o} \xrightarrow{\sim} T \ ) \ .$$

En effet, $M = \Gamma_o(R)$ (resp...) et R_o est une base du groupe libre $\Gamma_o(R)$ (Exp. XXI 3.1.8).

Remarque 4.3.9. Le radical d'un groupe réductif est un sous-groupe caractéristique (i.e. stable sous $\underline{Aut}_{S\text{-}gr}(G)$) , vu sa définition.

5. Sous-groupes de type (R).

Nous nous intéressons spécialement aux groupes réductifs, mais certains des résultats que nous allons établir sont valables plus généralement pour une classe de groupes plus large : les groupes de type (RR).

5.1. Groupes de type (RR).

Définition 5.1.1. Soient S un préschéma, G un S-préschéma en groupes. On dit que G est de type (RR) s'il vérifie les conditions suivantes :

(i) G est lisse et de présentation finie sur S et à fibres connexes.

(ii) G possède localement pour la topologie (fpqc) des tores maximaux.

(iii) Pour tout $s \in S$, tout tore maximal T de G_s et toute racine de G_s par rapport à T_s (Exp. XIX 1.10), $\mathrm{Lie}(G_s)^r$ est de rang 1 (comme espace vectoriel sur $\overline{k(s)}$).

(iv) Pour tout $s \in S$, tout tore maximal T de G_s, notons R l'ensemble des racines de G_s par rapport à T et $\Gamma_0(R)$ le sous-groupe de $\mathrm{Hom}_{s\text{-gr}}(T, G_{m\,s})$ engendré par R ; alors le contenu de toute racine $r \in R$ dans le groupe abélien libre $\Gamma_0(R)$ (qui est donc un entier > 0) est inversible sur S.

Remarques 5.1.2. a) En vertu de Exp. XII 7.1 (où l'hypothèse G séparé est inutile car automatiquement vérifiée, Exp. VI) (i) et (ii) entraînent que G possède localement pour la topologie étale des tores maximaux (resp. des groupes de Cartan) conjugués localement pour la topologie étale.

b) Les groupes de Cartan de G sont à fibres connexes (Exp. XII 6.6).

c) Si G est affine sur S, (i) et (ii) sont équivalents respectivement à

(i') G est lisse sur S et à fibres connexes.

(ii') Le rang réductif des fibres de G est localement constant. (Exp. XII 1.7).

d) Par Exp. XII 8.8 c), G possède un centre réductif Z ; sous les conditions de (iv), on a $Z_{\underline{s}} = \bigcap_{r \in R} \operatorname{Ker} r$ (loc. cit. d)), donc

$$\operatorname{Hom}_{\underline{s}\text{-gr}}(T/Z_{\underline{s}}, \underline{G}_{m\,\underline{s}}) \simeq \Gamma_o(R) .$$

e) La condition (iv) est vérifiée en particulier dans les deux cas suivants : 1°) S est de caractéristique 0 ; 2°) toute racine est un élément indivisible du groupe engendré par les racines.

f) Le fait d'être de type (RR) est stable par changement de base et local pour (fpqc).

Des remarques c) et e), il résulte aussitôt la

Proposition 5.1.3. Un groupe réductif est de type (RR).

Proposition 5.1.4. Soient S un préschéma, G un S-groupe de type (RR), Q un sous-groupe central de G de présentation finie sur S tel que le quotient G/Q soit représentable (par exemple G affine sur S et Q de type multiplicatif ou bien S artinien); alors G/Q est un S-groupe de type (RR).

En effet (i) est clair [G/Q est lisse sur S (Exp. VI), de présentation finie sur S (Exp. V 9.1), à fibres connexes]; (ii) résulte de Exp. XII 7.6 ; il reste à vérifier (iii) et (iv). Prouvons d'abord :

Lemme 5.1.5. Sous les conditions de 5.1.4 , soit $T = D_S(M)$ un tore maximal trivial de G , supposons que la décomposition de $\mathfrak{g}$ sous $\mathrm{Ad}(T)$ soit de la forme

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \oplus \coprod_{r \in R} \mathfrak{g}^r \qquad R \subset M - \{0\} ,$$

où pour tout $s \in S$, $\mathfrak{g}^r(s) \neq 0$ pour $r \in R$ (donc $\mathfrak{g}^r$ est un $\mathcal{O}_S$-Module inversible pour tout $r \in R$ et R est l'ensemble des racines de $G_{\bar{s}}$ par rapport à $T_{\bar{s}}$ pour tout $s \in S$). Notons $G' = G/Q$, soit $u : G \longrightarrow G'$ le morphisme canonique; $T' = u(T)$ le tore maximal de G' image de T (Exp. XII 7.1 e)) ; pour chaque $r \in R$, notons également par r le caractère de T' défini par r (en effet $Q \cap T \subset Z = \bigcap_{r \in R} \mathrm{Ker}\, r$) . Alors l'Algèbre de Lie $\mathfrak{g}'$ de G' se décompose sous $\mathrm{Ad}(T')$ de la manière suivante :

$$\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}'^0 \oplus \coprod_{r \in R} \mathfrak{g}'^r$$

et $\mathrm{Lie}(u)$ induit un isomorphisme de $\mathfrak{g}^r$ sur $\mathfrak{g}'^r$.

En effet, soit $p = \mathrm{Lie}(u) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}'$. On a aussitôt $p(\mathfrak{g}^r) \subset \mathfrak{g}'^r$ pour tout $r \in R$, $p(\mathfrak{g}^0) \subset \mathfrak{g}'^0$. Comme $\mathrm{Ker}\, p = \mathrm{Lie}(Q) \subset \mathrm{Lie}(\mathrm{Cent}_G(T)) = \mathfrak{g}^0$, p induit un monomorphisme de $\mathfrak{g}^r$ dans $\mathfrak{g}'^r$ pour tout $r \in R$. Pour démontrer le lemme, il suffit de le faire lorsque S est le spectre d'un corps algébriquement clos, et en vertu des remarques précédentes, il suffit alors de prouver que $\mathrm{rg}(\mathfrak{g}') = \mathrm{rg}(\mathfrak{g}'^0) + \mathrm{Card}\ R$. Or posons $C = \mathrm{Cent}_G(T)$, $C' = \mathrm{Cent}_{G'}(T')$; par Exp. XII 7.1 e) , u induit un morphisme fidèlement plat $C \longrightarrow C'$ de noyau Q . On a donc

$$\dim C' + \dim Q = \dim C .$$

Mais G,G',C et C' sont lisses, donc

$$\dim G = rg(\mathcal{O}_f) = rg(\mathcal{O}_x^{\circ}) + \text{Card } R = \dim(C) + \text{Card } R$$
$$= \dim Q + \dim C' + \text{Card } R = \dim(Q) + rg(\mathcal{O}_f'^{\circ}) + \text{Card } R$$

$$rg(\mathcal{O}_f') = \dim G' = \dim G - \dim Q$$

ce qui entraîne

$$rg(\mathcal{O}_f') = rg(\mathcal{O}_f'^{\circ}) + \text{Card } R ,$$

c'est-à-dire la relation cherchée.

Revenons à la démonstration de 5.1.4 ; on peut supposer que S est le spectre d'un corps algébriquement clos. Soit T un tore maximal de G ; appliquant 5.1.5 , on a aussitôt (iii) et (iv) pour G/Q .

Pour utiliser la proposition précédente, introduisons une définition :

Définition 5.1.6. On dit que le S-préschéma en groupes G est de type (RA) , s'il est de type (RR) et s'il vérifie en outre la condition (iv') (plus forte que (iv)):

(iv') Pour tout $s \in S$ et tout tore maximal T de G_s , toute racine de G_s par rapport à T a un contenu dans $\underline{\mathrm{Hom}}_{s\text{-gr}}(T, \underline{G}_{m\,s})$ qui est inversible sur S .

Remarques 5.1.7. a) Un S-groupe réductif adjoint est de type (RA) .

b) Si S est de caractéristique 0 , tout groupe de type (RR) est de type (RA).

c) Le fait d'être de type (RA) est stable par changement de base et local pour (fpqc) .

La remarque a) précédente se généralise par:

Proposition 5.1.8. Soient S un préschéma, G un S-groupe de type (RR), Z son centre réductif, supposons le quotient G/Z représentable (par exemple G affine sur S, ou S artinien); alors G/Z est de type (RA).

En effet, cela résulte aussitôt de 5.1.4, 5.1.5 et 5.1.2 d).

Remarque 5.1.9. Si G est de type (RR) et si T est un tore maximal de G, on peut appliquer Exp. XIX 6.3. En particulier $W_G(T)$ est étale, quasi-fini et séparé sur S.

5.2. Sous-groupes de type (R).

Définition 5.2.1. Soient S un préschéma, G un S-préschéma en groupes lisse de présentation finie et à fibres connexes, H un sous-préschéma en groupes de G. On dit que H est de type (R) si

(i) H est lisse, de présentation finie sur S (= rétrocompact dans G) et à fibres connexes.

(ii) Pour tout $s \in S$, $H_{\overline{s}}$ contient un sous-groupe de Cartan de $G_{\overline{s}}$.

Cette notion est stable par changement de base et locale pour (fpqc).

Rappel 5.2.2. (Exp. XII 7.9). Sous les conditions précédentes :

a) $H = \mathrm{Norm}_G(H)^\circ$.

b) Si G contient localement pour la topologie étale des sous-groupes de Cartan (resp. des tores maximaux), il en est de même de H, et les sous-groupes de

Cartan (resp. les tores maximaux)de H sont des sous-groupes de Cartan (resp. des tores maximaux) de G.

Exemples 5.2.3. a) Groupes de Borel : Un groupe de Borel de G est un sous-groupe de type (R) dont les fibres sont des groupes de Borel des fibres de G .

b) Groupes paraboliques : un sous-groupe parabolique de G est un sous-groupe de type (R) dont les fibres géométriques contiennent des groupes de Borel.

D'autres exemples sont donnés par les propositions suivantes .

Proposition 5.2.4. Soit G comme dans 5.2.1 , $K \subset H$ deux sous-préschémas en groupes de G , H étant supposé de type (R) . Alors K est un sous-groupe de type (R) de H si et seulement si c'est un sous-groupe de type (R) de G .

Trivial.

Proposition 5.2.5. Soit G comme dans 5.2.1 , T un tore maximal de G , Q un sous-tore de T , $Z = \underline{Cent}_G(Q)$. Si H est un sous-groupe de type (R) de G contenant T , $H \cap Z$ est un sous-groupe de type (R) de Z .

Rappelons d'abord que Z est un sous-préschéma en groupes fermé de G, de présentation finie (Exp. XI 6.11) , à fibres connexes (Exp. XII 6.6), lisse sur S (Exp. IX 3.3) , donc vérifie les conditions imposées dans la définition 5.2.1. De même, $H \cap Z$ est de présentation finie, lisse et à fibres connexes (car $H \cap Z = \underline{Cent}_H(Q)$); de plus $H \cap Z \supset \underline{Cent}_G(T)$.

Proposition 5.2.6. Soient S un préschéma , G un S-groupe de type (RR) (resp. (RA)), H un sous-groupe de type (R) de G . Alors H est un S-groupe de type (RR) (resp. (RA)).

En effet (i) est clair, (ii) résulte de 5.2.2 b) , (iii) et (iv) (resp. (iv')) sont à vérifier lorsque S est le spectre d'un corps algébriquement clos. Alors H contient un tore maximal T de G (et donc aussi $C = \underline{Cent}_G(T)$) et les assertions à démontrer résultent aussitôt de:

Lemme 5.2.7. Soient S un préschéma, G un S-groupe de type (RR) , $T = D_S(M)$ un tore maximal trivial de G ; supposons que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^\circ \oplus \coprod_{r \in R} \mathfrak{g}^r ,$$

les $\mathfrak{g}^r$ étant inversibles. Soit H un sous-groupe de type (R) contenant $C = \underline{Cent}_G(T)$ (i.e. contenant T). Alors $\mathfrak{h} = \underline{Lie}(H/S)$ est localement sur S de la forme

$$\mathfrak{g}_{R'} = \mathfrak{g}^\circ + \coprod_{r \in R'} \mathfrak{g}^r ;$$

de manière précise, soit pour chaque $s \in S$, $R'(s) = \{ r \in R , \mathfrak{g}^r(s) \subset \mathfrak{h}(s) \}$. Alors $R'(s)$ est une fonction localement constante de s ; si U est un ouvert de S sur lequel $R'(s) = R'$, on a

$$\mathfrak{h}_U = \mathfrak{g}^\circ{}_U \oplus \coprod_{r \in R'} \mathfrak{g}^r{}_U .$$

En effet, $\mathfrak{h}$ est un sous-Module de $\mathfrak{g}$, localement facteur direct, contenant $\mathfrak{g}^\circ$ et stable par T .

5.3. Transporteur strict de deux sous-groupes de type (R) . Applications .

Proposition 5.3.1. Soient S un préschéma , G un S-groupe de type (RA) (5.1.6 H un sous-groupe de type (R) de G , $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ leurs Algèbres de Lie. Alors $\mathrm{Norm}_G(\mathfrak{h})$ (qui est de toutes façons représentable par un sous-préschéma fermé de G de présentation finie sur S) est lisse sur S le long de la section unité et on a

$$H = \mathrm{Norm}_G(\mathfrak{h})^\circ .$$

Comme H est lisse et de présentation finie sur S , la proposition est équivalente (Exp. VI) au fait suivant : pour tout $s \in S$

$$\mathrm{Norm}_{\mathfrak{g}(s)}(\mathfrak{h}(s)) = \mathfrak{h}(s) .$$

On est donc ramené par 5.2.7 à prouver:

Lemme 5.3.2. Sous les conditions de 5.2.7 , pour tout $s \in S$, on a $\mathrm{Norm}_{\mathfrak{g}(s)}(\mathfrak{h}(s)) = \mathfrak{h}(s)$, si G est de type (RA) .

En effet, on est ramené au cas où S est le spectre d'un corps, donc où $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{R'}$ pour un certain $R' \subset R$. Mais on a déjà

$$\mathrm{Transp}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}, \mathfrak{h}) = \mathfrak{h} .$$

En effet, si $H \in \mathfrak{t}$ et $X \in \mathfrak{g}^r$, on a $[H,X] = \bar{r}(H)\, X$, où $\bar{r} : \mathfrak{t} \to \underline{0}_S$ est le morphisme dérivé de r . Or la condition (iv') dit justement que $\bar{r} \neq 0$ pour tout $r \in R$.

Corollaire 5.3.3. Soient S un préschéma, G un S-groupe de type (RA) , H et H' deux sous-groupes de type (R) de G , $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}'$ leurs Algèbres de Lie. Alors

$$(H = H') \iff (\mathfrak{h} = \mathfrak{h}') .$$

Corollaire 5.3.4. Sous les conditions de 5.2.7 , G étant de type (RA) , les applications

$$H \longmapsto \underline{\mathrm{Lie}}(H/S)$$

$$\mathfrak{h} \longmapsto \underline{\mathrm{Norm}}_G(\mathfrak{h})^\circ$$

réalisent une correspondance bijective entre l'ensemble des sous-groupes de type (R) de G contenant T , et l'ensemble des sous-Algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{g}^\circ$ et stables par T , et dont le normalisateur dans G est lisse le long de la section unité.

Corollaire 5.3.5. Soient S un préschéma, G un S-groupe de type (RR) (5.1.1.) , T un tore maximal de G , H et H' deux sous-groupes de type (R) de G , contenant T . Alors

$$(H = H') \Longleftrightarrow (\mathfrak{h} = \mathfrak{h}') .$$

En vertu des hypothèses de présentation finie, on se ramène comme d'habitude au cas où S est noethérien; il suffit alors de vérifier que $(\mathfrak{h} = \mathfrak{h}') \Longrightarrow H_{S'} = H'_{S'}$, pour tout S' spectre d'un quotient artinien d'un anneau local de S ; on est donc ramené au cas où S est artinien et où on peut appliquer 5.1.8. Posons $G' = G/Z$ et soit $T' = T/Z$ le tore maximal de G' correspondant à T . En vertu de Exp. XII 7.12 , il existe des sous-groupes de type (R) H_1 et H'_1 de G' , contenant T' tels que $H = u^{-1}(H_1)$, $H' = u^{-1}(H'_1)$, où $u : G \to G'$ est le morphisme canonique. Il suffit de prouver $H_1 = H'_1$. Mais par 5.2.7 et 5.1.5 , on a

$$\underline{\mathrm{Lie}}(H_1) = \underline{\mathrm{Lie}}(H'_1) ,$$

et on est ramené à 5.3.3.

Remarque 5.3.6. Le fait que H et H' contiennent le même tore maximal est essentiel pour la validité de 5.3.5 lorsque G n'est pas de type (RA). Exemple : tores maximaux de $SL_{2\,k}$, pour k de caractéristique 2.

Corollaire 5.3.7. Soient S un préschéma, G un S-groupe de type (RR), T un tore maximal de G, H et H' deux sous-groupes de type (R) de G, contenant T. L'ensemble U des $s \in S$ tels que $H_s = H'_s$ est ouvert et fermé dans S et $H_U = H'_U$.

En effet, cela résulte aussitôt de 5.3.5 et 5.2.7.

Corollaire 5.3.8. Le "foncteur des sous-groupes de type (R) contenant T", où T est un tore maximal donné dans un groupe G de type (RR) est formellement non ramifié (Exp. XI 1.1).

Théorème 5.3.9. Soient G un S-groupe de type (RR) (5.1.1), H et H' deux sous-groupes de type (R) (5.2.1). Soit $\underline{Transt}_G(H,H')$ le transporteur strict de H dans H' défini par

$$\underline{Transt}_G(H,H')(S') = \{ g \in G(S') , \ int(g)\, H_{S'} = H'_{S'} \} .$$

Alors $\underline{Transt}_G(H,H')$ est représentable par un sous-préschéma fermé de G, qui est lisse et de présentation finie sur S.

Le fait que $\underline{Transt}_G(H,H')$ soit représentable par un sous-préschéma fermé de G, de présentation finie sur S résulte de Exp. XI 6.11 a). Pour démontrer qu'il est lisse sur S, il faut prouver que si S est affine et si S_o est le sous-préschéma fermé défini par un idéal nilpotent J, et si $g_o \in G(S_o)$ et $int(g_o)\, H_o = H'_o$, il existe un $g \in G(S)$, se projetant sur g_o et tel que

$\mathrm{int}(g)\ H = H'$. Comme la question de lissité est locale pour (ét), on peut supposer que H contient un tore maximal T de G . Alors T_o est un tore maximal de H_o , donc $\mathrm{int}(g_o)\ T_o$ un tore maximal de H'_o . Par Exp. IX 3.6 bis, il existe un tore T' de H' tel que $T'_o = \mathrm{int}(g_o)\ T_o$; par Exp. IX 3.3 bis, il existe donc un $g \in G(S)$, se projetant sur g_o et tel que $\mathrm{int}(g)\ T = T'$. Quitte à remplacer H par $\mathrm{int}(g)\ H$, on peut donc supposer que H et H' contiennent la même tore maximal T et que $H_o = H'_o$. Mais alors $H = H'$ par 5.3.7, cqfd.

Corollaire 5.3.10. Soient G un S-groupe de type (RR) , H un sous-groupe de type (R) de G . Alors $\mathrm{Norm}_G(H)$ est représentable par un sous-préschéma en groupes fermé de G , de présentation finie et lisse sur S .

Raisonnant maintenant comme dans Exp. XI 5.2 bis $\Rightarrow$ 5.4 bis, on obtient :

Corollaire 5.3.11. Sous les hypothèses de 5.3.9 , les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) H et H' sont conjugués localement dans G pour la topologie étale.

(i bis) idem pour la topologie (fpqc).

(ii) Pour tout $s \in S$, $H_{\overline{s}}$ et $H'_{\overline{s}}$ sont conjugués par un élément de $G(\overline{s})$.

(ii bis) Le morphisme structural $\mathrm{Transt}_G(H,H') \longrightarrow S$ est surjectif .

(iii) $\mathrm{Transt}_G(H,H')$ est un fibré principal homogène sous l'action du S-préschéma en groupes lisse et de présentation finie $\mathrm{Norm}_G(H)$.

Remarquons simplement que l'assertion non triviale (iii) $\Longrightarrow$ (i) est le lemme de Hensel.

Utilisant maintenant BIBLE , 6-09 , th. 4 et 9-03, th. 1 , on obtient par 5.3.10 et 5.3.11 :

Corollaire 5.3.12. Soient G un S-groupe de type (RR) . Les sous-groupes de Borel de G sont fermés dans G , leur propre normalisateur, et conjugués localement pour la topologie étale.

Définition 5.3.13. Soient S un préschéma, G un S-préschéma en groupes lisse de présentation finie et à fibres connexes. On appelle couple de Killing de G un couple $T \subset B$ où T est un tore maximal de G et B un groupe de Borel de G contenant T .

Utilisant maintenant la conjugaison des tores maximaux dans B (5.1.2) a) et 5.2.6 , par exemple), on a :

Corollaire 5.3.14. Soit G un S-groupe de type (RR) . Les couples de Killing de G sont conjugués localement pour la topologie étale.

Corollaire 5.3.15. Soit G un S-groupe de type (RR) . Soit T un tore maximal de G , $W_G(T) = \underline{Norm}_G(T)/\underline{Cent}_G(T)$ le groupe de Weyl correspondant (Exp. XIX 6.3) . Le "foncteur des groupes de Borel de G contenant T " est formellement principal homogène sous $W_G(T)$.

Cela résulte aussitôt de 5.3.14 et du fait que si B est un groupe de Borel de G contenant T , on a

$$\underline{Norm}_G(T) \cap B = \underline{Cent}_G(T) ,$$

cf. Exp. XIV 4.4.

Proposition 5.3.16. Soient G un S-groupe de type (RR), H un S-groupe de type (R), $N = \underline{Norm}_G(H)$ son normalisateur (5.3.10). Soient T un tore maximal de H, $W_H(T)$ et $W_N(T)$ les groupes de Weyl correspondants (étales quasi-finis séparés par Exp. XIX 6.3). On a la suite exacte de faisceaux (ét) suivante (les morphismes sont induits par les morphismes évidents) :

$$e \longrightarrow W_H(T) \longrightarrow W_N(T) \longrightarrow N/H \longrightarrow e \ .$$

Le seul point non trivial est le fait que la dernière flèche soit un épimorphisme. Soit donc $n \in N(S')$, $S' \longrightarrow S$. Les deux tores maximaux T et int(n) T de H sont conjugués dans H localement pour la topologie étale. Il existe donc une famille couvrante $\{S'_i \longrightarrow S'\}$ et pour chaque i un $h_i \in H(S'_i)$ avec $int(h_i)\, T = int(n)\, T$. On a donc $n\, h_i^{-1} \in \underline{Norm}_N(T)$, ce qui entraîne le résultat cherché.

Remarque 5.3.17. On peut décrire $W_N(T)$, de la manière suivante : supposons-nous ramenés à la situation de 5.2.7, avec $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{R'}$. Alors $W_N(T) = \underline{Norm}_W(R')$, faisceau des sections de $W = W_G(T)$ qui, opérant sur R, normalisent R'. En effet, par 5.3.5, on a

$$\underline{Norm}_N(T) = \underline{Norm}_G(H) \cap \underline{Norm}_G(T) = \underline{Norm}_G(\mathfrak{h}) \cap \underline{Norm}_G(T) \ .$$

Corollaire 5.3.18. Soient G un S-groupe de type (RR), H un sous-groupe de type (R). Supposons "les groupes de Weyl de G finis", i.e. que pour tout $S' \longrightarrow S$ et tout tore maximal T de $G_{S'}$, le S'-préschéma étale $\underline{Norm}_{G_{S'}}(T)/\underline{Cent}_{G_{S'}}(T)$ soit fini (cf. Exp. XIX 6.3 (iii)). Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) H est fermé dans G.

(ii) $\underline{\mathrm{Norm}_G(H)/H}$ est représentable par un S-préschéma fini étale.

(iii) "les groupes de Weyl de H sont finis".

En effet, on peut supposer que H possède un tore maximal T . Comme $W_N(T)$ est fermé dans $W_G(T)$, $W_N(T)$ est fini sur S . On a évidemment (i) $\Rightarrow$ (iii) , (iii) $\Rightarrow$ (ii) par la suite exacte de 5.3.16 , et (ii) $\Rightarrow$ (i) car si N/H est fini, il est séparé, donc H est fermé dans N .

Remarque 5.3.19. Lorsque G est réductif, les conditions précédentes sur H semblent toujours vérifiées. Nous les démontrons ci-dessous dans la plupart des cas.

5.4. Sous-groupes de type (R) d'un groupe réductif déployé (généralités)

5.4.1. Si H est un sous-groupe de type (R) du groupe réductif G , H contient localement pour la topologie étale un tore maximal de G . Par 2.3 , on peut, localement pour la topologie étale, supposer G déployé par rapport à ce tore. Soit donc (G,T,M,R) un S-groupe déployé, H un sous-groupe de type (R) de G contenant T . Par 5.3.5 un tel sous-groupe est caractérisé par son Algèbre de Lie, laquelle (5.2.7) est localement sur S de la forme $\mathfrak{g}_{R'}$

$$\mathfrak{g}_{R'} = \mathfrak{t} \oplus \coprod_{r \in R'} \mathfrak{g}^r .$$

Définition 5.4.2. Soit (G,T,M,R) un S-groupe déployé. On dira que la partie R' de R est de type (R) si $\mathfrak{g}_{R'}$ est l'Algèbre de Lie d'un sous-groupe de type (R) de G contenant T . Ce sous-groupe, uniquement déterminé par R' , est noté $H_{R'}$.

Lemme 5.4.3. Sous les conditions précédentes, on a les équivalences suivantes :

$$(H \cap Z_r = T) \iff (r \notin R',\ -r \notin R'),$$

$$(H \supset P_r) \iff (r \in R'),$$

$$(H \cap P_r = e) \iff (r \notin R'),$$

$$(H \supset Z_r) \iff (r \in R',\ -r \in R').$$

En effet, $H \cap Z_r$ est un sous-groupe de type (R) de Z_r, par 5.2.5 ; mais un sous-groupe de type (R) de Z_r, contenant T est localement égal à l'un des sous-groupes suivants : T , $T.P_r$, $T.P_{-r}$, Z_r , par 5.3.5.

Lemme 5.4.4. Sous les conditions de 5.4.2 , soit R_+ un système de racines positives; choisissons des ordres sur $R' \cap R_+$ et $R' \cap -R_+$. Le morphisme

$$\Omega_{R_+,R'} = \prod_{r \in R' \cap -R_+} P_r \times_S T \times_S \prod_{r \in R' \cap R_+} P_r \longrightarrow G$$

induit par le produit dans G induit une immersion ouverte

$$\Omega_{R_+,R'} \longrightarrow H_{R'} .$$

Par 5.4.3 , ce morphisme se factorise par $H_{R'}$ et induit donc une immersion $\Omega_{R_+,R'} \longrightarrow H_{R'}$. On raisonne alors comme dans 4.1.1.

Proposition 5.4.5. Soit (G,T,M,R) un S-groupe déployé. Soient R' et R" deux parties de R , de type (R) .

(i) $H_{R'} \cap H_{R''}$ est lisse le long de la section unité, $R' \cap R''$ est de type (R) et on a

$$(H_{R'} \cap H_{R''})^\circ = H_{R' \cap R''} .$$

(ii) On a l'équivalence

$$(H_{R'} \subset H_{R''}) \Longleftrightarrow (R' \subset R'') .$$

En effet, (ii) résulte aussitôt de (i) . Pour prouver (i) , il suffit de prouver que $H_{R'} \cap H_{R''}$ est lisse le long de la section unité : sa composante neutre sera alors un groupe de type (R) contenant T , donc égale à $H_{R' \cap R''}$; mais $\Omega_{R_+,R'} \cap \Omega_{R_+,R''} = \Omega_{R_+,R' \cap R''}$ est un ouvert de $H_{R'} \cap H_{R''}$ contenant la section unité et lisse sur S .

Corollaire 5.4.6. Soient S un préschéma , G un S-groupe réductif , T un tore maximal de G , s un point de S . Si H et H' sont deux sous-groupes de type (R) de G contenant T tels que $H_s \subset H'_s$, il existe un ouvert U de S contenant s tel que $H_U \subset H'_U$.

On peut en effet supposer G déployé par rapport à T . L'assertion résulte alors aussitôt de 5.4.5 (ii).

On est conduit à se demander qu'elles sont les parties R' de type (R) de R . On peut supposer le groupe adjoint; il faut alors vérifier que $\mathfrak{g}_{R'}$ est une Algèbre de Lie et que son normalisateur est lisse le long de la section unité. Le cas le plus important est donné par le

Théorème 5.4.7. Toute partie close R' de R est de type (R) (On rappelle, Exp. XXI 3.1.4 , que $R' \subset R$ est dite close si $r,s \in R'$, $r+s \in R$ entraîne $r+s \in R'$).

Remarque 5.4.8. Nous verrons plus tard (Exp. XXIII 6.6) que si S possède une caractéristique résiduelle distincte de 2 et de 3 (i.e. si 6 n'est pas nul sur S), le fait que $\mathfrak{g}_{R'}$ soit une Algèbre de Lie entraîne déjà que R' est close;

donc R' est de type (R) si et seulement si elle est close. Le théorème 5.4.7 donne donc toutes les parties de type (R) "indépendantes de la caractéristique".

Démontrons d'abord :

Lemme 5.4.9. *Choisissons pour chaque* $r \in R$ *un* $X_r \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^r)^*$.

Soient $r, s \in R$, *avec* $r + s \neq 0$ *et soit* q *le plus grand entier* i *tel que* $r + is \in R$. *Il existe des sections* $M_{r,s,i} \in \Gamma(S, \underline{O}_S)$, *uniquement déterminées, telles que*

$$\mathrm{Ad}(\exp_r(xX_r))\, X_s = X_s + \sum_{i=1}^{q} M_{r,s,i}\, x^i\, X_{s+ir} ,$$

pour tout $x \in \underline{G}_a(S')$, $S' \longrightarrow S$.

En effet, $x \longmapsto \mathrm{Ad}(\exp_r(xX_r))X_s$ définit un morphisme $\underline{G}_{a\,S} \longrightarrow W(\mathfrak{g}) \simeq \underline{G}_{a\,S}^{m}$. Il existe donc des sections $Y_n \in \Gamma(S, \mathfrak{g})$, uniquement déterminées, telles que

$$\mathrm{Ad}(\exp_r(xX_r))\, X_s = \sum_{n \geqslant 0} x^n\, Y_n .$$

Faisant opérer l'automorphisme intérieur défini par une section t de T , on trouve aussitôt

$$\mathrm{Ad}(t)\, Y_n = s(t)\, r(t)^n\, Y_n ,$$

ce qui entraîne $Y_n \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^{s+nr})$. Comme r et s ne sont pas proportionnelles, aucun des $s+nr$ n'est nul; on a donc $Y_n = 0$ pour $n > q$, $Y_n = M_{r,s,n}\, X_{s+nr}$ pour $0 \leqslant n \leqslant q$, où $M_{r,s,n} \in \underline{G}_a(S)$ est uniquement déterminé. Faisant $x = 0$ dans la formule obtenue, on trouve $Y_o = X_s$, ce qui achève la démonstration.

Remarque 5.4.10. En dérivant pour $x = 0$ la formule précédente, on trouve

$$\left[X_r, X_s\right] = N_{r,s}\, X_{r+s}\ ,\quad N_{r,s} = M_{r,s,1}\ ,\ \text{si}\ \ t + s \in R\ ,$$

$$\left[X_r, X_s\right] = 0 \qquad \text{si}\ \ r + s \notin R\ ,\ r + s \neq 0\ .$$

Démontrons maintenant 5.4.7 ; si R' est une partie close de R, alors $\mathfrak{g}_{R'}$ est une sous-Algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$, par 5.4.10 et Exp. XX 2.10, formule (3). Par 5.4.9 et Exp. XX 2.10, formule (2), P_r normalise $\mathfrak{g}_{R'}$ pour chaque $r \in R'$. Choisissons un système de racines positives R_+ et considérons l'ouvert Ω_{R_+} de 4.1.2 ; soit $\Omega_{R_+,R'}$ le sous-préschéma fermé de Ω_{R_+} défini comme suit :

$$\Omega_{R_+,R'} = \Big(\prod_{r \in R' \cap -R_+} P_r\Big) \cdot T \cdot \Big(\prod_{r \in R' \cap R_+} P_r\Big)\ .$$

L'immersion canonique $\Omega_{R_+,R'} \longrightarrow G$ se factorise par $i : \Omega_{R_+,R'} \longrightarrow \underline{\mathrm{Norm}}_G(\mathfrak{g}_{R'})$. Supposons G adjoint ; l'application tangente à i en les points de la section unité est bijective par 5.3.2 ; en particulier, le morphisme i est lisse le long de la section unité (Exp. VI), donc est une immersion locale le long de la section unité, donc $\underline{\mathrm{Norm}}_G(\mathfrak{g}_{R'})$ est lisse le long de la section unité, ce qu'il fallait démontrer.

5.5. Sous-groupes de Borel d'un groupe réductif déployé.

Proposition 5.5.1. Soit (G,T,M,R) un S-groupe déployé. Pour tout système de racines positives R_+ de R, H_{R_+} (qui existe par 5.4.7) est un sous-groupe de Borel de G et, pour tout ordre sur R_+, le morphisme induit par le produit dans G

$$T \times_S \prod_{r \in R_+} P_r \longrightarrow G$$

est une immersion fermée d'image H_{R_+}. On note $B_{R_+} = H_{R_+}$.

Par définition des groupes de Borel, la première assertion peut se vérifier en remplaçant S par le spectre d'un corps algébriquement clos. Soit alors B le sous-groupe de Borel de G contenant T et correspondant au système de racines positives R_+ (BIBLE 10-11, prop. 9); l'algèbre de Lie de B est $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_{R_+}$; on a donc $B = H_{R_+}$ par 5.3.5.

Démontrons la seconde assertion; le morphisme de l'énoncé induit une immersion ouverte $i : T \times_S \prod_{r \in R_+} P_r \longrightarrow H_{R_+}$ (5.4.4). Or i est surjectif (BIBLE, 15-03, cor. 1 à la prop. 1).

Corollaire 5.5.2. Choisissons un ordre quelconque sur R_+ et pour chaque $u \in R_+$ un $X_u \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^u)^*$. Soient $r,s \in R_+$. Pour chaque couple $(i,j) \in \underline{\underline{N}} \times \underline{\underline{N}}$, $i \neq o$, $j \neq o$, tel que $i\,r + j\,s \in R$, il existe une section unique

$$C_{i,j,r,s} \in \Gamma(S, \underline{O}_S)$$

telle que, pour tous $x,y \in \underline{G}_a(S')$, $S' \to S$, on ait

$$\exp_r(xX_r)\,\exp_s(yX_s)\,\exp_r(xX_r)^{-1} = \exp_s(yX_s) \prod_{\substack{(i,j) \in \underline{\underline{N}} \times \underline{\underline{N}},\ i \neq 0,\ j \neq 0 \\ ir + js \in R}} \exp_{ir+js}(C_{ijrs}\, x^i y^j\, X_{ir+js}).$$

Si $r = s$, l'assertion est triviale. Supposons donc $r \neq S$; alors, en vertu de la proposition, il existe des morphismes uniques

$$F_o : \underline{G}_a^2 S \longrightarrow T ,$$

$$F_u : \underline{G}_a^2 S \longrightarrow \underline{G}_a S \quad , \quad u \in R_+ ,$$

tels que l'on ait

$$\exp(xX_r) \exp(yX_s) \exp(xX_r) = F_o(x,y) \prod_{u \in R_+} \exp(F_u(x,y) X_u) .$$

Soit $t \in T(S')$, $S' \to S$. Faisons agir $int(t)$ sur cette formule; on a aussitôt les relations

$$F_o(r(t)\, x\, ,\, s(t)\, y) = F_o(x,y) ,$$

$$F_u(r(t)\, x\, ,\, s(t)\, y) = u(t)\, F_u(x,y) .$$

Comme r et s sont deux caractères linéairement indépendants (sur $\underline{\underline{Q}}$) de T, on conclut comme d'habitude de la première relation que F_o est constant, donc $F_o(x,y) = e$. Ecrivons ensuite

$$F_u(x,y) = \sum a_{ij}\, x^i\, y^j , \quad \text{avec} \quad a_{ij} \in \Gamma(S, \underline{O}_S) .$$

Reportant dans la relation et identifiant les polynomes aux deux membres on trouve

$$a_{ij}\, (r(t)^i\, s(t)^j - u(t)) = 0 .$$

Si $u \neq i\, r + js$, on sait (Exp. XIX 4.13) qu'il existe un $S' \to S$ fidèlement plat quasi-compact et un $t \in T(S')$ avec $r(t)^i\, s(t)^j - u(t) = 1$. On a donc $a_{ij} = 0$ sur S' , donc sur S . Si $u = i\, r + js$, on pose $a_{ij} = C_{i,j,r,s}$. Faisons successivement $X = 0$ et $y = 0$, on trouve $C_{0,1} = 1$, $C_{1,0} = 0$.

Remarque 5.5.3. Dérivant pour $y = 0$ et comparant à 5.4.9 , on trouve

$$C_{i,1,r,s} = M_{r,s,i} .$$

Corollaire 5.5.4. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, T un tore maximal de G , r et s deux racines de G par rapport à T telles que r+s soit non trivial sur chaque fibre. Ordonnons l'ensemble des ir+js ($i,j \in \underline{N}$, $i \neq 0$, $j \neq 0$) de manière quelconque. Pour tous $i,j \in \underline{N}$, $i \neq 0$, $j \neq 0$, il existe un unique morphisme de $\underline{O_S}$-Modules

$$f_{r,s,i,j} : (\mathfrak{g}^r)^{\boxtimes i} \boxtimes (\mathfrak{g}^s)^{\boxtimes j} \longrightarrow \mathfrak{g}^{ir+js}$$

tel que pour tout $S' \to S$ et tous $X \in W(\mathfrak{g}^r)(S')$, $Y \in W(\mathfrak{g}^s)(S')$ on ait (les exp au second membre sont pris au sens de 1.2) :

$$\exp_r(X) \exp_s(Y) \exp_r(-X) = \exp_s(Y) \prod_{(i,j)} \exp_{ir+js}(f_{ij}(X^i Y^j)) .$$

L'assertion est locale pour (fpqc). On peut donc supposer G déployé relativement à T , r et s constantes dans le déploiement. Comme $r+s \neq 0$, il existe un système de racines positives R_+ contenant r et s (Exp. XXI 3.5.4) et on est ramené à 5.5.2.

Corollaire 5.5.5. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif.

(i) G possède localement des groupes de Borel pour la topologie étale. Si T est un tore maximal de G , G possède également localement pour la topologie étale des groupes de Borel contenant T .

(ii) Si T est un tore maximal de G , le "foncteur des groupes de Borel de G contenant T" est représentable par un fibré principal homogène sous $W_G(T)$.

(iii) Si (G,T,M,R) est déployé, tout groupe de Borel B de G contenant T est localement sur S de la forme B_{R_+} , où R_+ est un système de racines positives de R.

(iv) Si $T \subset B$ est un couple de Killing de G, il existe une famille couvrante $\{S_i \longrightarrow S\}$ pour la topologie étale, et pour chaque i un déploiement $(G_{S_i}, T_{S_i}, M_i, R_i)$ et un système de racines positives R_{+i} de R_i tel que $B_{S_i} = B_{R_{+i}}$.

En effet, (i) résulte de 2.3 et 5.5.1, (ii) de (i) et 5.3.15, (iii) de 5.5.1 et (ii), (iv) de 2.3 et (iii).

Lemme 5.5.6. Choisissons sur le groupe $\Gamma_0(R)$ engendré par les racines une structure de groupe totalement ordonné telle que les racines > 0 soient les éléments de R_+ (Exp. XXI 3.5.6). Soient $r_1 < \ldots < r_N$ les éléments de R_+. Considérons l'isomorphisme

$$f : T \times_S P_{r_1} \times_S \ldots \times_S P_{r_N} \longrightarrow B_{R_+}$$

induit par le produit dans G. Posons pour $i = 1, \ldots, N$,

$$U_i = f(P_{r_i} \times_S \ldots \times_S P_{r_N}) .$$

(i) Chaque U_i est un sous-groupe invariant de B_{R_+}

(ii) Pour $1 \leqslant i \leqslant N-1$, U_i s'identifie au produit semi-direct

$$U_i = P_i \cdot U_{i+1} .$$

(iii) B_{R_+} s'identifie au produit semi-direct

$$B_{R_+} = T \cdot U_1 .$$

(iv) Pour $1 \leqslant i \leqslant N-1$, les automorphismes intérieurs de U_1 opèrent trivialement dans U_i/U_{i+1} (qui s'identifie à P_i par (ii)).

Prouvons d'abord par récurrence sur i l'assertion suivante :

U_i est un sous-groupe invariant de B_{R_+}, produit semi-direct de P_i et de U_{i+1},

L'assertion est vraie pour $i = N$; supposons-la vraie pour $i+1$ et prouvons-la pour i . On a (comme préschémas)

$$U_i = P_i . U_{i+1} \quad ;$$

il est d'abord clair que U_i est stable par automorphismes intérieurs de B_{R_+} . C'est clair pour $int(t)$, $t \in T(S)$, il suffit de le vérifier pour $int(x)$, $x \in P_r(S)$, $r \in R_+$. Or U_{i+1} est supposé invariant, il suffit de voir que $int(x)\ P_i \subset U_i$. Par 5.5.2 , si $y \in P_i(S')$, on a $y^{-1}x\,y\,x^{-1} \in U_{i+1}(S')$, ce qui entraîne $int(x)\ y \in U_i(S')$.

Prouvons maintenant que U_i est un sous-groupe de B_{R_+} . Si $x , y \in U_i(S)$, on peut écrire $x = p\,x'$, $y = q\,y'$, avec $p,q \in P_i(S)$, $x',y' \in U_{i+1}(S)$; on a $xy = p\,x'\,q\,y' = pq(p^{-1}x'q)y' \in P_i(S')\ U_{i+1}(S')$; de même $x^{-1} = p^{-1}(p\,x'^{-1}p^{-1})$. Nous avons donc prouvé (i) et (ii) , ainsi que (iv) chemin faisant. Quant à (iii), c'est une conséquence triviale de 5.5.1.

Lemme 5.5.7. Avec les notations précédentes, choisissons pour chaque $1 \leqslant i \leqslant N$ un $X_i \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^{r_i})^*$ et considérons l'isomorphisme

$$a : \underline{G}_a^N S \longrightarrow U_1$$

défini ensemblistement par

$$a(x_1,\ldots,x_N) = \exp_{r_1}(x_1 X_1) \ldots \exp_{r_N}(x_N X_N) \quad .$$

Il existe une famille unique (Q_i) , $i = 1,\ldots,N$ de polynômes

$$Q_i = Q_i(x_1,\ldots,x_N,y_1,\ldots,y_N)$$

à coefficients dans $\Gamma(S,\underline{O}_S)$ telle que l'on ait ensemblistement

$$a(x_1,x_2,\ldots,x_N)\ a(y_1,\ldots,y_N) = a(Q_1(x_1,\ldots,y_N),\ldots,Q_N(x_1,\ldots,y_N)) \quad .$$

De plus, les Q_i sont à coefficients dans le sous-anneau de $\Gamma(S,\underline{O}_S)$ engendré par les $C_{i,j,r,s}$ de 5.5.2 $(r,s \in R_+ , i,j \in \underline{N})$ et chaque Q_i est de la forme

$$Q_i(x_1,\dots,y_N) = x_i+y_i + Q_i'(x_1,\dots,x_{i-1},y_1,\dots,y_{i-1}) .$$

L'existence et l'unicité des Q_i résultent aussitôt du fait que a est un isomorphisme de préschémas. Notant z,z',z'' des sections de U_{i+1} , on a

$$a(x_1,\dots,x_N)\ a(y_1,\dots,y_N) =$$

$$= a(x_1,\dots,x_{i-1},0,\dots,0)\ \exp(x_i\ X_i)\ z$$

$$a(y_1,\dots,y_{i-1},0,\dots,0)\ \exp(y_i\ X_i)\ z' ;$$

utilisant 5.5.6 (i) et (iv), ceci s'écrit

$$a(x_1,\dots,x_{i-1},0,\dots,0)\ a(y_1,\dots,y_{i-1},0,\dots,0)$$

$$\exp((x_i+y_i)\ X_i)\ z'' ;$$

ce qui donne, réutilisant 5.5.6 ,

$$Q_i(x_1,\dots,x_N,y_1,\dots,y_N) = x_i + y_i + Q_i'(x_1,\dots x_{i-1}\ y_1,\dots,y_{i-1}) ,$$

avec

$$Q_i'(x_1,\dots,x_{i-1},y_1,\dots,y_{i-1}) = Q_i(x_i,\dots,x_{i-1},0,\dots,0,y_1,\dots,0) ;$$

soit la forme précise demandée. Démontrons enfin l'assertion sur les coefficients des polynômes Q_i . Soit A le sous-anneau de $\Gamma(S,\underline{O}_S)$ engendré par les $C_{i,j,r,s}$ $(r,s \in R_+ , i,j \in \underline{N})$. Démontrons par récurrence sur i que si $x_1 = x_2 = \dots x_{i-1} = 0$, $y_1 = y_2 = \dots = y_{i-1} = 0$, c'est-à-dire si $a((x_i))$ et $a((y_i))$ sont des sections de U_i , les polynômes

$$R_j(x_i,\dots,x_N,y_i,\dots,y_N) = Q_j((x_i),(y_i)) ,$$

sont à coefficients dans A . C'est trivial pour $i = N$ et aussi pour $j < i$ (car $R_j = 0$). Soit $i < N$, supposons l'assertion vérifiée pour i+1 et prouvons-la pour i (et $j \geqslant i$).

On a

$$a(0,\dots,0,x_i,\dots,x_N) = \exp(x_i\ X_i)\ a(0,\dots,0,x_{i+1},\dots,x_N)$$
$$= \exp(x_i\ X_i)\ Z_i\ .$$

Ecrivons de même

$$a(0,\dots,y_i,\dots,y_N) = \exp(y_i\ X_i)\ T_i\ .$$

On a

$$a(0,\dots,x_i,\dots,x_N)\ a(0,\dots,y_i,\dots,y_N) =$$
$$= \exp(x_i+y_i)\ X_i\ (\mathrm{int}(\exp(-y_i\ X_i))Z_i\ .\ T_i)\ .$$

Or

$$\mathrm{int}(\exp(-y_i\ X_i))\ Z_i = \mathrm{int}(\exp(-y_iY_i))\ \exp(x_{i+1}X_{i+1})\ \dots\exp(x_N\ X_N)$$ est

un produit de $N-i-1$ sections de U_{i+1} dont les coefficients dans la décomposition $U_{i+1} = P_{r_{i+1}} \dots P_{r_N}$ sont des polynômes en y_i et les $x_{i+1},\dots,x_N$ à coefficients dans A (par 5.5.2). Appliquant l'hypothèse de récurrence, on en déduit que les coefficients de

$$\mathrm{int}(\exp(-y_i\ X_i))\ Z_i\ .\ T_i$$

sont également des polynômes à coefficients dans A , ce qui termine la démonstration.

Remarquons que la récurrence précédente donne aussitôt une démonstration du

Lemme 5.5.8. Avec les notations de 5.5.6 , soit pour chaque $i=1,\dots,N$ un morphisme de groupes

$$f_i : P_{r_i} \longrightarrow H\ ,$$

où H est un S-foncteur en groupes. Pour que le morphisme

$$f : U_1 \longrightarrow H$$

défini par

$$f(\exp(x_1 X_1) \cdots \exp(x_N X_N)) = f_1(\exp(x_1 X_1)) \cdots f_N(\exp(x_N X_N))$$

soit un morphisme de groupes, il faut et il suffit que pour tout couple $i < j$, on ait

$$f_j(\exp(x_j X_j))\, f_i(\exp(x_i X_i))\, f_j(\exp(-x_j X_j)) = f(\exp(x_j X_j) \exp(x_i X_i) \exp(-x_j X_j)) .$$

5.6. Sous-groupes de type (R) à fibres résolubles

Proposition 5.6.1. Soient (G,T,M,R) un S-groupe déployé, R' une partie de de type (R) (5.4.2), $H_{R'}$ le sous-groupe de G correspondant. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $H_{R'}$ est à fibres géométriques résolubles.

(ii) Il existe un système de racines positives R_+ tel que $R' \subset R_+$, donc $H_{R'} \subset B_{R_+}$ (5.4.5)

(iii) $R' \cap -R' = \emptyset$.

(iv) Pour tout ordre sur R', le morphisme induit par le produit dans G

$$T \times_S \prod_{r \in R'} P_r \longrightarrow H_{R'}$$

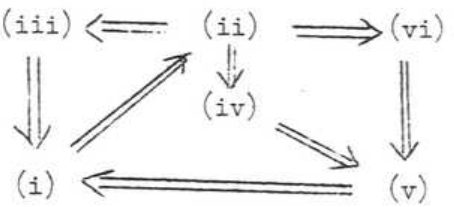
est un isomorphisme.

(v) $H_{R'} \cap \underline{\mathrm{Norm}}_G(T) = T$.

(vi) Pour toute partie R'' de R, de type (R), on a (cf. 5.4.5)

$$H_{R'} \cap \underline{\mathrm{Norm}}_G(H_{R''}) = H_{R' \cap R''} .$$

Nous allons démontrer ces équivalences selon le schéma logique



.

On a évidemment (ii) $\Rightarrow$ (iii) et (vi) $\Rightarrow$ (y) (prendre $R'' = \emptyset$).

Par 5.4.6 (i) $\Rightarrow$ (ii) est à vérifier sur les fibres géométriques; or si S est le spectre d'un corps algébriquement clos, $H_{R'}$ est contenu dans un groupe de Borel contenant T, donc de la forme H_{R_+} (5.5.5 (iii)). De même (iii) $\Rightarrow$ (i) se vérifie sur les fibres géométriques; supposons (iii) vérifié; si $H_{R'}$ n'était pas résoluble, il existerait un sous-tore Q de T, de codimension 1 dans T tel que $\underline{\mathrm{Cent}}_{H_{R'}}(Q)$ ne soit pas résoluble (BIBLE, 10-09, prop. 8); or $\underline{\mathrm{Cent}}_{H_{R'}}(Q)$ a comme Algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{R''}$, où R'' est l'ensemble des racines de R' s'annulant sur Q, donc de la forme $R'' = \emptyset$, où $R'' = \{r\}$ (en vertu de (iii)); donc $\underline{\mathrm{Cent}}_{H_{R'}}(Q)$ qui est un sous-groupe de type (R) de G est T ou $T.P_r$, donc résoluble contrairement à l'hypothèse. De même, (ii) $\Rightarrow$ (iv) se vérifie sur les fibres géométriques (car il s'agit de S-préschémas plats et de présentation finie); par BIBLE, 13-05, th. 1, d) le morphisme en question est bijectif; il induit un isomorphisme sur les espaces tangents à l'origine, et on conclut comme d'habitude (cf. 4.4.1). On a (iv) $\Rightarrow$ (v) par 4.2.7. Pour prouver (v) $\Rightarrow$ (i), on est encore ramené au cas où S est le spectre d'un corps algébriquement clos et on conclut par BIBLE, 10-08, cor. à la prop. 6 et 9-05, cor. 3 au th. 1.

Il ne reste donc à prouver que l'assertion (ii) $\Rightarrow$ (vi). On peut se ramener au cas où G est adjoint. On a alors par 5.3.3 $\underline{\mathrm{Norm}}_G(H_{R''}) = \underline{\mathrm{Norm}}_G(\mathfrak{g}_{R''})$

$\subset$ $\underline{\mathrm{Transp}}_G(\mathfrak{t}, \mathfrak{g}_{R''})$. Par 5.4.5 , il suffit de prouver

$$(x) \qquad H_{R'}(S) \cap \mathrm{Transp}_{G(S)}(\mathfrak{t}, \mathfrak{g}_{R''}) \subset H_{R' \cap R''}(S) .$$

Démontrons d'abord un lemme.

Lemme 5.6.2. Dans les notations de 5.5.7 , soit

$$u = \exp(x_1 X_1) \ldots \exp(x_N X_N)$$

où $x_i \in \underline{G}_a(S)$. Soit m un entier , $1 \leq m \leq N$, tel que $x_i = 0$ pour $i < m$. Si $X \in \Gamma(S, \mathfrak{t})$, la composante de $\mathrm{Ad}(u)\, X$ sur $\mathfrak{g}^{r_m}$ est

$$- \bar{r}_m(X)\, x_m\, X_m .$$

Si $Y \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^{-r_m})$, la composante de $\mathrm{Ad}(u)\, Y$ sur $\mathfrak{t}$ est

$$x_m\, (X_m\, Y)\, H_{r_m} .$$

Notons en effet $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^{r_{m+1}} + \ldots + \mathfrak{g}^{r_N}$. En vertu de 5.4.9 , on a

$$\mathrm{Ad}(\exp(x_i X_i))\, \mathfrak{h} \subset \mathfrak{h} , \quad i > m .$$

Par Exp. XX 2.10 , on a

$$\mathrm{Ad}(\exp(x_i X_i))\, X = X - \bar{r}_i(X)\, x_i\, X_i .$$

Cela donne aussitôt, modulo $\mathfrak{h}$,

$$\mathrm{Ad}(u)\, X = \mathrm{Ad}(\exp(x_m X_m))\, X ,$$

ce qui entraîne le premier résultat

De même, notons $\mathfrak{u} = \mathfrak{g}^{r_1} + \ldots + \mathfrak{g}^{r_m}$. Pour $i > m$, on a $r_i > r_m$, donc (5.4.9)

$$\mathrm{Ad}(u)\, Y - Y \in \mathfrak{u}$$

Appliquant Exp. XX 2.10 , on a donc

$$\mathrm{Ad}(u)\, Y - Y - x_m\, (X_m Y)\, H_{r_m} \in \mathfrak{u} , \text{ cqfd.}$$

Revenons à la démonstration de la formule (x) . Supposons qu'il existe un $h \in H_{R'}(S)$, $h \notin H_{R' \cap R''}(S)$, avec

$$\mathrm{Ad}(h)\, \mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}_{R''} \quad .$$

On peut écrire

$$h = t \ \exp(x_1 X_1) \ldots \exp(x_N X_N) \ .$$

Comme $h \notin H_{R' \cap R''}(S)$, il existe un plus petit m tel que

$$t \exp(x_1 X_1) \ldots \exp(x_{m-1} X_{m-1}) \in H_{R' \cap R''}(S) \ ,$$

$$r_m \notin R'' \ , \quad x_m \neq 0.$$

Alors $h' = \exp(x_m X_m) \ldots \exp(x_N X_N)$ vérifie aussi les conditions impocées à h ci-dessus. Mais par 5.6.2 , la composante de $\mathrm{Ad}(h')\, X$ sur $\mathfrak{g}^{r_m}$ est $-\bar{r}_m(X)\, x_m X_m$, si $X \in \Gamma(S, \mathfrak{t})$. En vertu de l'hypothèse sur h et sur m , on a donc $\bar{r}_m(X) = 0$, ce qui est impossible (car G est supposé adjoint et $\bar{r}_m$ est donc non nul sur chaque fibre).

Remarque 5.6.2. bis. Reprenons les notations de 5.6.2. Si $\mathrm{Ad}(u)$ est l'identité sur $\mathfrak{t}$ et $\mathfrak{g}^{-r_m}$, on a $x_m = 0$. En effet, on a $x_m . \bar{r}_m = 0$, $x_m . H_{r_m} = 0$; si $r_m \notin 2M$, $\bar{r}_m$ est non nul sur chaque fibre; si $r_m \in 2M$, alors $r_m^* \notin 2M^*$ et H_{r_m} est non nul sur chaque fibre; dans chaque cas, cela entraîne $x_m = 0$. Il en résulte que $u = e$ si $\mathrm{Ad}(u)$ opère trivialement sur $\mathfrak{g}$.

Remarque 5.6.3. Si H est un sous-groupe de type (R) du groupe réductif G , à fibres géométriques résolubles, alors H est fermé dans G et $\underline{\mathrm{Norm}}_G(H)/H$ est représentable par un S-schéma fini étale.

Trivial par 5.3.18.

Corollaire 5.6.4. Soient (G,T,M,R) un groupe réductif déployé. Si $R' \subset R$ est close et si $R' \cap -R' = \emptyset$, alors R' est contenu dans un système de racines positives.

En effet, R' est de type (R) par 5.4.7.

Corollaire 5.6.5. Sous les conditions de 5.6.1 , le produit dans G induit un isomorphisme

$$\prod_{r \in R'} P_r \xrightarrow{\sim} U_{R'} ,$$

où $U_{R'}$ est un sous-préschéma en groupes fermé de G , lisse sur S , à fibres géométriques connexes et unipotentes, indépendant du choix de l'ordre sur R'. De plus, $H_{R'}$ est le produit semi-direct $T \cdot U_{R'}$ ($U_{R'}$ invariant).

En effet, si $R' \subset R_+$, $H_{R'} \cap U_1$ (notations de 5.5.6) est un sous-groupe fermé de G de présentation finie, invariant dans $H_{R'}$. Par 5.6.1 (iv), on a $H_{R'} = T \cdot U_{R'}$. ce qui entraîne les autres assertions.

Remarque 5.6.6. En particulier, U_{R_+} est le groupe U_1 de 5.5.6.

Dégageons certains corollaires des résultats précédents concernant les groupes du type $U_{R'}$.

Corollaire 5.6.7. Soient (G,T,M,R) un groupe réductif déployé , R' et R" deux parties de type (R) , avec $R' \cap -R' = \emptyset$.

(i) On a

$$U_{R'} \cap \underline{\mathrm{Norm}}_G(H_{R''}) = U_{R' \cap R''} .$$

(ii) Supposons R' clos. Si $r \in R'$, $s \in R''$, $r+s \in R$ entraîne $r+s \in R'$, alors $H_{R''}$ normalise $U_{R'}$.

En effet, (i) résulte aussitôt de 5.6.5 et 5.6.1 (vi). Pour prouver (ii), il suffit, vu 5.4.4 , de montrer que T et chaque P_s , $s \in$ normalisent $U_{R'}$; pour T , c'est trivial , pour P_s , cela résulte de 5.5.2 et Exp. XXI 2.3.5.

Corollaire 5.6.8. Soient (G,T,M,R) un S-groupe déployé, R_+ un système de racines positives, r une racine simple de R_+ (i.e. un élément de R_+ tel que $R_+ - \{r\}$ soit clos . Notons

$$U_r = U_R - \{r\} .$$

Alors

(i) $U_{\hat{r}}$ est un sous-groupe invariant de B_{R_+} .

(ii) U_{R_+} est le produit semi-direct de $U_{\hat{r}}$ par P_r .

(iii) P_{-r} normalise $U_{\hat{r}}$.

(iv) Z_r normalise $U_{\hat{r}}$.

Si on définit de même $U_{-\hat{r}} = U_{-R_+} - \{-r\}$, on a

$$\Omega_{R_+} = U_{-\hat{r}} \cdot P_{-r} \cdot T \cdot P_r \cdot U_{\hat{r}} \ .$$

En effet , (i) est trivial par 5.6.7 (ii), (ii) est évident par 5.6.5 , (iii) résulte de 5.5.2 [En effet, si $s \in R_+$, $s \neq r$, aucune combinaison $i(-r)+js$, avec $i,j > 0$ ne peut être négativecar s contient au moins une racine simple $\neq r$] , (iv) résulte aussitôt de (i) et (iii) , car $P_{-r}.T.P_r$ est schématiquement dense dans Z_r . La dernière assertion est triviale par (ii) .

Revenons à la situation générale .

Proposition 5.6.9. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, H un sous-groupe de type (R) , à fibres géométriques résolubles.

(i) $D_S(H) = \underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr}}(H, \underline{G}_{m\,S})$ est représentable par un S-groupe constant tordu, dont le type en $s \in S$ est $\underline{Z}^{\mathrm{rgred}(G_s)}$. Le morphisme de bidualité (Exp. VIII 1)

$$f : H \longrightarrow D_S(D_S(H))$$

est lisse et surjectif

(ii) Le noyau H^u de f est le plus grand sous-préschéma en groupes invariant fermé de H , lisse sur S , à fibres géométriques connexes et unipotentes. On dit que c'est la partie unipotente de H . On note aussi $H^u = \mathrm{rad}^u(H)$. C'est aussi le faisceau des commutateurs de H : tout morphisme de groupes de H dans un S-préfaisceau en groupes commutatifs, séparé pour (fppf), s'annule sur H^u et se factorise donc par $H/H^u = D_S(D_S(H))$.

(iii) Si T est un tore maximal de H, le morphisme $T \to H$ induit des isomorphismes $D_S(H) \xrightarrow{\sim} D_S(T)$ et $T \xrightarrow{\sim} D_S(D_S(H))$. De plus, H s'identifie au produit semi-direct de H^u par T.

(iv) Dans la situation de 5.6.1, si $H = H_{R'}$, alors $H^u = U_{R'}$.

Les assertions de la proposition sont locales pour la topologie étale, (Exp. X 5.5). On peut donc se ramener au cas de 5.6.1. On sait (5.6.5) que $H_{R'}$ est le produit semi-direct de $U_{R'}$ par T. Montrons que $U_{R'}$ est le faisceau des commutateurs de $H_{R'}$: comme $H_{R'}/U_{R'} = T$ est commutatif, il suffit de prouver que tout morphisme de groupes $g : H_{R'} \longrightarrow V$ comme dans (ii) s'annule sur $U_{R'}$. Il suffit de prouver que g s'annule sur chaque P_r, $r \in R'$. Or si $t \in T(S')$, $X \in W(\mathcal{O}^r)(S')$, on a

$$e = g(t \exp_r(X)\, t^{-1} \exp_r(-X)) = g(\exp_r(X(r(t)-1))) .$$

Comme $r : T \longrightarrow \underline{G}_{m\,S}$ est fidèlement plat, on en déduit aussitôt que h s'annule sur P_r^* ; mais toute section de P_r est localement somme de deux sections de P_r^*. On a donc

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-}gr}(H,V) = \underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-}gr}(H/U_{R'},V)$$

pour tout V comme ci-dessus. Appliquant ce résultat à $V = \underline{G}_{m\,S}$, on en déduit aussitôt (i) et (iii), puis (iv) et la seconde assertion de (ii). Il nous suffit maintenant de prouver la première assertion de (i) ; le seul fait non trivial est que tout sous-groupe U fermé invariant de H, lisse sur S à fibres géométriques connexes et unipotentes est un sous-groupe de H^u. Or on a d'abord:

Lemme 5.6.10. Soit G un S-groupe réductif, T un tore maximal, U un sous-préschéma en groupes de G, lisse sur S, à fibres géométriques unipotentes, normalisé par T. Alors $U \cap T = e$.

En effet, comme $T = \underline{Cent}_G(T)$, on a $U \cap T = U^T$ (invariants sous $\underline{int}(T)$). Appliquant Exp. XIX 1.4 , on en déduit que $U \cap T$ est lisse sur S , mais il est aussi radiciel sur S : pour tout $s \in S$, $U(\overline{s}) \cap T(\overline{s})$ est fermé d'éléments à la fois unipotents et semi-simples.

Si U est un sous-groupe invariant de H comme ci-dessus, le produit semi-direct $T \cdot U$ est donc un sous-groupe de type (R) de G , à fibres géométriques résolubles. On peut donc le supposer de la forme $H_{R''}$, avec $R'' \subset R'$. Il suffit de prouver $U = U_{R''}$ et on est donc ramené au cas où $H = T \cdot U$; mais le quotient H/U étant commutatif , U est un sous-faisceau du faisceau des commutateurs de H , qui est H^u , cqfd.

Remarquons que nous venons en fait de prouver :

Proposition 5.6.11. *Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, T un tore maximal de G . Les applications*

$$H \longmapsto H^u$$

$$U \longmapsto T.U$$

sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre entre l'ensemble des sous-groupes de type (R) de G , contenant T et à fibres géométriques résolubles, et l'ensemble des sous-groupes fermés (ou rétrocompacts) de G , lisses sur S , normalisés par T , à fibres géométriques connexes et unipotentes. En particulier, si (G,T,M,R) est déployé, $H_{R'}$ et $U_{R'}$ se correspondent.

Corollaire 5.6.12. *Soient S un préschéma, (G,T,M,R) un S-groupe déployé (resp. et R_+ un système de racines positives de R définissant le groupe de Borel B) . Tout sous-préschéma en groupes lisse et de présentation finie de G ,*

à fibres géométriques connexes et unipotentes (resp. tout sous-préschéma en groupe lisse et de présentation finie de B^u) normalisé par T est localement sur S de la forme $U_{R'}$, où R' est une partie de R contenue dans un système de racines positives (resp. une partie de R_+) de type (R).

Pour le cas "respé", il suffit de remarquer que les fibres géométrique groupe donné sont unipotentes et connexes par BIBLE 13-05, th. 1, d).

La proposition 5.6.9 a d'autre part le corollaire suivant :

Corollaire 5.6.13. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, H un sous-groupe de type (R) à fibres géométriques résolubles, $\underline{Tor}(H)$ le foncteur des tores maximaux de H :

$$\underline{Tor}(H)(S') = \{\text{tores maximaux de } H_{S'}\}.$$

Alors $\underline{Tor}(H)$ est représentable par un S-préschéma affine et lisse, qui est un fibré principal homogène sous H^u pour la loi évidente ($(h,T) \mapsto \mathrm{int}(h)\ T$) .

En effet, si T et T' sont deux tores maximaux de $H_{S'}$, il existe une unique section $h \in H^u(S')$ telle que $\mathrm{int}(h)\ T = T'$. L'unicité de h résul aussitôt de $\underline{Norm}_G(T) \cap H^u = e$ (cf. par exemple 5.6.1); il suffit de prouver l'existence de h localement pour la topologie étale et on peut supposer T et conjugués par une section de H ; mais on conclut alors par $H = H^u \cdot T$. Il s'e suit que $\underline{Tor}(H)$ est un faisceau principal homogène sous H^u, qui est affine et lisse sur S, ce qui entraîne aussitôt l'énoncé.

5.7. Théorème de Bruhat

Rappel 5.7.1. Soient k un corps algébriquement clos, G un k-groupe réductif, B un groupe de Borel de G, T un tore maximal de B, $N = \underline{\mathrm{Norm}}_G(T)$. Alors

$$G(k) = B(k)\, N(k)\, B(k) ;$$

c'est le théorème de Bruhat (BIBLE 13-11, cor. 1 au th. 3); plus précisément, avec les notations de 3.6, les ensembles

$$B(k)\, Q_w(k)\, B(k) = B^u(k)\, Q_w(k)\, B^u(k)$$

forment, lorsque w parcourt $(N/T)(k)$ une partition de $G(k)$. Si B' est un autre groupe de Borel de G contenant T, les ensembles $B'(k)\, Q_w(k)\, B(k)$ forment aussi une partition de $G(k)$. En effet, si $w_o \in N(k)$ est tel que $\mathrm{int}(w_o)\, B = B'$, on a

$$w_o\, B(k)\, Q_w(k)\, B(k) = B'(k)\, Q_{w_o w}(k)\, B(k) .$$

Définition 5.7.2. *Soient* (G,T,M,R) *un* S*-groupe déployé,* R_- *un système de racines positives de* R, $B' = B_{R_-}$ *le groupe de Borel qu'il définit. Pour* $w \in W$, *on note*

$$R_-^w = R_- \cap w(R_-)$$

$$B'^u_w = U_{R_-^w} = \prod_{r \in R_-^w} P_r \qquad \text{(cf. 5.6.5)} .$$

Si $n_w \in \underline{\mathrm{Norm}}_G(T)(S)$ est un représentant de w (3.8), on peut aussi écrire

$$B'^u_w = B'^u \cap \mathrm{int}(n_w)\, B'^u .$$

Lemme 5.7.3. Soient (G,T,M,R) un S-groupe déployé, R_+ un système de racines positives de R, $R_- = -R_+$, B (resp. B') le groupe de Borel de G défini par R_+ (resp. R_-). Soient $w \in W$, Q_w et B'^u_w les sous-préschémas de G correspondants (3.8 et 5.7.2).

(i) Le faisceau $B'.Q_w.B$, image du morphisme

$$B' \times_S Q_w \times_S B \longrightarrow G$$

induit par le produit dans G est représentable par un sous-préschéma de G (et en fait un sous-préschéma fermé de l'ouvert $n_w \Omega_{R_+}$).

(ii) Le morphisme

$$B'^u_w \times_S Q_w \times_S B^u \longrightarrow G ,$$

induit par le produit dans G, est une immersion d'image le sous-préschéma précédent.

Montrons d'abord que le morphisme de (ii) est une immersion. Par définition, $\mathrm{int}(n_w)^{-1}$ induit une immersion fermée de B'^u_w dans B'^u, donc le morphisme

$$(u,b) \longmapsto n_w^{-1} u n_w b$$

induit une immersion fermée

$$B'^u_w \times_S B \longrightarrow \Omega_{R_+} .$$

Cela entraîne immédiatement que le morphisme de (ii) induit une immersion fermé du premier membre dans l'ouvert $n_w \Omega_{R_+}$. Pour prouver (i), il suffit de voir que

$$B'(S)\, Q_w(S)\, B(S) = B'^u_w(S)\, Q_w(S)\, B^u(S) .$$

Or, si $r \in R$, on a $\mathrm{int}(n_w)\, P_r(S) = P_{w(r)}(S)$, donc si $w^{-1}(r) \in R_+$,

$$P_r(S)\, Q_w(S)\, B(S) = P_r(S)\, n_w\, T(S)\, B^u(S) =$$

$$= n_w\, P_{w^{-1}(r)}(S)\, T(S)\, B^u(S) = n_w\, B(S) = Q_w(S)\, B^u(S) .$$

Cela entraîne aussitôt, vu la définition de R_-^w l'assertion cherchée.

Théorème 5.7.4. Soient S un préschéma, (G,T,M,R) un S-groupe déployé, B le groupe de Borel défini par le système de racines positives R_+ , B' le groupe de Borel défini par $R_- = -R_+$.

(i) (Théorème de Bruhat) . Les sous-préschémas $B'^u_w . Q_w . B$ forment, pour w parcourant W , une partition de l'ensemble sous-jacent à G .

(ii) Soit pour chaque $w \in W$, un représentant n_w de w dans $\mathrm{Norm}_G(T)(S)$ (3.8) ; les ouverts $n_w \Omega = n_w B'^u.T.B^u$ forment, pour w parcourant W , un recouvrement de G .

Les deux assertions se vérifient en effet sur les fibres géométriques, où on conclut par 5.7.1 et 5.7.3.

Remarque 5.7.5. (i) entraîne que si S est le spectre d'un corps, G(S) est la réunion disjointe des $B'^u_w(S) . T(S) . B^u(S)$. L'assertion correspondante pour un S quelconque (même local ou artinien) est évidemment fausse. Remarquons cependant que (ii) entraîne que si S est local , G(S) est bien la réunion des $n_w \Omega(S)$. En fait :

Corollaire 5.7.6. Soit R_o un système de racines simples du groupe déployé G sur le schéma local S . Alors G(S) est engendré par T(S) et les

$P_r(S)$, $r \in R_o \cup -R_o$. Si G est simplement connexe, G(S) est déjà engendré par les $P_r(S)$, $r \in R_o \cup -R_o$.

En effet, soit H le sous-groupe de G(S) engendré par les $P_r(S)$, $r \in R_o \cup -R_o$. Remarquons d'abord que H contient un représentant de chaque s_r $(r \in R_o)$ dans $\underline{Norm}_G(T)(S)$ (Exp. XX 3.1) , donc un représentant n_w de chaque $w \in W$. Comme tout $r \in R$ s'écrit $w(r_o)$ avec $w \in W$, $r \in R_o$, on a $P_r(S) = int(n_w) P_{r_o}(S) \subset H$. Le sous-groupe engendré par H et T(S) contient donc $\Omega(S)$ et est donc G(S) tout entier, par la remarque faite antérieurement. Si maintenant G est simplement connexe, prouvons que $H \supset T(S)$. Par. Exp. XX 2.7 , H contient $r^*(\underline{G}_m(S))$ pour tout $r \in R_o$, et il suffit d'appliquer 4.3.8.

Remarque 5.7.6.1. Au lieu de prendre pour chaque $r \in R_o$, $P_r(S)$ et $P_{-r}(S)$, on peut se contenter de prendre $P_r(S)$ et un représentant w_r de la symétrie s_r , ou bien $P_r(S)$ et une section de P^*_{-r} , ...

Corollaire 5.7.7. Si G est de rang semi-simple 1 , choisissons un $u_r \in P_r^*(S)$ Alors Ω et $u_r \Omega$ forment un recouvrement de G .

En effet, si u_{-r} est la section de P_{-r} appariée à u_r , on a , par 5.7.4 (ii) ,

$$G = \Omega \cup u_{-r}^{-1} u_r u_{-r}^{-1} \Omega ,$$

d'où

$$G = u_{-r} G = u_{-r} \Omega \cup u_r u_{-r}^{-1} \Omega = \Omega \cup u_r \Omega .$$

Corollaire 5.7.8. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif. Alors G est essentiellement libre sur S (Exp. VIII 6.1) .

En effet, l'assertion est locale pour la topologie (fpqc) , on peut supposer G déployé. Alors G admet un recouvrement par des ouverts isomorphes à $\underline{G}_{a\,S}^{N} \times_S \underline{G}_{m\,S}^{N'}$ donc essentiellement libres.

Lemme 5.7.9. Sous les conditions de 5.7.4 , soit r une racine simple de R_+ et $u_r \in P_r^*(S)$. Pour tout $v \in P_{-r}(S)$, on a

$$\Omega . v \subset \Omega \cup u_r . \Omega$$

On a à comparer deux ouverts de G , il suffit de le faire lorsque S est le spectre d'un corps k . Il faut donc prouver

$$\Omega(k)\, v \subset \Omega(k) \cup U_r \Omega(k) .$$

Or

$$\begin{aligned} \Omega(k)\, v &= B'^{u}(k)\, T(k)\, B^{u}(k)\, v \\ &= U_{-\hat{r}}(k)\, P_{-r}(k)\, T(k)\, P_r(k)\, U_{\hat{r}}(k)\, v \\ &\subset U_{-\hat{r}}(k)\, Z_r(k)\, U_{\hat{r}}(k)\, v . \end{aligned}$$

(On utilise la décomposition de 5.6.8).

Appliquant maintenant 5.6.8 (iii) et utilisant 5.7.7 pour le groupe Z_r , on obtient

$$\Omega(k)\, v \subset U_{-\hat{r}}(k)\, Z_r(k)\, v\, U_{\hat{r}}(k) \subset U_{-\hat{r}}(k)\, Z_r(k)\, U_{\hat{r}}(k) \subset$$

$$U_{-\hat{r}}(k)\, P_{-r}(k)\, T(k)\, P_r(k)\, U_{\hat{r}}(k) \cup U_{-\hat{r}}(k)\, u_r\, P_{-r}(k)\, T(k)\, P_r(k)\, U_{\hat{r}}(k) .$$

Utilisant de nouveau 5.6.8 (iii) (pour R_- au lieu de R_+) , on obtient le résultat.

Proposition 5.7.10. Sous les conditions de 5.7.4., choisissons pour chaque racine simple r un $u_r \in P_r^*(S)$. Soit U_1 le sous-monoïde de $B^u(S)$ engendré par les u_r . Les ouverts $u\,\Omega$, pour $u \in U_1$, forment un recouvrement de G .

Encore une fois, on peut supposer que S est le spectre d'un corps k ; en vertu de 5.7.6 , il suffit de prouver que $\bigcup_{u \in U_1} u\,\Omega(k)$ est stable par multiplication à droite par $T(k)$, $P_r(k)$, $P_{-r}(k)$ (pour r simple). Dans les deux premiers cas, c'est trivial. Dans le dernier, cela résulte du lemme.

Remarque 5.7.11. Signalons un cas particulier de 5.7.2. Si $w = s_r$ est la symétrie par rapport à la racine simple r , alors

$$R_- \cap s_r(R_-) = R_- - \{-r\}$$

(Exp. XXI 3.3.1), et, dans les notations de 5.6.8 , on a donc

$$B'^u_{s_r} = U_{-\hat{r}} \quad .$$

Remarque 5.7.12. En fait, la démonstration de 5.7.10 donne aussitôt l'énoncé suivant : sous les conditions de 5.7.10 , soit Γ le sous-monoïde de $G(S)$; pour que les ouverts $g\,\Omega$ $(g \in \Gamma)$ forment un recouvrement de G , il faut et il suffit que pour tout $s \in S$ et toute racine simple r , on ait

$$(u_r)_{\overline{s}} \; B'^u(\overline{s}) \subset \Gamma . B'^u(\overline{s}) . T(\overline{s}) . B^u(\overline{s}) \quad .$$

Remarque 5.7.13. Par 5.5.5 (iii) , raisonnant comme dans 5.7.1 , on obtient aussitôt la variante suivante de 5.7.4 ; soient (G,T,M,R) un S-groupe déployé, B et B' deux groupes de Borel de G contenant T ; pour tout $w \in W$, le faisceau $B'.Q_w . B$ est représentable par un sous-préschéma de G ; ces sous-préschémas

forment, pour $w \in W$, une partition de l'ensemble sous-jacent à G. On peut aussi donner l'analogue de 5.7.3 (ii) : il faut poser

$$B'^{u}_{w} = B'^{u} \cap \mathrm{int}(n_w)\ \tilde{B}^{u},$$

où $\tilde{B}$ est le groupe de Borel "opposé" à B relativement à T (cf. 5.9.2).

Proposition 5.7.14. *Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, et*

$$\mathrm{Ad} : G \longrightarrow \underline{\mathrm{GL}}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_S)$$

sa représentation adjointe. Alors $\mathrm{Ker}(\mathrm{Ad}) = \underline{\mathrm{Cent}}(G)$, (en d'autres termes, l'homomorphisme canonique déduit de Ad par passage au quotient :

$$\mathrm{ad}(G) = G/\underline{\mathrm{Cent}}(G) \longrightarrow \underline{\mathrm{GL}}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_S)$$

est un monomorphisme.

On peut supposer G déployé. Choisissons sur $\Gamma_o(R)$ une structure d'ordre total compatible avec la structure de groupe et soit R_+ l'ensemble des racines positives. En vertu de 5.7.4 (ii) et de 4.1.6, il suffit de prouver que si n_w est un représentant de l'élément w de W, si $u \in U(S)$, $t \in T(S)$, $v \in U^-(S)$, et si $\mathrm{Ad}(n_w\ v\ t\ u) = \mathrm{Id}.$, alors $w = e$, $v = e$, $u = e$. Pour chaque $m \in R \cup \{0\}$, posons

$$\mathfrak{g}^{>m} = \coprod_{n>m} \mathfrak{g}^{n}, \quad \mathfrak{g}^{<m} = \coprod_{n<m} \mathfrak{g}^{n}.$$

Soit $X \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^{m})$; écrivons $\mathrm{Ad}(t\ u)\ X = \mathrm{Ad}(\ v^{-1}\ n_w^{-1})\ X$.

Or

$$\mathrm{Ad}(t)\mathrm{Ad}(\ u)\ X - m(t)\ X \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^{>m}),$$

$$\mathrm{Ad}(v^{-1}\ n_w^{-1})\ X - \mathrm{Ad}(n_w^{-1})\ X \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^{<w^{-1}(m)}),$$

Si $w \neq e$, il existe un $r \in R$ tel que $w^{-1}(r) < r$, et faisant $m = r$, on en tire une contradiction car

$$\mathrm{Ad}(t\ u)\ X \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^{m} + \mathfrak{g}^{>m}) \cap (\mathfrak{g}^{w^{-1}(m)} + \mathfrak{g}^{<w^{-1}(m)}) = 0.$$

On a donc $w = e$, et on peut choisir $n_w = e$; on a alors

$$\mathrm{Ad}(v^{-1})\, X - X \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^{<m} \cap (\mathfrak{g}^{m} + \mathfrak{g}^{>m})) = 0 ,$$

d'où $\mathrm{Ad}(v)\, X = X$ et donc $\mathrm{Ad}(v) = \mathrm{Id}$. . De même $\mathrm{Ad}(u) = \mathrm{Id}$. On conclut alors par 5.6.2 bis.

5.8. Schémas associés à un groupe réductif .

Théorème 5.8.1. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif. Soit $\mathcal{H}$ le foncteur des sous-groupes de type (R) de G : pour tout $S' \to S$, $\mathcal{H}(S')$ est l'ensemble des sous-groupes de type (R) de $G_{S'}$ (5.2.1). Alors $\mathcal{H}$ est représentable par un S-préschéma quasi-projectif, de présentation finie sur S .

En vertu de Exp. XII 7.12 , on peut supposer que G est adjoint. Considérons alors le morphisme

$$u : \mathcal{H} \longrightarrow \underline{\mathrm{Grass}}(\mathfrak{g})$$

qui associe à chaque sous-groupe de type (R) son Algèbre de Lie (qui est un sous-Module localement facteur direct de $\mathfrak{g}$) . C'est un monomorphisme par 5.3.3 Il suffit de prouver qu'il est représentable par une immersion de présentation finie, autrement dit de prouver l'assertion suivante : étant donné un sous-Module localement facteur direct $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, les $S' \to S$ tels que $\mathfrak{h}_{S'}$ soit l'Algèbre de Lie d'un sous-groupe de type (R) de $G_{S'}$ sont exactement ceux qui se factorisent par un certain sous-préschéma de présentation finie de S . On peut évidemment supposer S noethérien et $\mathfrak{h}$ de rang constant r . On doit d'abord écrire que $\mathfrak{h}_{S'}$ est une sous-Algèbre de Lie de $G_{S'}$, i.e. que si on considère le produit fibré du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h} & \xrightarrow{[\,,\,]} & \mathfrak{g} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathfrak{h}' & \xrightarrow{v} & \mathfrak{h}, \end{array}$$

$v_{S'}$ est un isomorphisme. Comme $\mathfrak{h}$ est localement libre, cette condition s'exprime par le fait que $S' \longrightarrow S$ se factorise par un certain sous-préschéma ouvert de S. On remplace donc S par ce sous-préschéma et on doit maintenant écrire (5.3.1) que si on note $H = \underline{\mathrm{Norm}}_G(\mathfrak{h})$ (qui est un sous-préschéma en groupes fermé de G), $H_{S'}$ est lisse le long de la section unité. Introduisant l'image réciproque $\underline{n}_{H/G}$ du faisceau conormal $\underline{N}_{H/G}$ par le morphisme $e_H : S \longrightarrow H$, on doit exprimer (SGA II 4.10) que le morphisme canonique

$$w : \underline{n}_{H/G} \longrightarrow \underline{\omega}^1_{G/S}$$

est universellement injectif sur S' (i.e. que $w_{S'}$ est universellement injectif) et que $\underline{\omega}^1_{H/S} \otimes_{\underline{O}_S} \underline{O}_{S'}$ est localement libre de rang r. La première condition est encore équivalente au fait que $S' \longrightarrow S$ se factorise par un certain sous-préschéma ouvert de S ; remplaçons S par ce sous-préschéma. La seconde condition s'exprime par le fait que $S' \longrightarrow S$ se factorise par un sous-préschéma Z de S (TDTE IV 3.6). Remplaçant S par Z, il ne nous reste plus qu'à exprimer que $(\underline{\mathrm{Norm}}_G(\mathfrak{h})^\circ)_{S'}$ est de même rang réductif que $G_{S'}$, en tout point $s' \in S'$, ou, ce qui revient au même, que H_s est de même rang réductif que G_s en tout point s de l'image (ensembliste) de S' dans S. Or cette condition définit un sous-ensemble ouvert de S (Exp. XIX 6.2).

Remarque. En général, il n'est pas lisse sur S. Il l'est cependant si 6 est inversible sur S, ou s'il existe $p \in \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$ tel que $p.1_S = 0$.

Corollaire 5.8.2. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, H un sous-groupe de type (R) de G (On rappelle (5.3.10), que $\underline{\mathrm{Norm}}_G(H)$ est représentable par un sous-préschéma en groupes fermé de G, lisse sur S). Alors le faisceau quotient $G/\underline{\mathrm{Norm}}_G(H)$ est représentable par un S-préschéma quasi-projectif, lisse et de présentation finie sur S (qui est en fait un ouvert de $\mathcal{H}$).

En effet, considérons le morphisme

$$f : G \longrightarrow \mathcal{H} ,$$

défini ensemblistement par $f(g) = \mathrm{int}(g)\, H$. En vertu de 5.3.9, ce morphisme est lisse et de présentation finie, donc ouvert. Soit $U = f(G)$ muni de sa structure de sous-préschéma ouvert de $\mathcal{H}$. Le morphisme $G \longrightarrow U$ est couvrant et de noyau $\underline{\mathrm{Norm}}_G(H)$, ce qui prouve que $G/\underline{\mathrm{Norm}}_G(H)$ est représentable par U.

Corollaire 5.8.3. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif. Considérons les foncteurs $\underline{\mathrm{Tor}}(G)$, $\underline{\mathrm{Bor}}(G)$, $\underline{\mathrm{Kil}}(G)$ définis par

$$\underline{\mathrm{Tor}}(G)(S') = \{\text{Tores maximaux de } G_{S'}\} ,$$
$$\underline{\mathrm{Bor}}(G)(S') = \{\text{Groupes de Borel de } G_{S'}\} ,$$
$$\underline{\mathrm{Kil}}(G)(S') = \{\text{Couples de Killing de } G_{S'} , \text{ (cf. 5.3.13)}\} .$$

(i) Tor(G), Bor(G), Kil(G) sont représentables par des S-préschémas lisses et de présentation finie, à fibres géométriques intègres respectivement affine, projectif, affine sur S.

(ii) Le morphisme canonique $\underline{\mathrm{Kil}}(G) \longrightarrow \underline{\mathrm{Tor}}(G)$ (resp. $\underline{\mathrm{Kil}}(G) \longrightarrow \underline{\mathrm{Bor}}(G)$) est étale fini surjectif (resp. affine lisse surjectif).

(iii) Soit T un tore maximal de G (resp. B un groupe de Borel de G, resp. $B \supset T$ un couple de Killing de G). Le morphisme

$$G \longrightarrow \underline{\mathrm{Tor}}(G)$$

$$(\text{ resp. } \quad G \longrightarrow \underline{\mathrm{Bor}}(G) \quad ,$$

$$\text{resp. } \quad G \longrightarrow \underline{\mathrm{Kil}}(G) \quad)$$

défini par

$$g \longmapsto \mathrm{int}(g)\, T$$

$$(\text{ resp. } \quad g \longmapsto \mathrm{int}(g)\, B \quad ,$$

$$\text{resp. } \quad g \longmapsto (\mathrm{int}(g)\, B \,,\, \mathrm{int}(g)\, T\,)\,)$$

induit un isomorphisme

$$G/\underline{\mathrm{Norm}}_G(T) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Tor}}(G)$$

$$(\text{ resp. } \quad G/B \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Bor}}(G) \quad ,$$

$$G/T \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Kil}}(G) \quad) \ .$$

On voit d'abord que (iii) résulte du théorème de conjugaison des tores maximaux (resp. Borels, resp. couples de Killing) et du fait que $\underline{\mathrm{Norm}}_G(B) = B$, $\underline{\mathrm{Norm}}_G(B) \cap \underline{\mathrm{Norm}}_G(T) = T$, tous résultats établis précédemment (5.1.2 , 5.3.12 , 5.3.14 , 5.6.1) .

Il s'ensuit d'abord que les morphismes canoniques

$$\underline{\mathrm{Tor}}(G) \longrightarrow \mathcal{H}$$

$$\underline{\mathrm{Bor}}(G) \longrightarrow \mathcal{H}$$

sont représentables, localement pour la topologie étale, par des immersions ouvertes (5.8.2 et 5.12 , resp. 5.5.5), donc par descente que $\underline{\mathrm{Tor}}(G)$ et $\underline{\mathrm{Bor}}(G)$ sont représentables par des ouverts de $\mathcal{H}$. De même $\underline{\mathrm{Kil}}(G)$ est localement (pour (et)) représentable par un préschéma affine sur la base (Exp. IX 2.3), donc représentable par un S-préschéma affine, par descente des schémas affines. Les assertions de (ii) résultent aussitôt de 5.5.5 (ii) et 5.6.13. Il s'ensuit déjà que $\underline{\mathrm{Tor}}(G)$

est affine sur S (EGA II 6.7.1). Il ne reste donc à prouver que le fait que Bor(G) est projectif sur S . On sait déjà qu'il est quasi-projectif, reste à prouver qu'il est propre; or il est à fibres connexes, donc EGA IV 15.7.10. est ramené à le prouver sur les fibres géométriques; si S est le spectre d'un corps algébriquement clos, on a Bor(G) = G/B par (iii) et on conclut par BIBLE, 6-09, th. 4 .

Remarque 5.8.4. Sous les conditions de 5.8.3 , soit Q un sous-groupe central et de type multiplicatif de G . Les morphismes évidents définissent des iscmorphismes

$$\mathrm{Tor}(G) \simeq \mathrm{Tor}(G/Q) \ , \ \mathrm{Bor}(G) \simeq \mathrm{Bor}(G/Q) \ ,$$
$$\mathrm{Kil}(G) \simeq \mathrm{Kil}(G/Q) \ .$$

Corollaire 5.8.5. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif , P un sous-préschéma en groupes de G , lisse et de présentation finie sur S . Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Pour chaque $s \in S$, $P_{\overline{s}}$ est un sous-groupe parabolique de $G_{\overline{s}}$ (i.e. le préschéma quotient $G_{\overline{s}}/P_{\overline{s}}$ est propre sur $\overline{s}$, ou encore $P_{\overline{s}}$ contient un groupe de Borel de $G_{\overline{s}}$, cf. BIBLE , 6-09, th. 4) .

(ii) Le faisceau quotient G/P est représentable par un S-préschéma lisse et projectif sur S .

De plus, sous ces conditions , P est fermé dans G , à fibres connexes et $P = \mathrm{Norm}_G(P)$.

On a évidemment (ii) $\Rightarrow$ (i) . Si (i) est vérifié, $P_{\overline{s}}$ est connexe et $\mathrm{Norm}_{G(\overline{s})}(P_{\overline{s}}) = P(\overline{s})$, comme il résulte aussitôt de la conjugaison des groupes de

Borel (pour le second point, cf. BIBLE, 12-06, lemme 4); il s'ensuit que P est de type (R), et que $P = \underline{Norm}_G(P)$, donc est fermé dans G. Par 5.8.2, $G/P = G/\underline{Norm}_G(P)$ est représentable par un S-préschéma quasi-projectif. Ses fibres sont connexes et propres, il est donc projectif par le raisonnement de 5.8.3.

Remarque 5.8.6. Les énoncés 5.8.1, 5.8.2, 5.8.5 sont évidemment valables pour un S-groupe de type (RA), ou pour un S-groupe de type (RR) vérifiant 5.1.8.

Remarque 5.8.7. Par l'intermédiaire des automorphismes intérieurs de G, on a des opérations canoniques :

$$G \longrightarrow \underline{Aut}_S(\underline{Tor}(G)) ,$$

$$G \longrightarrow \underline{Aut}_S(\underline{Bor}(G)) ,$$

$$G \longrightarrow \underline{Aut}_S(\underline{Kil}(G)) ,$$

qui, dans la situation de 5.8.3. (iii), s'identifient aux opérations canoniques

$$G \longrightarrow \underline{Aut}_S(G/\underline{Norm}_G(T)) ,$$

$$G \longrightarrow \underline{Aut}_S(G/B) ,$$

$$G \longrightarrow \underline{Aut}_S(G/T) .$$

On en conclut en particulier que

$$\mathrm{Ker}(G \longrightarrow \underline{Aut}_S(\underline{Tor}(G))) =$$

$$= \mathrm{Ker}(G \longrightarrow \underline{Aut}_S(\underline{Bor}(G))) =$$

$$= \mathrm{Ker}(G \longrightarrow \underline{Aut}_S(\underline{Kil}(G))) =$$

$$= \underline{Cent}(G) .$$

Il est en effet clair que $\underline{Cent}(G)$ opère trivialement sur chacun des trois schémas.

Réciproquement, le noyau de $G \to \underline{\mathrm{Aut}}_S(\underline{\mathrm{Kil}}(G))$ est "l'intersection des tores maximaux de G" au sens de 4.1.7, donc $\underline{\mathrm{Cent}}(G)$ (loc. cit.). Pour $\underline{\mathrm{Bor}}(G)$, on remarque que "l'intersection des groupes de Borel de G" est aussi "l'intersection de ses tores maximaux" (voir n° suivant). Pour $\underline{\mathrm{Tor}}(G)$, on utilise Exp. XII 4.11.

5.9. Propriétés particulières aux groupes de Borel .

La plupart de ces propriétés seront généralisées dans Exp. XXVI aux groupes paraboliques.

Définition 5.9.1. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, B et B' deux groupes de Borel de G . On dit que B et B' sont en position générale (ou que B' est en position générale relativement à B) si $B \cap B'$ est un tore (maximal) de G . Si T est un tore maximal de G contenu dans B et B', on dit que B et B' sont opposés (relativement à T) si $B \cap B' = T$.

Proposition 5.9.2. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, B un groupe de Borel de G , T un tore maximal de B . Il existe un unique groupe de Borel B' de G , opposé à B relativement à T . Si (G,T,M,R) est un déploiement de G par rapport à T et si $B = B_{R_+}$ (5.5.1), alors $B' = B_{-R_+}$.

Par descente fidèlement plate, il suffit de prouver la proposition dans le cas déployé, $B = B_{R_+}$ (5.5.5 (iv)). Alors B_{-R_+} est bien opposé à B (4.1.2); montrons que c'est le seul groupe de Borel de G contenant T qui est opposé à B. Si B' est un groupe de Borel de G contenant T , B' est localement sur S de

la forme $B_{R'_+}$, où R'_+ est un deuxième système de racines positives de R (5.5.5 (iii)). Si $R'_+ \neq -R_+$, il existe $r \in R'_+ \cap R_+$, donc tel que $P_r \subset B_{R_+} \cap B_{R'_+}$.

Proposition 5.9.3. *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-groupe réductif,* B *un groupe de Borel de* G.

(i) *Si* B' *est un groupe de Borel de* G, *les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) B' *est en position générale par rapport à* B (5.9.1).

(b) $B'^u \cap B^u = e$.

(b') $B'^u \cap B = e$.

(c) *Le produit dans* G *induit une immersion ouverte*

$$B'^u \times_S B \longrightarrow G$$

(c') *Le morphisme canonique*

$$B'^u \longrightarrow G/B$$

est une immersion ouverte.

(ii) *Le foncteur* $\underline{Opp}(B)$:

$$S' \longmapsto \left\{\begin{array}{l}\text{groupes de Borel de } G_{S'} \text{ en} \\ \text{position générale par rapport à } B_{S'}\end{array}\right\}$$

est représentable par un sous-préschéma ouvert de $\underline{Bor}(G)$ (5.8.3). *Le morphisme*

$$\underline{Opp}(B) \longrightarrow \underline{Tor}(B)$$

défini par $B' \longmapsto B \cap B'$ *est un isomorphisme. En particulier* (5.6.13) *les automorphismes intérieurs de* B^u *munissent* $\underline{Opp}(B)$ *d'une structure de fibré principal homogène sous* B^u.

Examinons d'abord (i). On a (a) $\Rightarrow$ (c), en effet, (c) est local pour

la topologie étale; par 5.5.5 (iv), on se ramène au cas où G est déployé par rapport à $B \cap B'$ et B de la forme B_{R_+} ; par 5.9.2 , on a alors $B'^u = U_{-R_+}$ et on est ramené à 4.1.2 . On a trivialement (c')$\Longleftrightarrow$(c)$\Rightarrow$(b')$\Rightarrow$(b) . Il reste donc à prouver (b)$\Rightarrow$(a) . Démontrons d'abord (ii) ; la seconde assertion est une conséquence formelle de 5.9.2 , la troisième en résulte aussitôt par 5.6.13 ; démontrons alors la première; elle est locale pour la topologie étale et on peut donc supposer que B possède un tore maximal T ; soit B'_o l'opposé à B relativement à T (5.9.2).

D'après ce qui précède le morphisme $B^u \longrightarrow \underline{Bor}(G)$ induit par le morphisme canonique $G \longrightarrow G/B'_o \longrightarrow \underline{Bor}(G)$ (5.8.3) induit un isomorphisme $B^u \longrightarrow \underline{Opp}(G)$.

On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} B^u & \longrightarrow & G/B'_o \\ \downarrow\wr & & \downarrow\wr \\ \underline{Opp}(B) & \longrightarrow & \underline{Bor}(G) \end{array} .$$

Or le morphisme $B^u \longrightarrow G/B'_o$ est une immersion ouverte (par (i) (a)$\Rightarrow$(c')) , ce qui achève de prouver (ii) . Notons tout de suite le corollaire

Corollaire 5.9.4. *Soient G un S-groupe réductif et B et B' deux groupes de Borel de G . Si $s \in S$ est tel que B_s et B'_s soient en position générale, il existe un ouvert U de S contenant s tel que B_U et B'_U soient en position générale.*

Il ne nous reste donc qu'à prouver (b)$\Rightarrow$(a) . En vertu du corollaire précédent, il suffit de le faire lorsque S est le spectre d'un corps k algébriquement clos. On peut supposer G déployé par rapport à un tore maximal T de B .

Soit B'_o le groupe de Borel opposé à B. Les groupes de Borel de G sont conjugués, donc il existe $g \in G(k)$ avec $\mathrm{int}(g)\, B'_o = B'$. Par le théorème de Bruhat, on peut écrire $g = b\, n\, b'$, avec $b \in B(k)$, $b' \in B'_o(k)$, $n \in \underline{\mathrm{Norm}}_G(T)(k)$. On a donc

$$B' = \mathrm{int}(b)\, \mathrm{int}(n)\, B'_o$$

et $B' \cap B = \mathrm{int}(b)(\mathrm{int}(n)B'_o \cap B)$. Si $n \in T(k)$, $\mathrm{int}(n)\, B'^{u}_o \cap B^u \neq e$ (cf. preuve de 5.9.2); il en résulte que (b) entraîne $B' \cap B = \mathrm{int}(b)(B'_o \cap B) =$ $= \mathrm{int}(b)\, T$, cqfd.

Proposition 5.9.5. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, B un groupe de Borel de G, B^u sa partie unipotente. Il existe une suite de sous-groupes de B :

$$U_o = B^u \supset U_1 \supset \ldots \supset U_n \supset \ldots$$

possédant les propriétés suivantes :

(i) Chaque U_i est lisse, à fibres connexes, caractéristique dans B ; les automorphismes intérieurs de B^u opèrent trivialement dans les (faisceaux) quotients U_i/U_{i+1}, $i \geqslant 0$.

(ii) Pour chaque $i \geqslant 0$, il existe un $\mathcal{O}_S$-Module localement libre $\mathcal{E}_i$ et un isomorphisme de S-faisceaux en groupes

$$U_i/U_{i+1} \xrightarrow{\sim} W(\mathcal{E}_i)\ .$$

(iii) Pour tout $s \in S$, $U_{n\,s} = e$ pour $n \geqslant \dim(B^u_s)$.

Supposons d'abord qu'il existe un déploiement (G,T,M,R) de G et un système de racines positives R_+ de R tel que $B = B_{R_+}$. On note R_o l'ensemble

des racines simples de R_+ ; pour chaque $r \in R_+$, on note $\mathrm{ord}(r)$ la somme des coefficients de r sur la base R_o de $\Gamma_o(R)$, c'est l'ordre de r relativement à R_+ . On a $\mathrm{ord}(r) \leq \mathrm{Card}(R_+)$. Pour tout $i > 0$, soit $R^{(i)}$ l'ensemble des racines d'ordre $> i$, c'est un ensemble clos de racines positives, on peut donc construire (5.6.5)

$$U_i = U_{R_i} .$$

Si $r \in R_+$ et $s \in R^{(i)}$, $r+s \in R^{(i+1)}$. Il s'ensuit, par 5.5.2 , que chaque U_i est un sous-groupe invariant de B et que les automorphismes intérieurs de B^u opèrent trivialement dans U_i/U_{i+1} . Ce groupe s'identifie d'ailleurs à

$$\prod_{\mathrm{ord}(r) = i+1} P_r$$

et est donc muni d'une structure vectorielle. Si B est de la forme $B_{R'_+}$ pour un autre déploiement (G,T',M',R') de G , montrons que les groupes U'_i construits comme ci-dessus à l'aide du nouveau déploiement coïncident avec les U_i et que les structures vectorielles sur les quotients successifs coïncident également. Par 5.6.12 , il existe $b \in B^u(S)$ avec $T' = \mathrm{int}(b)\, T$; l'assertion à démontrer est locale sur S et on peut donc supposer que l'isomorphisme $T \xrightarrow{\sim} T'$ induit par $\mathrm{int}(b)$ provient par dualité d'un isomorphisme de données radicielles

$$h : (M',M'^*,R',R'^*) \xrightarrow{\sim} (M,M^*,R,R^*) .$$

Il est clair que les racines de R'_+ sont les $r \circ \mathrm{int}(b) = h(r)$, $r \in R_+$; que les racines simples de R'_+ sont les $r \circ \mathrm{int}(b) = h(r)$, $r \in R_o$, donc que $\mathrm{ord}(h(r)) = \mathrm{ord}(r)$ pour $r \in R_+$. D'autre part, il est clair par transport de structure que les groupes vectoriels $P'_{h(r)}$ ne sont autres que les $\mathrm{int}(b)\, P_r$. On a donc $\mathrm{int}(b)\, U_i = U'_i$, or U_i étant invariant, cela donne $U_i = U'_i$.

De même l'isomorphisme de groupes vectoriels

$$\mathrm{int}(b) : U_i/U_{i+1} \xrightarrow{\sim} U'_i/U'_{i+1}$$

est l'identité, en vertu de ce qu'on a déjà démontré.

Traitons maintenant le cas général. Il existe une famille couvrante (et) $\{S_i \longrightarrow S\}$ et pour chaque i un déploiement (G_i,T_i,M_i,R_i) et un système de racines positives R_{+i} de R_i tel que $B \times_S S_i = B_{R_{+i}}$ (5.5.5 , (iii)). Pour chaque i , on a donc une famille

$$B_{S_i} = U_{i,o} \supset U_{i,1} \supset \ldots \supset U_{i,j} \supset \quad \ldots$$

et des structures vectorielles sur les $U_{i,j}/U_{i,j+1}$. Par descente, il suffit de prouver que pour tout couple (i,i') et tout j , on a

$$U_{i,j} \times_{S_i} S_{ii'} = U_{i',j} \times_{S_{i'}} S_{i'i'}$$

(on note $S_{ii'} = S_i \times_S S_{i'}$) et que les structures vectorielles sur les quotients $(U_{i,j}/U_{i,j+1}) \times_{S_i} S_{ii'}$ et $(U_{i',j}/U_{i',j+1}) \times_{S_{i'}} S_{ii'}$ coïncident. Or si $S_{ii'} = \emptyset$, c'est trivial ; si $S_{ii'} \neq \emptyset$, alors on est dans la situation étudiée précédemment : $B \times_S S_{ii'}$ est défini par le système de racines positives R_{+i} (resp. $R_{+i'}$) dans le déploiement $(G_{S_{ii'}}, T_i \times_{S_i} S_{ii'}, M_i, R_i)$ (resp. $(G_{S_{ii'}}, T_{i'} \times_{S_{i'}} S_{ii'}, M_{i'}, R_{i'})$) .

Corollaire 5.9.6. Si S est affine , $H^1(S,B^u) = e$: tout fibré principal sous B^u possède une section.

En effet, S se décompose en somme directe de sous-préschémas sur chacun desquels B^u est de dimension relative constante. On peut donc, par (iii) supposer qu'il existe un n tel que $U_n = e$. Comme $H^1(S,U_i/U_{i+1}) = H^1(S,W(\underline{E}_i)) = 0$ par TDTE I, B, 1.1 , on a $H^1(S,B^u) = 0$.

Corollaire 5.9.7. Si S est affine, B possède des tores maximaux. Si T est un tore maximal de B , $H^1(S,T) = H^1(S,B)$.

La première assertion résulte aussitôt de 5.9.6 et 5.6.13 ; la seconde s'en déduit de manière standard.

Corollaire 5.9.8. Si G est un S-groupe réductif, le morphisme canonique (5.8.3)

$$\underline{\mathrm{Kil}}(G) \longrightarrow \underline{\mathrm{Bor}}(G)$$

possède des sections au-dessus de tout ouvert affine.

Corollaire 5.9.9. Sous les conditions de 5.9.5 , supposons S affine, alors il existe un $\underline{O}_S$-Module localement libre $\underline{E}$ tel que B^u soit, comme préschéma, S-isomorphe à $W(\underline{E})$.

En effet, démontrons par récurrence sur i que B^u/U_i est S-isomorphe à $W(\underline{E}_o \oplus \dots \oplus \underline{E}_{i-1})$. C'est clair pour $i = 0$. Supposons $i \geqslant 1$, B^u/U_i est un fibré principal homogène de base B^u/U_{i-1} sous le groupe $(U_{i-1}/U_i)_{B^u/U_{i-1}}$. Comme B^u/U_{i-1} est affine par l'hypothèse de récurrence et $U_{i-1}/U_i = W(\underline{E}_{i-1})$, ce fibré est trivial, on a donc (au moins) un isomorphisme de S-préschémas

$$B^u/U_i \xrightarrow{\sim} B^u/U_{i-1} \times_S W(\underline{E}_{i-1}) = W(\underline{E}_o \oplus \dots \oplus \underline{E}_{i-1}) .$$

On conclut aussitôt par la condition (iii) de 5.9.5.

Corollaire 5.9.10. Soit S un schéma semi-local , $\{ s_i \}$ ses points fermés , B un groupe de Borel du S-groupe réductif G . L'application canonique

$$B^u(S) \longrightarrow \prod_i B^u(\operatorname{Spec} k(s_i))$$

est surjective.

En effet, si $S = \operatorname{Spec}(A)$, $k(s_i) = A/p_i$ et si $\underline{E}$ est donné par le A-Module E , on a

$$B^u(S) = E \otimes A , \quad B^u(\operatorname{Spec} k(s_i)) = E \otimes_A A/p_i .$$

L'assertion résulte alors aussitôt du fait que $A \longrightarrow \prod_i A/p_i$ est surjectif.

5.10. Sous-groupes de type (R) à fibres réductives .

Proposition 5.10.1. Soient (G,T,M,R) un S-groupe déployé, R' une partie de R de type (R) (5.4.2) , $H_{R'}$ le sous-groupe de G correspondant. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $H_{R'}$ est réductif (i.e. à fibres géométriques réductives) .

(ii) On a $R' = -R'$, i.e. R' est symétrique.

De plus, sous ces conditions, $(H_{R'},T,M,R')$ est un déploiement de $H_{R'}$; pour tout système de racines positives R_+ de R , $R'_+ = R' \cap R_+$ est un système de racines positives de R' et

$$B_{R_+} \cap H_{R'} = H_{R'_+}$$

est un groupe de Borel de $H_{R'}$, dont la partie unipotente est

$$U_{R_+} \cap H_{R'} = U_{R'_+} .$$

On a évidemment (i) $\Rightarrow$ (ii) (il suffit de le vérifier fibre par fibre et R' est un système de racines de $H_{R'}$ par rapport à T) . Pour prouver (ii) $\Rightarrow$(i) , on remarque par 5.4.3 , que $H_{R'} \cap Z_r = \mathrm{Cent}_{H_{R'}}(T_r) = Z_r$ pour tout $r \in R'$ et on applique le critère de Exp. XIX 1.12. Si R_+ est un système de racines positives de R , $R_+ \cap R'$ est évidemment une partie close de R' telle que $R'_+ \cap -R'_+ = R'$ et $R'_+ \cap -R'_+ = \emptyset$, donc un système de racines positives de R' . Les deux autres assertions résultent respectivement de 5.6.1 (vi) et 5.6.7 (i).

Corollaire 5.10.2. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, H un sous-préschéma en groupes réductif tel que pour tout $s \in S$, $G_{\overline{s}}$ et $H_{\overline{s}}$ aient même rang réductif. Alors H est fermé dans G, $\mathrm{Norm}_G(H)$ est lisse sur S, $\mathrm{Norm}_G(H)/H$ est représentable par un S-préschéma fini étale. Si T est un tore maximal de H et B un groupe de Borel de G contenant T, alors $B \cap H$ est un groupe de Borel de H, dont la partie unipotente est $(B \cap H)^u = B^u \cap H$.

Les premières assertions résultent aussitôt de 5.3.10 et 5.3.18, via le fait que les groupes de Weyl de G et de H sont finis (Exp. XIX 2.5). Les autres assertions sont locales pour la topologie étale et se ramènent au cas étudié dans 5.10.1.

Proposition 5.10.3. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif.

a) Si Q est un tore de G, $\mathrm{Cent}_G(Q)$ est un sous-groupe de type (R) de G à fibres réductives. Si $Q \subset Q'$ sont deux tores de G, $\mathrm{Cent}_G(Q) \supset \mathrm{Cent}_G(Q')$.

b) Si H est un sous-groupe de type (R) de G à fibres réductives, $\mathrm{rad}(H)$ (4.3.6) est un tore de G. Si $H \subset H'$ sont deux sous-groupes de type (R) de G à fibres réductives, $\mathrm{rad}(H) \supset \mathrm{rad}(H')$.

c) Si Q est un tore de G, on a

$$\mathrm{rad}(\mathrm{Cent}_G(Q)) \supset Q \quad \text{et}$$

$$\mathrm{Cent}_G(\mathrm{rad}(\mathrm{Cent}_G(Q)) = \mathrm{Cent}_G(Q)$$

d) Si H est un sous-groupe de type (R) de G à fibres réductives,

$$\mathrm{Cent}_G(\mathrm{rad}(H)) \supset H \quad \text{et}$$

$$\mathrm{rad}(\mathrm{Cent}_G(\mathrm{rad}(H)) = \mathrm{rad}(H) \quad .$$

En effet, a) résulte aussitôt de Exp. XIX 2.8. Pour prouver b), il suffit de remarquer que $rad(H') \subset H$, car H contient (localement pour (fpqc)) un tore maximal de G, donc de H'. La première assertion de c) (resp. d)) est triviale, la seconde s'ensuit par le raisonnement habituel.

Cette proposition conduit à la définition suivante :

Définition 5.10.4. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif. On dit que le sous-tore Q de G est un tore critique s'il est le radical de son centralisateur. On dit que le sous-groupe réductif de type (R) H de G est critique s'il est le centralisateur de son radical.

On a alors :

Corollaire 5.10.5. Pour tout sous-tore Q de G, $Cent_G(Q)$ est critique. Pour tout sous-groupe de type (R) à fibres réductives H de G, rad(H) est un tore critique de G. Les applications

$$Q \longmapsto Cent_G(Q)$$

$$H \longmapsto rad(H)$$

sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre entre l'ensemble des tores critiques de G et celui de ses sous-groupes réductifs de type (R) critiques. Si Q est un tore de G, $rad(Cent_G(Q))$ est le plus petit tore critique de G contenant Q. Si H est un sous-groupe réductif de type (R) de G, $Cent_G(rad(H))$ est le plus petit sous-groupe réductif de type (R) critique de G contenant H.

Proposition 5.10.6. Soient (G,T,M,R) un S-groupe déployé, R' une partie de R. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) R' est de type (R) , $H_{R'}$ est réductif et critique.

(ii) Il existe un système de racines simples R_o de R et une partie R'_o de R_o telle que R' soit l'ensemble des éléments de R combinaison linéaire des éléments de R'_o .

(iii) R' est clos, symétrique, et tout système de racines simples de R' est l'intersection avec R' d'un système de racines simples de R .

En effet, d'après Exp. XXI 3.4.8 , (ii) et (iii) sont équivalents et équivalent aussi au fait que R' soit l'intersection de R avec un sous-$\underline{\underline{Q}}$-espace vectoriel de $M \otimes \underline{\underline{Q}}$. Or cette dernière condition est entraînée par (i) : si $H_{R'} = \underline{Cent}_G(Q)$, R' est l'ensemble des éléments de (R) qui s'annulent sur Q (Exp. II 5.2.3 (ii)). Enfin, cette condition entraîne (i) , car $(H_{R'})$ est le tore maximal de $\bigcap_{r \in R'} \mathrm{Ker}\, r$, donc $\underline{Cent}_G(\mathrm{rad}(H_{R'}))$ n'est autre que $H_{R''}$ où R'' est l'intersection de R avec le sous-espace vectoriel engendré par R' .

5.10.7. Résumons certains des résultats précédents : soient (G,T,M,R) un S-groupe déployé, R_o un système de racines simples de R , R_+ le système de racines positives correspondant; choisissons une partie R'_o de R_o , notons R' l'ensemble des éléments de R combinaison linéaire des éléments de R'_o et posons $R'_+ = R' \cap R_+$. Soient $T_{R'_o}$ le tore maximal de $\bigcap_{r \in R'_o} \mathrm{Ker}\, r$ et $Z_{R'_o} = \underline{Cent}_G(T_{R'_o})$ Alors $Z_{R'_o}$ est un sous-groupe réductif de G , de radical $T_{R'_o}$; $(Z_{R'_o}, T, M, R')$ est un S-groupe déployé ; $B_{R_+} \cap Z_{R'_o}$ est le groupe de Borel de $Z_{R'_o}$ défini par le système de racines positives R'_+ (ou bien le système de racines simples R'_o) et sa partie unipotente est $U_{R_+} \cap Z_{R'_o} = U_{R'_+}$.

Remarque 5.10.8. Sous les conditions de 5.10.4 , soit Q un tore critique de G , G , $L = \underline{Cent}_G(Q)$ son centralisateur. Comme $Q = rad(L)$, Q est un sous-groupe caractéristique de L ; il s'ensuit aussitôt que

$$\underline{Norm}_G(L) = \underline{Norm}_G(Q) \quad ,$$

donc aussi

$$\underline{Norm}_G(L)/L = \underline{Norm}_G(Q)/\underline{Cent}_G(Q) = W_G(Q) \quad .$$

Par 5.10.2 , on en déduit

Proposition 5.10.9. Soient S un préschéma , G un S-groupe réductif, Q un tore critique de G . Le groupe de Weyl $W_G(Q)$ est(étale) fini sur S .

Remarque 5.10.10. Sous les conditions de 5.10.7 , on peut expliciter $W_G(T_{R'_o}) = \underline{Norm}_G(Z_{R'_o})/Z_{R'_o}$. C'est le groupe constant associé au quotient W_1/W_2 , où W_1 est le sous-groupe de W formé des éléments qui normalisent le sous-groupe de M engendré par R'_o et W_2 le sous-groupe de W engendré par les s_r , $r \in R'_o$.

5.11. Sous-groupes de type (RC) .

Définition 5.11.1. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif. Un sous-préschéma en groupes H de G est dit de type (RC) s'il est de type (R),

i.e. (5.2.1) vérifie les deux conditions suivantes :

(i) H est lisse et de présentation finie sur S , à fibres connexes .

(ii) Pour tout $s \in S$, H_s contient un tore maximal de G_s ,

et s'il vérifie en outre la condition suivante :

(iii) pour tout $s \in S$ et tout tore maximal T de H_s , l'ensemble des racines de H_s par rapport à T est un sous-ensemble clos de l'ensemble de toutes les racines de G_s par rapport à T .

Remarque 5.11.2. Comme nous l'avons déjà signalé en 5.4.8 , la condition (iii) est conséquence des autres lorsque 6 est inversible sur S

Lemme 5.11.3. Soient (G,T,M,R) un S-groupe déployé et R' une partie close de R . Soient

$$R_1 = \{ r \in R' , -r \in R' \}$$
$$R_2 = \{ r \in R' , -r \notin R' \} .$$

Alors R_1 et R_2 sont clos. Considérons les groupes $H_{R'}$, H_{R_1} et U_{R_2} (5.4.7 et 5.6.5) qui sont lisses et à fibres connexes.

(i) Le groupe U_{R_2} est invariant dans $H_{R'}$, $H_{R'}$ est le produit semi-direct de U_{R_2} par H_{R_1}.

(ii) H_{R_1} est réductif, U_{R_2} est à fibres géométriques unipotentes; tout sous-groupe invariant lisse et de présentation finie sur S , à fibres géométriques connexes et unipotentes de $H_{R'}$ est contenu dans U_{R_2} , tout sous-groupe réductif de $H_{R'}$ contenant T est contenu dans H_{R_1} .

(iii) On a $U_{R_2} \cap \mathrm{Norm}_G(H_{R_1}) = e$.

On a d'abord (iii) par 5.6.7 (i) . La première assertion de (i) résulte de 5.6.7 (ii) . Comme $U_{R_2} \cap H_{R_1} = e$ (par (iii), le produit semi-direct $H_{R_1} \cdot H_{R_2}$ est un sous-groupe de $H_{R'}$; mais ce sont deux sous-groupes de type (R) de G , contenant T , et ils sont même algèbre de Lie : $\mathfrak{g}_{R'}$; ils coïncident donc par 5.3.5 , ce qui achève de prouver (i) . Démontrons maintenant (ii); les deux premières assertions ne sont autres que 5.10.1 et 5.6.5 ; soit U un sous-préschéma en groupes de $H_{R'}$, lisse et de présentation finie, invariant (donc normalisé par T) , à fibres géométriques connexes et unipotentes; par 5.6.12 , on a, localement sur S , $U = U_{R''}$, où R'' est une partie de R' telle que $R'' \cap -R'' = \emptyset$. Si $U \not\subset U_{R_2}$, alors $R'' \not\subset R_2$, donc il existe $r \in R''$ avec $-r \in R'$. Alors $Z_r \subset H_{R'}$ (5.4.3), donc Z_r normalise U . Mais U contient P_r et Z_r possède une section w telle que $\mathrm{int}(w)\, P_r = P_{-r}$; cela entraîne $-r \in R''$, contredisant l'hypothèse $R'' \cap -R'' = \emptyset$. Enfin, si L est un sous-groupe réductif de $H_{R'}$ contenant T , on a localement sur S , $L = H_{R''}$, avec R'' symétrique, donc contenu dans R_1 .

Proposition 5.11.4. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, H un sous-préschéma en groupes de G de type (RC) .

(i) H est fermé dans G, $\mathrm{Norm}_G(H)/H$ est représentable par un S-préschéma en groupes fini étale.

(ii) H possède un plus grand sous-préschéma en groupes invariant lisse et de présentation finie sur S , à fibres géométriques connexes et unipotentes; on dit que c'est le radical unipotent de H et on le note $\mathrm{rad}^u(H)$. Le faisceau-quotient $H/\mathrm{rad}^u(H)$ est représentable par un S-groupe réductif.

(iii) Si T est un tore maximal de H , H possède un sous-groupe

réductif L contenant T de type (RC) possédant les deux propriétés suivantes :

(a) Tout sous-groupe réductif de H contenant T est contenu dans L,

(b) H est le produit semi-direct $H = L \cdot \mathrm{rad}^u(H)$, i.e., le morphisme canonique $L \longrightarrow H/\mathrm{rad}^u(H)$ est un isomorphisme .

De plus, L est l'unique sous-groupe réductif de H, contenant T et vérifiant l'une ou l'autre des deux conditions précédentes. Enfin, on a les relations suivantes :

$$\underline{\mathrm{Norm}}_H(L) = L$$

$$\underline{\mathrm{Norm}}_H(T) = \underline{\mathrm{Norm}}_L(T) ,$$

$$W_H(T) = W_L(T) ,$$

en particulier $W_H(T)$ est fini sur S .

Démonstration. En vertu de 5.3.18 , (i) qui est local pour la topologie étale, est une conséquence de la dernière assertion de (iii). Les assertions de (ii) sont locales pour la topologie étale. On peut donc supposer être dans la situation de 5.11.3 où on conclut aussitôt par (i) et (ii). En vertu des assertions d'unicité qui y sont contenues, (iii) est également local pour la topologie étale et on peut encore se ramener à la situation de 5.11.3 où les propriétés (a) et (b) ont été vérifiées. L'unicité d'un L vérifiant (a) est triviale; l'unicité d'un L vérifiant (b) est évidente , vu (a) . La relation $\underline{\mathrm{Norm}}_H(L) = L$ n'est autre que 5.11.3 (iii) ; si une section de H normalise T , alors elle normalise L , par unicité de L , donc est une section de L par ce qu'on vient de démontrer, ce qui prouve la deuxième relation; la troisième est alors triviale.

Proposition 5.11.5. *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-groupe réductif,* $\mathcal{H}_c$ *le foncteur des sous-groupes de type* (RC) *de* G*, qui est un sous-foncteur du foncteur* $\mathcal{H}$ *de* 5.8.1.

(i) $\mathcal{H}_c$ *est représentable par un sous-préschéma ouvert de* $\mathcal{H}$*, lisse, quasi-projectif et de présentation finie sur* S.

(ii) *Il existe un* S*-préschéma fini étale* Cl_c *et un morphisme*

$$cl : \mathcal{H}_c \longrightarrow Cl_c ,$$

lisse, quasi-projectif, de présentation finie, surjectif et à fibres géométriques connexes, ayant la propriété suivante :

Pour tout $S' \to S$ *et tous* $H, H' \in \mathcal{H}_c(S')$, H *et* H' *sont conjugués dans* G (*localement pour la topologie étale, ou* (5.3.11) *sur les fibres géométriques*) *si et seulement si* $cl(H) = cl(H')$.

(iii) Cl_c *et* cl *sont déterminés (à un isomorphisme unique près) par les conditions précédentes.*

(iv) *Si* (G,T,M,R) *est un déploiement de* G, *il existe un isomorphisme* $Cl_c \xrightarrow{\sim} E_S$ [*où* E_S *est le schéma constant défini par l'ensemble* E *des classes de conjugaison modulo* W *de parties closes de* R] *tel que pour toute partie close* R' *de* R, $cl(H_{R'})$ *corresponde à l'image canonique de* R' *dans* $E_S(S) = \mathrm{Hom}_{\text{loc. const.}}(S,E)$.

Il est d'abord clair que $\mathcal{H}_c$ est un faisceau (et) et que (ii) entraîne que Cl_c n'est autre que le faisceau-quotient de $\mathcal{H}_c$ par la relation d'équivalence définie par la conjugaison. Cela entraîne d'abord (iii), ainsi que le fait qu'il suffit de vérifier (i) et (ii) localement pour la topologie étale. On se ramène donc à la situation de (iv) ; construisons d'abord un morphisme

$$f : \mathcal{H}_c \longrightarrow E_S .$$

Il suffit de construire une application $\mathcal{H}_c(S) \longrightarrow E_S(S)$ fonctorielle en S ; soi donc H un sous-groupe de type (RC) de G ; comme H possède localement pour la topologie étale des tores maximaux, et comme les tores maximaux de G sont conjugués localement pour la topologie étale , il existe une famille couvrante $\{S_i \longrightarrow S\}$ et pour chaque i un $g_i \in G(S_i)$ et une partie close R_i de R tels que $int(g_i)(H \times_S S_i) = H_{R_i} \times_S S_i$; chaque R_i définit une section r_i de E_{S_i} i.e. un élément de $E_S(S_i)$; il suffit maintenant de prouver que la famille (r_i) provient d'une section $r = f(H)$ de E_S sur S , et que celle-ci ne dépend que de H . Pour ce faire, on est ramené à prouver que $H_{R'}$ et $H_{R''}$ sont conjugués localement pour la topologie étale si et seulement si R' et R'' sont conjugués par un élément du groupe de Weyl W , ce qui est trivial.

Pour tout $\alpha \in E$, il existe un $H_o \in \mathcal{H}_c(S)$ tel que $f(H_o) = \alpha$ il suffit de prendre $H_o = H_{R'}$ où R' est une partie close de R dont l'image dans E est α Si $H \in \mathcal{H}_c(S')$, $S' \longrightarrow S$, H est conjugué à H_o localement pour la topologie étale si et seulement si $f(H) = \alpha$ [comme on le voit aussitôt par l'argument précédent] ce qui montre que $f^{-1}(\alpha)$ s'identifie au quotient $G/\underline{Norm}_G(H_o)$, qui par 5.8.2 est un ouvert de $\mathcal{H}$, lisse, quasi-projectif de présentation finie sur S , à fibres connexes et non vides. Comme E_S est la somme des sous-préschémas ouverts images des sections correspondants aux $\alpha \in E$, $\mathcal{H}_c$ s'identifie à la somme des $f^{-1}(\alpha)$, $\alpha \in E$, ce qui prouve (i) et (ii) . Enfin (iv) est vérifié par construction.

Corollaire 5.11.6. Si $u \in \underline{Cl}_c(S')$, $S' \longrightarrow S$, $cl^{-1}(u)$ est un S'-préschéma lis quasi-projectif de présentation finie à fibres connexes non vides; c'est un ouvert

de $\mathscr{H}_c$ et un préschéma "homogène" sous $G_{S'}$ (par automorphismes intérieurs). En particulier, si $H \in cl^{-1}(u)(S')$, le morphisme $G_{S'} \to \mathscr{H}_{c\,S'}$ défini par $g \mapsto \mathrm{int}(g)\,H$ identifie $G_{S'}/\mathrm{Norm}_{G_{S'}}(H)$ à $c\ell^{-1}(u)$.

Exemples 5.11.7. En particulier, on a deux sections canoniques u_t, u_b de $C\ell_c$ correspondant respectivement aux tores maximaux ($R' = \emptyset$) et aux groupes de Borel (R' = système de racines positives). Les S-préschémas $c\ell^{-1}(u_t)$ et $c\ell^{-1}(u_b)$ ne sont autres que les S-préschémas $\underline{\mathrm{Tor}}(G)$ et $\underline{\mathrm{Bor}}(G)$ introduits en 5.8.3. Nous verrons dans Exp. XXVI d'autres exemples.

Remarque 5.11.8. On peut construire un S-préschéma $c\ell$, de présentation finie et non ramifié et un morphisme $\mathscr{H} \longrightarrow c\ell$ lisse et surjectif, à fibres géométriques connexes jouissant des propriétés analogues à 5.11.5 (ii) et (iii).

6. Le groupe dérivé.

6.1. Préliminaires.

Dans ce n°, on se fixe un préschéma S, un S-groupe déployé (G,T,M,R), un système de racines positives R_+ de R, on note

$$B = B_{R_+}\ ,\ B^- = B_{R_-}\ ,\ U = B^u\ ,\ U^- = B^{-u}\ .$$

$$\Omega = \Omega_{R_+} = U^-.T.U\ .$$

6.1.1. On note T' le sous-tore de T "image de la famille r^*, $r \in R$" ; autrement dit T' est l'image du morphisme de groupes

$$\mathbb{G}_{m\,S}^{R} \longrightarrow T$$

défini par $(z_r) \longmapsto \prod_{r \in R} r^*(z_r)$. On voit aussitôt que si R_o désigne l'ensemble des racines simples de R_+, le morphisme

$$\underline{G}_m^{R_o} \otimes S \longrightarrow T'$$

défini de la même manière est surjectif et de noyau fini. Si on identifie T à $D_S(M)$, alors T' s'identifie à $D_S(M/N)$, ou $N = M \cap V(R^*)^{\perp}$ (on note $V(R^*)^{\perp}$ l'orthogonal de $V(R^*)$ dans la dualité entre V et V^*).

Lemme 6.1.2. Le morphisme défini par le produit dans T

$$\mathrm{rad}(G) \times_S T' \longrightarrow T$$

est une isogénie.

En effet, le morphisme canonique $\mathrm{rad}(T) \longrightarrow T/T'$ provient par dualité du morphisme de groupes commutatifs

$$M \cap V(R^*)^{\perp} \longrightarrow M/\ M \cap V(R),$$

que l'on voit aussitôt être injectif de conoyau fini (cf. Exp. XXI, 6.3.).

Définition 6.1.3. On pose $\Omega' = U^- \cdot T' \cdot U$; c'est un sous-préschéma fermé de $\Omega = U^- \cdot T \cdot U$.

Lemme 6.1.4. Soient r une racine simple et $w_r \in \mathrm{Norm}_G(T)(S)$ relevant s_r. On a

$$\mathrm{int}(w_r)\, \Omega' \cap \Omega \subset \Omega' .$$

Il nous suffit de prouver que si $g \in \Omega'(S)$ et si $\mathrm{int}(w_r)g \in \Omega(S)$, alors $\mathrm{int}(w_r)g \in \Omega'(S)$. Par 5.6.8, écrivons

$$g = a\, \exp_{-r}(Y)\, t\, \exp_r(X)\, b ,$$

avec $a \in U_{-\hat{r}}(S)$, $Y \in \Gamma(S, \mathfrak{J}^{-r})$, $t \in T'(S)$, $X \in \Gamma(S, \mathfrak{J}^{r})$, $b \in U_{\hat{r}}(S)$.

On a alors

$$\mathrm{int}(w_r)\, g = \mathrm{int}(w_r)\, a \,.\, \mathrm{int}(w_r)(\exp(Y) t \exp(X)) .\, \mathrm{int}(w_r)\, b \,.$$

En vertu de 5.6.8 (iv), on a $\mathrm{int}(w_r)\, a \in U_{-\hat{r}}(S)$, $\mathrm{int}(w_r)\, b \in U_{\hat{r}}(S)$.

Il en résulte les équivalences (en posant $h = \exp(Y)\, t \exp(X)$)

$$\mathrm{int}(w_r)\, g \in \Omega(S) \iff \mathrm{int}(w_r)\, h \in \Omega(S)$$

$$\mathrm{int}(w_r)\, g \in \Omega'(S) \iff \mathrm{int}(w_r)\, h \in \Omega'(S) \quad .$$

On est donc ramené au cas où $g = h$. Comme on a (4.1.12)

$$Z_r \cap \Omega = P_{-r}.T.P_r \quad ,$$

$$Z_r \cap \Omega' = P_{-r}.T'.P_r \quad ,$$

on est ramené à prouver l'assertion suivante :

$$\mathrm{int}(w_r)\, h \in (P_{-r}.T.P_r)(S) \Longrightarrow \mathrm{int}(w_r) h \in (P_{-r}.T'.P_r)(S) \,.$$

Or cette dernière résulte aussitôt de Exp. XX 3.12 , qui montre que la composante sur T de $\mathrm{int}(w_r)h$ est de la forme $t.r^*(z) \in T'(S)$.

Lemme 6.1.5. Pour tout $w \in \mathrm{Norm}_G(T)(S)$, il existe un ouvert V_w de G , contenant la section unité, tel que

$$\mathrm{int}(w)\, \Omega' \cap V_w \subset \Omega' \quad .$$

Choisissons pour chaque racine simple r un $w_r \in \mathrm{Norm}_G(T)(S)$ relevant s_r . Pour tout point $s \in S$, il existe un ouvert U de S contenant s , un $t \in T(U)$ et sur U une relation

$$w = w_{r_1} \ldots\ldots w_{r_n}\, t \quad , \quad \text{les } r_i \text{ simples} \,.$$

On peut évidemment se contenter de faire la démonstration pour $U = S$; elle se fait par récurrence sur n . Si $n = 0$, alors $w \in T(S)$ et on prend $V_w = G$; supposons donc $w = w_r \cdot w'$, w' vérifiant la conclusion du lemme; il existe donc un ouvert $V_{w'}$ de G , contenant la section unité, tel que $\mathrm{int}(w')\ \Omega' \cap V_{w'} \subset \Omega'$. On peut alors écrire

$$\begin{aligned} &\mathrm{int}(w)\ \Omega' \cap \mathrm{int}(w_r)\ V_{w'} \cap \Omega = \\ &= \mathrm{int}(w_r)\ \left[\mathrm{int}(w')\ \Omega' \cap V_{w'}\right] \cap \Omega = \\ &= \mathrm{int}(w_r)\ \Omega' \cap \Omega \subset \Omega' , \end{aligned}$$

par 6.1.4. On prend alors $V_w = \mathrm{int}(w_r)\ V_{w'} \cap \Omega$ et on a terminé.

Lemme 6.1.6. Il existe un ouvert V_o de G , contenant la section unité, tel que pour tout $S' \longrightarrow S$, on ait

$$U(S')\ U^-(S') \cap V_o(S') \subset \Omega'(S') .$$

Soit en effet w_o un élément de $\underline{\mathrm{Norm}}_G(T)(S)$ relevant la symétrie du groupe de Weyl et $w_o^2 \in T(S)$, c'est-à-dire tel que $\mathrm{int}(w_o)\ U = U^-$, (Exp. XXI 3.6.14). Montrons que l'ouvert $V_o = V_{w_o}$ de 6.1.5 répond à la question . En effet

$$\begin{aligned} U(S')\ U^-(S') &= \mathrm{int}(w_o)(\mathrm{int}(w_o)^{-1} U(S') . \mathrm{int}(w_o)^{-1}\ U^-(S')) \\ &= \mathrm{int}(w_o)(U^-(S') .\ U(S')) \subset \mathrm{int}(w_o)\ \Omega'(S') . \end{aligned}$$

D'où

$$U(S')\ U^-(S') \cap V_o(S') \subset \mathrm{int}(w_o)\ \Omega'(S') \cap V_o(S') \subset \Omega'(S') .$$

Tout morphisme de groupes de G dans un préfaisceau en groupes commutatifs sur S, séparé pour (fppf), s'annule sur $\mathrm{Ker}\ f$.

La première assertion résulte aussitôt de 4.1.11. On a immédiatement $\mathrm{Ker}\ f \cap \Omega = \Omega'$, ce qui prouve que $\mathrm{Ker}\ f$ est lisse sur S. Tout morphisme g de G dans un préschéma en groupes commutatif séparé s'annule sur U et U^-, par 5.6.9 (ii). Il s'annule donc aussi sur T' par Exp. XX 2.7, donc sur Ω'. Prenant les notations de 5.7.10, on voit que $U_1 \subset \mathrm{Ker}\ f(S)$, ce qui montre que

$$\mathrm{Ker}\ f = \bigcup_{u \in U_1} u\,\Omega',$$

donc que $\mathrm{Ker}\ f$ est à fibres connexes et que tout g comme ci-dessus s'annule sur $\mathrm{Ker}\ f$.

6.2. Groupe dérivé d'un groupe réductif.

Théorème 6.2.1. *Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif.*

(i) $D_S(G) = \underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr}}(G, \underline{G_{m\,S}})$ *est représentable par un S-groupe constant tordu, dont le type en $s \in S$ est $\underline{Z}^{\mathrm{rgred}(G_s) - \mathrm{rgss}(G_s)}$.*

(ii) *Notons $\mathrm{corad}(G) = D_S(D_S(G))$ qui est donc un S-tore. Le morphisme de bidualité*

$$f_o : G \longrightarrow \mathrm{corad}(G)$$

(Exp. VIII 1) *est lisse et surjectif.*

(iii) *Le morphisme composé*

$$\mathrm{rad}(G) \longrightarrow G \longrightarrow \mathrm{corad}(G)$$

est une isogénie.

(iv) Le noyau de f_o , noté

$$\mathrm{der}(G) = \mathrm{Ker}(f_o)$$

est un sous-préschéma en groupes fermé de G , semi-simple sur S , que l'on appelle le groupe dérivé de G . Si G est semi-simple, $\mathrm{der}(G) = G$.

(v) Tout morphisme de groupes de G dans un S-préfaisceau en groupes commutatifs, séparé pour (fppf) , s'annule sur $\mathrm{der}(G)$ et se factorise donc par f_o .

Démonstration. Toutes les assertions du théorème sont locales pour la topologie étale; on peut donc se ramener au cas où G est déployé sur S . Considérons alors le morphisme f de 6.1.8. Par la dernière assertion de 6.1.8 , on a aussitôt un isomorphisme

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr}}(G, \underline{G}_{m\,S}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr}}(T/T', \underline{G}_{m\,S}) ,$$

ce qui démontre (i) , puis (ii) et donne un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f_o} & \mathrm{corad}(G) \\ & \searrow^{f} & \downarrow \\ & & T/T' \end{array} .$$

On a alors (v) par 6.1.8 , (iii) par 6.1.2. On a aussi $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f_o)$, ce qui par 6.1.8 entraîne que $\mathrm{der}(G)$ est lisse sur S et à fibres connexes; il reste à vérifier que ses fibres sont semi-simples; or elles sont réductives par Exp. XIX 1.7 , comme sous-groupes invariants de groupes réductifs. Par (iii) $\mathrm{rad}(G) \cap \mathrm{der}(G)$ est fini, ce qui entraîne bien que les fibres de $\mathrm{der}(G)$ sont semi-simples.

Remarques 6.2.2. a) Par construction, dans le cas où G est déployé, $\mathrm{der}(G)$

est le sous-faisceau (fppf) de G engendré par les P_r , $r \in R$. (Il suffit même de prendre les P_r , $r \in R_o \cup (-R_o)$).

b) Par (v) , $\mathrm{der}(G)$ est bien le faisceau (fppf) des commutateurs de G (et même le préfaisceau séparé (fppf) ...).

c) Lorsque S est le spectre du corps k algébriquement clos, $\mathrm{der}(G)(k)$ est le groupe des commutateurs de $G(k)$ (Exp. VI).

6.2.3. Considérons maintenant les deux suites exactes

$$e \longrightarrow \mathrm{rad}(G) \longrightarrow G \longrightarrow \mathrm{ss}(G) \longrightarrow e \ ,$$

$$e \longrightarrow \mathrm{der}(G) \longrightarrow G \longrightarrow \mathrm{corad}(G) \longrightarrow e \ .$$

Comme $\mathrm{rad}(G)$ est central dans G , le produit dans G définit un morphisme de groupes

$$u : \mathrm{rad}(G) \times_S \mathrm{der}(G) \longrightarrow G$$

qui est couvrant en vertu de 6.2.1 (iii) , donc surjectif, donc plat (Exp. VI). Son noyau est isomorphe à $\mathrm{rad}(G) \cap \mathrm{der}(G)$; qui est aussi le noyau de $\mathrm{rad}(G) \to \mathrm{corad}(G)$, donc est un sous-groupe fini de type multiplicatif de $\mathrm{rad}(G)$.

On raisonne de même pour le morphisme

$$G \longrightarrow \mathrm{corad}(G) \times_S \mathrm{ss}(G) \ ,$$

dont le noyau est $\mathrm{der}(G) \cap \mathrm{rad}(G)$. On a donc la

Proposition 6.2.4. Soit G un S-groupe réductif. Les morphismes

$$\mathrm{rad}(G) \times_S \mathrm{der}(G) \longrightarrow G$$

$$G \longrightarrow \mathrm{corad}(G) \times_S \mathrm{ss}(G)$$

$$\mathrm{rad}(G) \longrightarrow \mathrm{corad}(G)$$

sont des isogénies centrales, leurs noyaux sont isomorphes.

Corollaire 6.2.5. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) G est le produit d'un groupe semi-simple et d'un tore.

(ii) $G \xleftarrow{\sim} \mathrm{rad}(G) \times_S \mathrm{der}(G)$.

(iii) $G \xrightarrow{\sim} \mathrm{corad}(G) \times_S \mathrm{ss}(G)$.

(iv) $\mathrm{rad}(G) \cap \mathrm{der}(G) = e$.

6.2.6. Revenons provisoirement au cas d'un groupe déployé. Gardons les notations de 6.1. Posons $N = M \cap V(R^*)^{\perp}$. On a donc $T' = D_S(M/N)$. On a vu que $U^- . T' . U$ était un voisinage ouvert de la section unité de $\mathrm{der}(G)$. On a donc

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{der}(G)/S) = \mathfrak{t}' \oplus \coprod_{r \in R} \mathfrak{g}^r .$$

Comme les caractères induits sur T' par les $r \in R$ sont non nuls et distincts (cf. Exp. XXI 1.2.5 - on a d'ailleurs déjà utilisé ce fait en 6.1.2) , R est un système de racines de G par rapport à T . Il est alors immédiat (par $P_r \subset \mathrm{der}(G)$) que les morphismes exp de $\mathrm{der}(G)$ "sont" ceux de G et de même pour les coracines.

Il en résulte :

Proposition 6.2.7. Dans les notations précédentes, $(\mathrm{der}(G), T', M/N, R)$ est un groupe déployé de donnée radicielle $\mathrm{der}(\mathcal{R}(G))$. Le morphisme canonique $\mathrm{der}(G) \longrightarrow G$ donne par fonctorialité le morphisme canonique de données radicielles $\mathcal{R}(G) \longrightarrow \mathrm{der}(\mathcal{R}(G))$ de Exp. XXI 6.5.

N.B. Le lecteur pourra à titre d exercice construire le diagramme de groupes

déployés correspondant aux trois colonnes de gauche du diagramme de données radicielles de Exp. XXI 6.5.7.

Proposition 6.2.8. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, $\mathrm{der}(G)$ son groupe dérivé.

(i) Pour tout tore maximal T de G, $T \cap \mathrm{der}(G)$ est un tore maximal de $\mathrm{der}(G)$. Pour tout tore maximal T' de $\mathrm{der}(G)$, $\underline{\mathrm{Cent}}_G(T') = \mathrm{rad}(G)\,T'$ est un tore maximal de G. Les deux constructions précédentes sont inverses l'une de l'autre et établissent une correspondance bijective entre tores maximaux de G et de $\mathrm{der}(G)$.

(ii) Pour tout groupe de Borel B de G, $B \cap \mathrm{der}(G)$ est un groupe de Borel B' de $\mathrm{der}(G)$. On a $B'^{u} = B^{u}$. Pour tout groupe de Borel B' de $\mathrm{der}(G)$, $\underline{\mathrm{Norm}}_G(B') = \mathrm{rad}(G)\,B'$ est un groupe de Borel de G. Les applications précédentes sont inverses l'une de l'autre et établissent une correspondance bijective entre groupes de Borel de G et de $\mathrm{der}(G)$.

Par le théorème de conjugaison locale des tores maximaux et la construction du groupe dérivé, la seule assertion qui reste à prouver dans (i) est la suivante; si T est un tore maximal de G, alors $T = (T \cap \mathrm{der}(G)).\mathrm{rad}(G) = \underline{\mathrm{Cent}}_G(T \cap \mathrm{der}(G))$. La première assertion est triviale (car on se ramène au cas déployé); la seconde en résulte aussitôt, car $\mathrm{rad}(G)$ est central dans G, donc $T = \underline{\mathrm{Cent}}_G(T) = \underline{\mathrm{Cent}}_G(T \cap \mathrm{der}(G))$. On raisonne de même pour (ii).

6.3. Sous-groupes à quotients commutatifs.

6.3.1. Soit G un S-groupe réductif. Si H est un sous-faisceau en groupes de G, les conditions suivantes sont équivalentes :

- H contient $\mathrm{der}(G)$.
- H est distingué ; G/H est commutatif.

Alors le morphisme canonique $f_o : G \to \mathrm{corad}(G)$ envoie H sur un sous-faisceau $f_o(H)$ de $\mathrm{corad}(G)$; on a

$$G/H \simeq \mathrm{corad}(G)/f_o(H) ,$$

$$H/\mathrm{der}(H) \simeq f_o(H) , \quad \mathrm{der}(G) = \mathrm{der}(H) ,$$

$$H = f_o^{-1}(f_o(H)) .$$

Comme $\mathrm{der}(G)$ est lisse sur S et à fibres connexes, $H \longmapsto f_o(H)$ établit une correspondance biunivoque entre sous-préschémas en groupes fermés (resp. rétrocompacts) de G, contenant $\mathrm{der}(G)$, lisses sur S et à fibres connexes et sous-préschémas en groupes fermés (resp. rétrocompacts) de $\mathrm{corad}(G)$, lisses sur S et à fibres connexes. Or $\mathrm{corad}(G)$ est un tore, donc un sous-préschéma en groupes lisse, à fibres connexes et rétrocompact de $\mathrm{corad}(G)$ en est un sous-tore (Exp. X 8.2), donc est fermé dans $\mathrm{corad}(G)$.

6.3.2. Si H est un sous-préschéma en groupes fermé de G, lisse sur S, à fibres connexes et distingué dans G, alors H est réductif. Si de plus $H \supset \mathrm{der}(G)$, alors $\mathrm{der}(H) = \mathrm{der}(G)$ et $f_o(H)$ s'identifie à $\mathrm{corad}(H)$. On a donc démontré la

Proposition 6.3.3. Soit G un S-groupe réductif. Tout sous-préschéma en groupes H de G, distingué dans G, à quotient commutatif (i.e. contenant $\mathrm{der}(G)$), lisse

sur S , à fibres connexes et rétrocompact dans G est fermé et réductif. On a $\mathrm{der}(H) = \mathrm{der}(G)$, $f_o(H)$ s'identifie à $\mathrm{corad}(H)$; on a

$$G/H \simeq \mathrm{corad}(G)/\mathrm{corad}(H) ,$$

$$H = (H \cap \mathrm{rad}(G)).\ \mathrm{der}(G) .$$

De plus, $H \mapsto f_o(H)$ définit un isomorphisme entre l'ensemble des sous-groupes H de G possédant les propriétés précédentes et l'ensemble des sous-tores de $\mathrm{corad}(H)$.

Par une nouvelle application du théorème de Noether, on en déduit la

Proposition 6.3.4. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, T un tore maximal de G . Pour tout sous-groupe H de G comme ci-dessus, $T \cap H$ est un tore maximal de G et on a

$$G/H = T/T \cap H ,$$

$$H = (T \cap H).\ \mathrm{der}(G) .$$

De plus, $H \mapsto T \cap H$ est un isomorphisme entre l'ensemble des sous-groupes H de G comme ci-dessus et l'ensemble des sous-tores de T contenant $T \cap \mathrm{der}(G)$.

Exposé XXIII

GROUPES REDUCTIFS; UNICITÉ DES GROUPES EPINGLÉS

par M. DEMAZURE

Le but de cet exposé est la démonstration du théorème d'unicité (Théorème 4.1). Celui-ci a été démontré par CHEVALLEY dans le cas d'un corps algébriquement clos; la méthode de réduction au rang deux utilisée ici est également due à CHEVALLEY (voir BIBLE, exp. 23 et 24). Chemin faisant, nous obtenons une description explicite des groupes réductifs par générateurs et relations (3.5).

1. Epinglages.

Définition 1.1. Soient S un préschéma, (G,T,M,R) un S-groupe déployé (XXII, 1.13). On appelle épinglage de ce groupe déployé la donnée d'un système de racines simples R_o de R et pour chaque $r \in R_o$ d'une section $X_r \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^r)^*$.

Autrement dit, un épinglage du groupe réductif G sur le préschéma non vide S est la donnée :

(i) d'un tore maximal T ,
(ii) d'un groupe abélien M et d'un isomorphisme $T \simeq D_S(M)$,
(iii) d'un système de racines R de G par rapport à T ,
(iv) d'un système de racines simples R_o de R ,
(v) d'un $X_r \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^r)^*$ pour tout $r \in R_o$, c'est-à-dire d'un

$$u_r = \exp_r(X_r) \in P_r^*(S) \quad \text{pour tout} \quad r \in R_o ,$$

vérifiant la condition (D 1) de Exp. XXII , 1.13 (en effet la condition (D 2) de loc. cit. est automatiquement vérifiée).

Tout groupe déployé possède un épinglage; en particulier, tout groupe réductif est localement épinglable pour la topologie étale.

1.2. Si G est un S-groupe épinglé, c'est-à-dire un S-groupe déployé muni d'un épinglage, il est muni canoniquement du système de racines positives R_+ défini par R_o , du groupe de Borel $B = B_{R_+}$ correspondant, du groupe de Borel opposé $B^- = B_{R^-}$, des groupes unipotents $U = B^u$, $U^- = B^{-u}$, de l'ouvert $U^-.T.U$, etc... . De même, pour chaque $r \in R_o$, on a un isomorphisme canonique de groupes vectoriels

$$p_r : \underline{G}_a S \xrightarrow{\sim} P_r$$

[défini par

$$p_r(x) = \exp_r(x\, X_r) = u_r^x \,] ,$$

normalisé par T avec le multiplicateur r , et dont la donnée équivaut à celle de X_r (Exp. XXII, 1.1).

Par dualité, on en déduit un $X_{-r} \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^{-r})^*$ et un isomorphisme

$$p_{-r} : \underline{G}_a S \longrightarrow P_{-r}$$

qui est le contragrédient du précédent (Exp. XXII, 1.3).

On posera (Exp. XX, 3.1)

$$w_r = w_r(X_r) = p_r(1)\, p_{-r}(-1)\, p_r(1)$$
$$= p_{-r}(-1)\, p_r(1)\, p_{-r}(-1) .$$

On a alors (loc. cit. 3.1 , 3.7)

$$w_r^2 = r^*(-1) \quad , \quad \mathrm{int}(w_r)t = s_r(t) = t\, r^*(r(t))^{-1} \quad ,$$

$$\begin{cases} \mathrm{int}(w_r) & p_r(x) = p_{-r}(-x) = p_{-r}(x)^{-1} \ , \\ \mathrm{Ad}(w_r) & X_r = -X_{-r} \ , \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{int}(w_r) & p_{-r}(x) = p_r(-x) = p_r(x)^{-1} \ , \\ \mathrm{Ad}(w_r) & X_{-r} = -X_r \ . \end{cases}$$

Nous utiliserons systématiquement les notations précédentes dans la suite.

Définition 1.3. Soient S un préschéma, $(G,T,M,R,R_o,(X_r))$ et $(G',\ldots)$ deux S-groupes épinglés. On dit que le morphisme de groupes déployés (Exp. XXII, 4.2.1)

$$f : G \longrightarrow G'$$

est compatible avec les épinglages, ou définit un morphisme de groupes épinglés si (notations de loc. cit.) $u(R_o) = R'_o$ et si, pour tout $r \in R_o$, on a

$$f(\exp_r(X_r)) = \exp_{u(r)}(X'_{u(r)}), \text{i.e.} \quad f(u_r) = u'_{u(r)} \ .$$

1.4. Si on note $q(r)$ l'entier de loc. cit. , on a donc

$$f(p_r(x)) = p'_{u(r)}(x^{q(r)}) \quad \text{pour} \quad r \in R_o \ ,$$

donc aussi

$$f(p_{-r}(x)) = p'_{-u(r)}(x^{q(r)}) \ ,$$

$$f(w_r) = w'_{u(r)} \ .$$

Rappelons (Exp. XXII, 4.2) que l'on a pour tout $r \in R$, et tous $z \in \underline{G}_m(S')$, $t \in T(S')$:

$$f(r^*(z)) = u(r)^*(z)^{q(r)} = u(r)^*(z^{q(r)}) \ ,$$

$$u(r)(f(t)) = r(t)^{q(r)} \ .$$

1.5. Appelons donnée radicielle épinglée une donnée radicielle munie d'un sy de racines simples, et p-morphisme de données radicielles épinglées un p-mor de données radicielles (Exp. XXI, 6.8) transformant racines simples en racine simples. Si G est un S-groupe épinglé, on note $\mathcal{R}(G)$ la donnée radicielle épi correspondante (c'est la donnée radicielle de Exp. XXII , 1.14 munie de R_o). p l'entier défini en Exp XXII, 4.2.2. On a alors

Scholie 1.6. $G \longmapsto \mathcal{R}(G)$ définit un foncteur de la catégorie des S-groupes réductifs épinglés dans celle des données radicielles épinglées (avec p-morphism

1.7. Les groupes épinglés Z_{R_1} .

Soit R_1 une partie du système de racines simples R_o du groupe épinglé G . Soit T_{R_1} le tore maximal de $\bigcap_{r \in R_1} \mathrm{Ker}\, r_1$; posons

$$Z_{R_1} = \underline{\mathrm{Cent}}_G(T_{R_1}) .$$

Notons $R' = \underline{Z} \cdot R_1 \cap R$; on sait (Exp. XXII, 5.10.7) que Z_{R_1} est un S-group réductif, de radical T_{R_1} , que (T,M,R') en est un déploiement et R_1 un systèm de racines simples. Il en résulte que $(Z_{R_1}, T,M,R',R_1, (X_r)_{r \in R_1})$ est un S-groupe épinglé. Nous munirons toujours Z_{R_1} de cet épinglage. En particulier, on considérera les groupes

$$Z_r = Z_{\{r\}} \quad , \quad Z_{rs} = Z_{\{r,s\}} .$$

On notera $B_{R_1} = B \cap Z_{R_1}$; on sait (loc. cit.) que c'est le groupe de Borel canonique de Z_{R_1} , et que sa partie unipotente est $U_{R_1} = U \cap Z_{R_1}$. En particulier, on a

$$B_r = T \cdot P_r \quad , \quad U_r = P_r .$$

On notera

$$U_{rs} = U_{\{r,s\}} = U \cap Z_{rs} = \prod_{r \in A_{rs}} P_t \quad ,$$

où A_{rs} est l'ensemble des racines positives combinaison linéaire de r et de s.

Soit maintenant $f : G \to G'$ un morphisme de S-groupes épinglés. Si $u : R \to R'$ est la bijection correspondante et si R_1 est une partie de R_o, $u(R_1) = R'_1$ est une partie de R'_o, et il est clair que f envoie T_{R_1} dans $T'_{R'_1}$, donc Z_{R_1} dans $Z'_{R'_1}$. Le S-morphisme correspondant

$$f_{R_1} : Z_{R_1} \longrightarrow Z'_{u(R_1)}$$

est compatible avec les épinglages canoniques; il définit un morphisme de données radicielles épinglées

$$\mathcal{R}(f_{R_1}) : \mathcal{R}(Z'_{R'_1},\ldots) \longrightarrow \mathcal{R}(Z_{R_1},\ldots)$$

et les morphismes $M' \longrightarrow M$ sous-jacents à $\mathcal{R}(f)$ et $\mathcal{R}(f_{R_1})$ coïncident.

1.8. Etude du groupe $\mathrm{Norm}_G(T)$.

Pour chaque couple (r,s) de racines simples, notons n_{rs} l'ordre de l'élément $(s_r\ s_s)$ du groupe de Weyl W. En particulier, on a $n_{rr} = 1$. On a donc $(w_r\ w_s)^{n_{rs}} \in T(S)$.

Définition 1.8.1. Pour tout $(r,s) \in R_o \times R_o$, on pose

$$t_{rs} = (w_r\ w_s)^{n_{rs}} \in T(S) \quad .$$

De plus, on pose (Exp. XX, 3.1)

$$t_r = t_{rr} = w_r^2 = r^*(-1) \in T(S) \quad .$$

Proposition 1.8.2. Soit H un S-foncteur en groupes transformant sommes direct de préschémas en produits (par exemple un faisceau pour la topologie de Zariski). Soient

$$f_T : T \longrightarrow H$$

un morphisme de groupes et h_r $(r \in R_o)$ des éléments de $H(S)$.
Pour qu'il existe un morphisme de groupes (nécessairement unique)

$$f_N : \underline{Norm}_G(T) \longrightarrow H$$

qui induise f_T sur T et tel que $f(w_r) = h_r$ pour $r \in R_o$, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

(i) Pour tout $r \in R_o$, on a

$$f_T(s_r(t)) = h_r \; f_T(t) \; h_r^{-1}$$

pour tout $t \in T(S')$, $S' \to S$ (i.e. $f_T \circ s_r = \mathrm{int}(h_r) \circ f_T$).

(ii) Pour tout $(r,s) \in R_o \times R_o$, on a

$$f_T(t_{rs}) = (h_r \, h_s)^{n_{rs}} .$$

Munissons en effet (Sch) de la topologie $\mathcal{C}$ engendrée par la prétopologie dont les familles couvrantes sont les sommes directes; l'hypothèse de l'énoncé dit que H est un $\mathcal{C}$-faisceau. Soit L le groupe libre de générateurs $(m_r)_{r \in}$ et L_1 le sous-groupe invariant engendré par les éléments $(m_r \, m_s)^{n_{rs}}$, $(r,s) \in R_o \times R_o$. Soit $g : L \longrightarrow W$ le morphisme défini par $g(m_r) = s_r$; on sait (Exp. XXI, 5.1) que g induit un isomorphisme $\bar{g}$ de L/L_1 sur W. Faisons opérer L sur T par l'intermédiaire de g (ou, ce qui revient au même, par $m_r \, t = s_r(t)$). Soit L_S le groupe constant défini par L, considérons le produit semi-direct $T.L_S = N$ pour l'opération précédente. On a un morphisme de S-groupes

$$h : T.L_S = N \longrightarrow \underline{Norm}_G(T)$$

unique tel que $h(m_r) = w_r$, $h(t) = t$ pour tout $t \in T(S')$, $S' \longrightarrow S$.

Soit N_1 le sous-faisceau en groupes distingué de N engendré par les

$$t_{rs}^{-1}.(m_r\, m_s)^{n_{rs}} \qquad (r,s) \in R_o \times R_o \quad .$$

On a évidemment $N_1 \subset \mathrm{Ker}\ h$; considérons le morphisme induit

$$h_1 : N/N_1 \longrightarrow \underline{\mathrm{Norm}}_G(T) \quad .$$

Prouvons que h_1 est un <u>isomorphisme</u>. Comme h induit sur T l'immersion canonique qui est un monomorphisme , le morphisme canonique

$$T \longrightarrow N/N_1 \quad .$$

est également un monomorphisme, donc induit un isomorphisme de T sur $T\,N_1/N_1$. Pour la même raison h_1 induit un isomorphisme de $T\,N_1/N_1$ sur T ; pour prouver que h_1 est un isomorphisme, il suffit donc de vérifier que le morphisme correspondant

$$h_2 : N/\,T\,N_1 \longrightarrow \underline{\mathrm{Norm}}_G(T)/T$$

est un isomorphisme. Or $T\,N_1$ est le sous-$\mathscr{C}$-faisceau en groupes distingué de N engendré par T et les $(m_r m_s)^{n_{rs}}$, c'est-à-dire le sous-$\mathscr{C}$-faisceau engendré par T et L_1 , c'est-à-dire $T.L_{1\,S}$. Le morphisme h_2 s'identifie donc au morphisme

$$\overline{g} : L_S/L_{1\,S} \longrightarrow W_S$$

qui est un isomorphisme par construction.

La démonstration de 1.8.2 est maintenant facile; les conditions sont évidemment nécessaires; prouvons qu'elles sont suffisantes. La condition (i) montre qu'il existe un morphisme

$$u : N \longrightarrow H$$

tel que $u(m_r) = h_r$ pour $r \in R_o$, et $u \mid T = f_T$. La condition (ii) dit que u s'annule sur N_1 , ce qui entraîne aussitôt le résultat.

1.9. Fidélité du foncteur $\mathcal{R}$.

Proposition 1.9.1. Le foncteur $\mathcal{R}$ de 1.6 est fidèle : si

$$f,g : G \longrightarrow G'$$

sont deux morphismes de groupes épinglés tels que $\mathcal{R}(f) = \mathcal{R}(g)$, alors $f = g$.

En effet, f et g coïncident sur T , P_r $(r \in R_o)$ et P_{-r} $(r \in R_o)$; il suffit donc d'appliquer :

Lemme 1.9.2. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif épinglé , H un S-préfaisceau en groupes, séparé pour (fppf). Soient

$$f,g : G \rightrightarrows H$$

deux morphismes de S-groupes. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $f = g$.

(ii) f et g coïncident sur T , sur chaque P_r $(r \in R_o)$, sur chaque P_{-r} $(r \in R_o)$.

(iii) f et g coïncident sur T , sur chaque P_r $(r \in R_o)$ et $f(w_r) = g(w_r)$ pour chaque $r \in R_o$.

En effet, (i) $\Longrightarrow$ (ii) est trivial, (ii) $\Longrightarrow$ (iii) résulte aussitôt de la définition de w_r (1.2). Reste à prouver (iii) $\Longrightarrow$ (i) . Si $r \in R$, il existe une suite $\{r_i\} \subset R_o$ avec $r = s_{r_1} s_{r_2} \dots s_{r_n} (r_{n+1})$ donc

$$P_r = \mathrm{int}(w_{r_1} \dots w_{r_n}) P_{r_{n+1}} ,$$

ce qui prouve que f et g coïncident sur chaque P_r . Il s'ensuit que f et g coïncident sur Ω , donc coïncident (Exp. XXII, 4.1.11).

Remarque 1.9.3. Si G est semi-simple, on peut, dans (ii) et (iii) supprimer l'hypothèse que f et g coïncident sur T . En effet, G est engendré comme faisceau (fppf) par les P_r, $r \in R$ (Exp. XXII, 6.2.2 a)).

2. Générateurs et relations pour un groupe épinglé .

Dans ce n°, on se fixe un S-groupe épinglé G . Si $r,s \in R_o$, on emploiera les notations Z_r , Z_{rs} , U_{rs} , A_{rs} de 1.7.

Théorème 2.1. *Soient* S *un préschéma* , G *un* S*-groupe épinglé*, H *un* S*-faisceau en groupes pour* (fppf). *Soient*

$$f_N : \underline{\mathrm{Norm}}_G(T) \longrightarrow H \ ,$$

$$f_r : P_r \longrightarrow H \ , \quad r \in R \ ,$$

des morphismes de groupes. Pour qu'il existe un morphisme de groupes (*nécessairement unique*)

$$\overline{f} : G \longrightarrow H$$

prolongeant f_N *et les* $f_r (r \in R)$, *il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites* :

(i) *Pour tout* $r \in R_o$ *et tout* $s \in R$, *on a*

$$\mathrm{int}(f_N(w_r)) \circ f_s = f_{s_r(s)} \circ \mathrm{int}(w_r) \ .$$

(ii) *Pour tout* $r \in R_o$, *il existe un morphisme de groupes*

$$F_r : Z_r \longrightarrow H$$

prolongeant f_r , f_{-r} et $f_N \mid \underline{\mathrm{Norm}}_{Z_r}(T)$.

(iii) *Pour tout couple* $(r,s) \in R_o \times R_o$, *il existe un morphisme de groupes* $U_{rs} \longrightarrow H$ *induisant* f_t *sur* P_t *pour* $t \in A_{rs}$ (*i.e.* $P_t \subset U_{rs}$).

Démonstration. 2.1.1. Les conditions de l'énoncé sont évidemment nécessaires. Choisissons d'autre part une structure de groupe totalement ordonné sur $\Gamma_o(R)$ de manière que les racines > 0 soient les éléments de R_+ (Exp. XXI, 3.5.6); tout produit indexé par une partie de R sera pris relativement à cet ordre. Notons f_T

la restriction de f_N à T et considérons le morphisme

$$f : \Omega_- \longrightarrow H$$

défini ensemblistement par

$$f\left(\prod_{r\in R_-} y_r \cdot t \cdot \prod_{r\in R_+} x_r\right) = \prod f_r(y_r)\cdot f_T(t)\cdot \prod f_r(x_r) .$$

Tout morphisme vérifiant les conditions de l'énoncé doit prolonger f ; d'autre tout morphisme de groupes $\overline{f} : G \longrightarrow H$ prolongeant f prolonge aussi f_N : en effet, prolongeant f_r et f_{-r}, il vérifie $\overline{f}(w_r) = F_r(w_r) = f_N(w_r)$ et il prolonge f_T par hypothèse. Par Exp. XXII, 4.1.11 (ii), on est donc ramené prouver :

Proposition 2.1.2. Le morphisme $f : \Omega_- \longrightarrow H$ défini ci-dessus est "généquement multiplicatif"; plus précisément, pour tout $S' \longrightarrow S$ et tous $x,y \in \Omega$ tels que $xy \in \Omega(S')$, on a $f(xy) = f(x)\, f(y)$.

Lemme 2.1.3. Si $n \in \mathrm{Norm}_G(T)(S')$, $S' \longrightarrow S$, et si $r,s \in R$ avec $\mathrm{int}(n)\, P_r = P_s$, i.e. $\overline{n}(r) = s$, on a

$$\mathrm{int}(f_N(n)) \circ f_r = f_s \circ \mathrm{int}(n) .$$

En effet, il suffit de vérifier la formule pour un système de générat du faisceau $\mathrm{Norm}_G(T)$; elle est vraie pour chaque w_r, $r \in R_o$ (par (i)), il suffit donc de le faire pour $n \in T(S')$. C'est trivial par (ii) si r est sim sinon, on prend un $w \in W$ tel $w^{-1}(r) \in R_o$; écrivant w comme produit de symétries fondamentales, on est ramené à prouver que si la formule est vraie pou r et pour tout n, elle l'est aussi pour $w_{r_o}(r)$ et $t \in T(S')$ où $r_o \in$ F Or, par (i), on a :

$$\mathrm{int}\, f_N(t) \circ f_{w_{r_o}(r)} = \mathrm{int}\, f_N(t\, w_{r_o}) \circ f_r \circ \mathrm{int}\,(w_{r_o}^{-1}) = f_{w_{r_o}(r)} \circ \mathrm{int}\,(t\, w_{r_o}) \circ \mathrm{int}(w$$

Lemme 2.1.4. La restriction de f à U (resp. U^-) est un morphisme de groupes. En particulier, cette restriction est indépendante de l'ordre choisi sur les racines.

Il suffit de faire la démonstration pour U. En vertu de Exp. XXII, 5.5.8, il suffit de vérifier que pour tout couple $r < s$ de racines positives, on a pour tous $x_r \in P_r(S')$, $x_s \in P_s(S')$, $S' \longrightarrow S$,

$$f_s(x_s)\, f_r(x_r)\, f_s(x_s^{-1}) = f(x_s\, x_r\, x_s^{-1}) .$$

En vertu de Exp. XXII, 5.5.2 il existe des $x_t \in P_t(S')$ ($t = ir+js \in R$, $i, j > 0$) avec

$$x_s\, x_r\, x_s^{-1} = \prod_t x_t ,$$

et on doit donc vérifier la relation

$$f_s(x_s)\, f_r(x_r)\, f_s(x_s^{-1}) = \prod_{\substack{t = ir+js \\ i,j>0}} f_t(x_t) .$$

Par Exp. XXI, 3.5.4, il existe un $w \in W$ tel que $w(r) = r_o \in R_o$, $w(s) \in A_{r_o s_o}$ (notations de 1.7) où $s_o \in R_o$. Relevant w en un $n \in \underline{\mathrm{Norm}}_G(T)(S)$ (par Exp. XXII, 3.8) il suffit de vérifier la relation précédente après conjugaison par $f_N(n)$. Par 2.1.3, on est donc ramené au cas où $r, s \in A_{r_o s_o}$, cas où on conclut par la condition (iii).

Lemme 2.1.5. Soit $n \in \underline{\mathrm{Norm}}_G(T)(S)$ tel que $\mathrm{int}(n)\, U = U^-$ (i.e. que $\bar{n}$ soit la symétrie du groupe de Weyl (Exp. XXI, 3.6.14)).
Pour tout $u \in U(S')$, $S' \longrightarrow S$ (resp. $u \in U^-(S')$, $S' \to S$), on a

$$f(n\, u\, n^{-1}) = f_N(n)\, f(u)\, f_N(n^{-1}) .$$

Immédiat par 2.1.3 et 2.1.4.

Lemme 2.1.6. Soient $u \in B(S')$, $v \in B^-(S')$, $g \in \Omega(S')$, $S' \to S$. Alors

$$f(v\ g\ u) = f(v)\ f(g)\ f(u) \ .$$

En effet, posons $v = v_1\ t_1$, $g = v_2\ t_2\ u_2$, $u = t_3\ u_3$, avec $v_i \in U^-(S')$, $t_i \in T(S')$, $u_i \in U(S')$. On a

$$f(v)\ f(g)\ f(u) = f(v_1)\ f_T(t_1)\ f(v_2)\ f_T(t_2)\ f(u_2)\ f_T(t_3)\ f(u_3) \ .$$

d'une part et

$$\begin{aligned} f(v\ g\ u) &= f(\ v_1\ t_1\ v_2\ t_1^{-1}\ t_1\ t_2\ t_3\ t_3^{-1}\ u_2\ t_3\ u_3\ ) \\ &= f(\ v_1 . t_1\ v_2\ t_1^{-1})\ f_T(t_1\ t_2\ t_3)\ f(\ t_3^{-1}\ u_2\ t_3\ .\ u_3) \ . \end{aligned}$$

Utilisant 2.1.4 pour décomposer les deux termes extrêmes de cette dernière expression, on obtient

$$f(v\ g\ u) = f(v_1)\ f(t_1 v_2 t_1^{-1})\ f_T(\ t_1 t_2\ t_3)\ f(t_3^{-1}\ u_2\ t_3)\ f(u_3) \ .$$

On est alors ramené aux formules évidentes

$$\begin{aligned} f(t_1\ v_2\ t_1^{-1}) &= f_T(t_1)\ f(v_2)\ f_T(t_1)^{-1} \\ f(t_3^{-1}\ u_2\ t_3) &= f_T(t_3)^{-1}\ f(u_2)\ f_T(t_3) \ , \end{aligned}$$

qui résultent de la définition de f et de 2.1.3.

Lemme 2.1.7. Soient $r \in R_o$ et $g \in \Omega(S') \cap \mathrm{int}(w_r)^{-1}\ \Omega(S')$, $S' \longrightarrow S$. Alors

$$f(w_r\ g\ w_r^{-1}) = f_N(w_r)\ f(g)\ f_N(w_r)^{-1} \ .$$

En effet, soit $g \in \Omega(S')$, $S' \longrightarrow S$. Ecrivons

$$g = a\ x_{-r}\ t\ x_r\ b \ ,$$

$a \in U_{-\hat{r}}(S')$, $x_{-r} \in P_{-r}(S')$, $t \in T(S')$, $x_r \in P_r(S')$, $b \in U_{\hat{r}}(S')$ par Exp. XXII, 5.6.8. Par 2.1.3 , 2.1.4 et le fait que s_r permute les racines positives $\neq r$ (cf. Exp. XXI, 3.3.2) , $\mathrm{int}(w_r)\, a \in U_{-\hat{r}}(S')$, $\mathrm{int}(w_r)\, b \in U_{\hat{r}}(S')$ et la formule à démontrer est vraie pour $g = a$ ou $g = b$. Par 2.1.6 , on est donc ramené à démontrer l'assertion cherchée lorsque $g = x_{-r}\, t\, x_r \in Z_r(S')$. Mais alors "tout se passe dans Z_r" et on conclut par la condition (ii) de 2.1.

Lemme 2.1.8. Soit $n \in \underline{\mathrm{Norm}}_G(T)(S)$. Pour tout $S' \longrightarrow S$ et tout $g \in \Omega(S')$ tel que $\mathrm{int}(n)\, g \in \Omega(S')$, on a

$$f(n\, g\, n^{-1}) = f_N(n)\, f(g)\, f_N(n)^{-1} .$$

C'est trivial si $n \in T(S)$ (par 2.1.3). Les deux membres de la formule précédente définissent des morphismes de $\Omega \cap \mathrm{int}(n)^{-1}\, \Omega$ dans H ; pour vérifier qu'ils coïncident, il suffit de vérifier qu'il existe un ouvert V_n de Ω, contenant la section unité tel que $\mathrm{int}(n)\, V_n \subset \Omega$, et que $f \circ \mathrm{int}(n)$ et $\mathrm{int}\, f_N(n) \circ f$ coïncident sur V_n . En vertu de la structure de $\underline{\mathrm{Norm}}_G(T)$, il suffit de prouver que si l'assertion précédente est vraie pour un $n' \in \underline{\mathrm{Norm}}_G(T)(S)$ et si $r \in R_o$, elle est vraie pour $n = n'\, w_r$. Posons

$$V_n = \Omega \cap \mathrm{int}(w_r)^{-1}\, V_{n'} .$$

On a $\mathrm{int}(n)\, V_n \subset \mathrm{int}(n')\, V_{n'} \subset \Omega$. Si $g \in V_n(S')$, on a

$$\mathrm{int}(n)\, g = \mathrm{int}(n')\, \mathrm{int}(w_r)\, g .$$

Or $\mathrm{int}(w_r)\, g \in V_{n'}(S')$, donc par hypothèse

$$f(\mathrm{int}(n')\, \mathrm{int}(w_r)\, g) = \mathrm{int}(f_N(n'))\, f(\mathrm{int}(w_r)\, g) ;$$

comme $\mathrm{int}(w_r)\, g \in \Omega(S')$, on peut appliquer 2.1.7 , qui donne

$$f(\mathrm{int}(w_r)\ g) = \mathrm{int}(f_N(w_r))\ f(g)\ ,$$

et on conclut aussitôt.

Démontrons maintenant 2.1.2 . Soient $x, x' \in \Omega(S')$; écrivons comme d'habitude

$$x = v\,t\,u \quad , \quad x' = v'\,t'\,u' \ ,$$

d'où

$$x\,x' = v\,t\,(uv')\,t'\,u' \ .$$

Par 2.1.6 et la relation $U^-(S')\,\Omega(S')\,U(S') = \Omega(S')$, on est ramené à prouver que si $uv' \in \Omega(S')$, on a $f(uv') = f(u)\,f(v')$.
Soit $n \in \underline{\mathrm{Norm}}_G(T)(S')$ comme dans 2.1.5 (ii) . On a

$$f(u) = f_N(n)^{-1}\, f(\, n\,u\,n^{-1})\ f_N(n)\ ,$$

$$f(v') = f_N(n)^{-1}\, f(\, n\,v'\,n^{-1})\ f_N(n)\ ,$$

par loc. cit., d'où

$$f(u)\,f(v') = f_N(n)^{-1}\ f(nun^{-1})f(nv'n^{-1})\ f_N(n) \ .$$

Mais $nun^{-1} \in U^-(S')$, $nv'n^{-1} \in U(S')$, de sorte que

$$f(nun^{-1})\,f(nv'n^{-1}) = f((nun^{-1})(nv'n^{-1})) = f(nuv'n^{-1}) \ ,$$

ce qui donne

$$f(u)\,f(v') = f_N(n)^{-1}\, f(n\,uv'\,n^{-1})\ f_N(n) \ .$$

Si $uv' \in \Omega(S')$, on peut appliquer 2.1.8 et on a terminé .

<u>Remarque</u> 2.2. Au lieu de se donner f_N , on peut se donner un morphisme de groupes $f_T : T \longrightarrow H$, des sections $h_r \in H(S)$ $(r \in R_o)$, vérifiant les conditions de 1.8.2. Il faut alors remplacer la condition (ii) du théorème par

(ii') Il existe un morphisme de groupes $F_r : Z_r \longrightarrow H$ qui prolonge

$$f_r , f_{-r} , f_T \text{ et vérifie } F_r(w_r) = h_r .$$

Nous allons maintenant donner au théorème précédent une forme plus explicite. Gardons les notations précédentes.

Théorème 2.3. Soient S un préschéma, G un S-groupe épinglé . Soient H un S-faisceau en groupes pour (fppf) ,

$$f_T : T \longrightarrow H ,$$

$$f_r : P_r \longrightarrow H , \quad r \in R_o$$

des morphismes de groupes et

$$h_r \in H(S) , \quad (r \in R_o) ,$$

des sections de H . Pour qu'il existe un morphisme de groupes

$$f : G \longrightarrow H$$

(nécessairement unique) induisant f_T et les f_r $(r \in R_o)$ et vérifiant $f(w_r) = h_r$ pour tout $r \in R_o$, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :

(i) Pour tout $S' \longrightarrow S$, tout $t \in T(S')$, tout $r \in R_o$ et tout $x \in P_r(S')$, on a

(1) $$f_T(t)\, f_r(x)\, f_T(t)^{-1} = f_r(\mathrm{int}(t)\, x) .$$

(ii) Pour tout $r \in R_o$, tout $S' \to S$, tout $t \in T(S')$, on a

(2) $$h_r\, f_T(t)\, h_r^{-1} = f_T(s_r(t)) \quad \left[= f_T(t.r^*r(t)^{-1}) \right] .$$

(iii) Pour tout $(r,s) \in R_o \times R_o$, on a

(3) $$(h_r\, h_s)^{n_{rs}} = f_T(t_{rs}) \quad .$$

(iv) Pour tout $r \in R_o$, on a (rappelons qu'on note $u_r = \exp_r(X_r)$).

(4) $$(h_r\, f_r(u_r))^3 = e \quad .$$

(v) Pour tout $(r,s) \in R_o \times R_o$, $r \neq s$, il existe un morphisme de groupes

$$f_{rs} : U_{rs} \longrightarrow H$$

vérifiant les deux conditions suivantes :

a) On a

(5) $$f_{rs} \mid P_r = f_r \quad , \quad f_{rs} \mid P_s = f_s \quad ,$$

b) Pour tout $t \in A_{rs}$, $t \neq r$ (resp. $t \neq s$), et tout $x \in P_t(S')$, $S' \longrightarrow S$, on a

(6) $$\mathrm{int}(h_r)\, f_{rs}(x) = f_{rs}(\mathrm{int}(w_r)\, x) \quad ,$$

(resp. $$\mathrm{int}(h_s)\, f_{rs}(x) = f_{rs}(\mathrm{int}(w_r)\, x) \quad .$$)

Démonstration. L'unicité est claire par 1.9.2. Prouvons l'existence.

Lemme 2.3.1. Il existe un morphisme de groupes

$$f_N : \underline{\mathrm{Norm}}_G(T) \longrightarrow H$$

prolongeant f_T et vérifiant $f_N(w_r) = h_r$.

C'est en effet ce qu'affirme 1.8.2 , compte tenu des conditions (2) et (3).

Lemme 2.3.2. Il existe un morphisme de groupes

$$F_r : Z_r \longrightarrow H \quad , \quad r \in R_o \ ,$$

prolongeant f_T , f_r et vérifiant $F_r(w_r) = h_r$, donc prolongeant $f_N \mid \underline{\mathrm{Norm}}_{Z_r}(T)$.

C'est clair par Exp. XX, 6.2 et les conditions (1) , (3) et (4) .

Lemme 2.3.3. Pour tout $(r,s) \in R_o \times R_o$, $r \neq s$, tout $n \in \underline{\mathrm{Norm}}_{Z_{rs}}(T)(S)$ tel que $\bar{n}(r) = r$ (resp. $\bar{n}(r) = s$), i.e. $\mathrm{int}(n)\, P_r = P_r$ (resp. $\mathrm{int}(n)\, P_r = P_s$) , tout $S' \to S$ et tout $x \in P_r(S')$, on a

$$\mathrm{int}(f_N(n))\ f_r(x) = f_r(\mathrm{int}(n)\ x)$$

(resp. $$\mathrm{int}(f_N(n))\ f_r(x) = f_s(\mathrm{int}(n)\ x)\ ) \ .$$

En effet, il existe un $t \in T(S)$ et une suite $\{r_i\} \subset \{r,s\}$ tels que $n = t\ w_{r_k} \cdots w_{r_1}$. La condition est vérifiée pour $n = t$ par la condition (1). On peut donc supposer $n = w_{r_k} \cdots w_{r_1}$. Faisons la démonstration par récurrence sur k , i.e. supposons l'assertion prouvée pour tout n qui s'écrit comme un produit de moins de $k-1$ symétries fondamentales (et vérifie les hypothèses du lemme). Considérons les racines

$$u_i = s_{r_i} \cdots s_{r_1}(r) \ .$$

Si tous les u_i sont positifs, i.e. $\in A_{rs}$, on peut appliquer la condition (v) de 2.3. ; prenant les notations de 2.3 (v), on conclut aussitôt par récurrence que

$$\text{int } f_N(w_{r_i} \cdots w_{r_1})\ f_r(x) = f_{rs}\ (\ \text{int}(w_{r_1} \cdots w_{r_1})\ x\ ,$$

soit pour $i = k$ la propriété cherchée. Si tous les u_i ne sont pas positifs, il existe un $j < k$ avec

$$u_j \in R_+ \quad , \quad u_{j+1} \notin R_+ .$$

Comme $u_{j+1} = s_{r_j}(u_j)$, il s'ensuit aussitôt que $u_j = r_j$, par Exp. XXI, 3.3.2 , donc que $^{j}u_j$ est r ou s , et on peut décomposer n en

$$n = n' \cdot n'' \quad ,$$
$$n' = w_{r_k} \cdots w_{r_{j+1}} \quad ,$$
$$n'' = w_{r_j} \cdots w_{r_1} \quad ,$$

n' et n'' vérifiant les hypothèses du lemme et étant produit de moins de $k-1$ symétries, donc vérifiant par l'hypothèse de récurrence la conclusion du lemme.

Lemme 2.3.4. Soit $r \in R$. Si $n, n' \in \text{Norm}_G(T)(S)$ et $s, s' \in R_o$ vérifient $\bar{n}(r) = s$ et $\bar{n}'(r) = s'$, on a

$$\text{int } f_T(n)^{-1}\ f_s(\ n\ x\ n^{-1}) = \text{int } f_T(n')^{-1}\ f_{s'}(n'xn'^{-1}) \ ,$$

pour tout $x \in P_r(S')$, $S' \longrightarrow S$.

Il suffit de vérifier que si $\bar{n}(r) = s$, $r, s \in R_o$, alors $\text{int } f_T(n) \circ f_r = f_s \circ \text{int } n$. Or d'après le lemme de Tits (Exp. XXI, 5.1), il existe une suite de racines simples $r_o = r$, $r_1, \ldots, r_m = s$, une suite d'éléments $w_i \in W$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$, avec

$$\bar{n} = w_{m-1} \cdots w_o \quad ,$$

$$w_i(r_i) = r_{i+1} \quad , \ i = 0, 1, \ldots m-1 \quad ,$$

la condition suivante étant en outre vérifiée : pour tout $i = 0,1,\dots m-1$, il existe une racine simple s_i telle que

$$w_i \in W_{r_i s_i} \quad , \quad r_{i+1} = r_i \text{ ou } s_i \ .$$

On est alors ramené par récurrence au cas traité dans le lemme précédent.

Lemme 2.3.5. Il existe une famille f'_t , $t \in R$, de morphismes de groupes $f'_t : P_t \longrightarrow H$ vérifiant

(i) Pour $r \in R_o$, on a $f'_r = f_r$, $f'_{-r} = F_r \,|\, P_{-r}$ où F_r est défini dans 2.3.2.

(ii) Pour $r,s \in R_o$ et $t \in A_{rs}$, on a $f'_t = f_{rs} \,|\, P_t$.

(iii) Pour tout $n \in \mathrm{Norm}_G(T)(S)$ et $r,s \in R$ tels que $\bar{n}(r) = s$, on a

$$\mathrm{int}\, f_N(n)\ f'_r(x) = f'_s(\ \mathrm{int}(n)\ x)$$

pour tout $x \in P_r(S')$, $S' \longrightarrow S$.

Pour toute racine $r \in R$, il existe un $n \in \mathrm{Norm}_G(T)(S)$ tel que $\bar{n}(r) \in R_o$. Définissons alors $f'_r(x)$ comme l'expression de 2.3.4. Celle-ci est indépendante du choix de n et f'_r est bien un morphisme de groupes. La propriété (iii) est vérifiée par construction. La première assertion de (i) est claire (prendre $n = e$) , la seconde aussi (prendre $n = w_r$ et appliquer 2.3.2); Si $t \in A_{rs}$, $(r,s \in R_o)$, il existe $n \in \mathrm{Norm}_{Z_{rs}}(T)(S)$ tel que $\bar{n}(t) = r$ ou s ; on applique alors (iii) et les conditions (5) et (6) et on a prouvé (ii) .

2.3.6. Démontrons maintenant le théorème en prouvant que les conditions de 2.1 sont vérifiées , pour les morphismes f_N et f'_r , $r \in R$.

2.1. (i) résulte de 2.3.5 (iii) ,

2.1. (ii) résulte de 2.3.5 (i) et 2.3.2 ,

2.1. (iii) résulte de 2.3.5 (ii) et du fait que f_{rs} est un morphisme de groupes.

Un corollaire évident est :

Corollaire 2.4. Soient S un préschéma , G un S-groupe épinglé de rang semi-simple $\geqslant 1$, H un S-faisceau (fppf) en groupes.
Pour chaque $(r,s) \in R_o \times R_o$, soit

$$F_{rs} : Z_{rs} \longrightarrow H$$

un morphisme de groupes. Pour qu'il existe un morphisme de groupes

$$f : G \longrightarrow H$$

induisant les F_{rs} , il faut et il suffit que pour tout $(r,s) \in R_o \times R_o$, on ait

$$F_{rs} \mid Z_r = F_{rr} \quad .$$

La condition est évidemment nécessaire. Supposons-la vérifiée.
Posons $f_T = F_{rr} \mid T$ (qui ne dépend pas de r , car $F_{rr} \mid T = F_{rs} \mid T = F_{ss} \mid T$).
Posons $p_r = F_{rr} \mid P_r$, $h_r = F_{rr}(w_r)$, $f_{rs} = F_{rs} \mid U_{rs}$. Les conditions de 2.3 sont évidemment vérifiées : (1) , (2) , (4) "se vérifient" dans Z_r , (3) , (5) et (6) dans Z_{rs} . Il existe donc un morphisme $f : G \longrightarrow H$ prolongeant f_T , les f_r , $r \in R_o$ et vérifiant $f(w_r) = h_r$; il coïncide avec F_{rs} sur des générateurs de Z_{rs} , donc vérifie $f \mid Z_{rs} = F_{rs}$.

On a également le corollaire technique suivant :

Corollaire 2.5. Soient S un préschéma, G et G' deux S-groupes épinglés de rang semi-simple 2, q un entier > 0 tel que $x \mapsto x^q$ soit un endomorphisme de $\underline{G}_{a\,S}$, $h : \mathcal{R}(G') \longrightarrow \mathcal{R}(G)$ un q-morphisme de données radicielles épinglées. Choisissons pour chaque $r \in R_+$ un $X_r \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^r)^*$ et un $X'_{u(r)} \in \Gamma(S, \mathfrak{g}'^{u(r)})^*$ (prolongeant les choix canoniques pour $r \in R_o$. Supposons réalisées les conditions suivantes :

(i) Si $R_o = \{r,s\}$, on a $D_S(h)(t_{rs}) = t'_{u(r)u(s)}$.

(ii) Pour tout $r \in R_o$ et tout $s \in R_+$, $s \neq r$ (d'où $s_r(S) \in R_+$), si $z \in \underline{G}_m(S)$ est défini par

$$\mathrm{Ad}(w_r)\, X_s = z\, X_{s_r(s)} ,$$

on a aussi

$$\mathrm{Ad}(w'_{u(r)})\, X'_{u(s)} = z^{q(s)}\, X'_{u(s_r(s))} .$$

(iii) Il existe un morphisme de groupes $f : U \longrightarrow U'$ tel que pour tout $r \in R_+$, on ait pour tout $x \in \underline{G}_a(S')$, $S' \longrightarrow S$.

$$f(\exp x\, X_r) = \exp\left(x^{q(r)}\, X'_{u(r)}\right) .$$

Alors il existe un morphisme de groupes épinglés $G \xrightarrow{g} G'$ tel que $\mathcal{R}(g) = h$.

En effet, on définit $f_r : P_r \longrightarrow G'$ par

$$f_r(\exp x X_r) = \exp(x^{q(r)}\, X'_{u(r)}) ;$$

on pose $f_T = D_S(h)$, $h_r = w'_{u(r)}$. Les conditions de 2.3 sont vérifiées (remarquer que $q(s_r(s)) = q(s)$ (Exp. XXI, 6.8.4) et que l'on a toujours $D_S(h)(t_r) = t'_{u(r)}$) et on conclut aussitôt.

Remarque 2.6. On peut préciser ainsi la condition (v) de 2.3. On doit d'abord vérifier

(a) : pour tout mot en w_r et w_s tel que le mot correspondant transforme r ou s en r ou s , la relation du type 2.3.3 correspondante est vérifiée. En fait la démonstration de 2.3.3 montre qu'il suffit de le vérifier pour les mots en w_r et w_s qui sont minimaux (au sens que tout sous-mot initial non trivial ne vérifie pas les conditions imposées).

Si la condition (a) est vérifiée, on peut maintenant définir pour chaque $t \in A_{rs}$ un $f_t : P_t \longrightarrow H$ comme en 2.3.5 ; on doit alors écrire

(b) : le morphisme

$$U_{rs} = \prod_{t \in A_{rs}} P_t \longrightarrow H$$

défini par les f_t est un morphisme de groupes.
Par Exp. XXII, 5.5.8 , (b) est entraîné par

(b') le morphisme précédent respecte les relations de commutations entre P_t et $P_{t'}$ pour $t,t' \in A_{rs}$, $t > t'$ (i.e., les relations en $C_{i,j,t,t'}$ de Exp. XII, 5.5.2).

Il est clair que réciproquement, l'ensemble des conditions (a) et (b') est équivalent à (v) .

On peut même réduire les conditions précédentes à des conditions portant uniquement sur les éléments $h_r, h_s, f_r(u_r), f_s(u_s)$ de H . Une condition du type (a) s'écrira par exemple, si $s_r s_s s_r(s) = r$:

(1) $\quad \mathrm{int}(h_r h_s h_r)\ f_s(x) = f_r(\ \mathrm{int}(w_r w_s w_r)\ x\ )$;

pour tout $x \in P_r(S')$, $S' \longrightarrow S$. En particulier, pour $x = u_s$, on a $\mathrm{int}(w_r w_s w_r)\, u_s = u_r^z$ pour une certaine section z de $\underline{G}_m(S)$, et la relation précédente donnera

(1') $\quad \mathrm{int}(h_r h_s h_r)\ f_s(u_s) = f_r(u_r)^z$.

Montrons que réciproquement, en tenant compte des conditions (i) à (iv) de 2.3 , (1') entraîne (1) . Si $t \in T(S')$, $S' \longrightarrow S$, faisons opérer $\mathrm{int}(t)$ sur (1') ; tenant compte des conditions (i) et (ii) , on obtient (1) pour $x = \mathrm{int}(t)\, u_s = u_s^{s(t)}$. Il suffit de remarquer maintenant que $s : T \longrightarrow \underline{G}_m S$ est fidèlement plat, donc que la condition (1) est certainement vraie pour $x \in P_r^*(S')$, $S' \longrightarrow S$. Comme elle est additive en x et que toute section de P_r s'écrit localement comme somme de deux sections de P_r^* , on en conclut bien que (1') + (i) + (ii) $\Longrightarrow$ (1) .

On raisonne de même avec les conditions du type (b) . Il faut alors se servir du fait que si t et t' sont deux racines positives distinctes (et donc linéairement indépendantes sur $\underline{Q}$) , le morphisme $T \longrightarrow \underline{G}_m^2 S$ de composantes t et t' est fidèlement plat. Nous laissons au lecteur les détails de cette transposition.

3. Groupes de rang semi-simple 2 .

3.1. Généralités.

Lemme 3.1.1. Soient S un préschéma , G un S-groupe épinglé , r et s deux racines de G , avec $r + s \neq 0$.

(i) Si $r + s \notin R$, on a

$$\exp(X_r)\exp(X_s) = \exp(X_s)\exp(X_r)$$

pour tous $X_r \in W(\mathfrak{g}^r)(S')$, $X_s \in W(\mathfrak{g}^s)(S')$, $S' \longrightarrow S$.

(ii) Si $r + s$ et $r - s$ ne sont pas racines, on a

$$w_r(z_r)\exp(X_s)\, w_r(z_r)^{-1} = \exp(X_s)$$

pour tous $X_s \in W(\mathfrak{g}^s)(S')$, $z_r \in W(\mathfrak{g}^r)^*(S')$, $S' \to S$, et

$$w_r(z_r)\ w_s(z_s) = w_s(z_s)\ w_r(z_r)$$

pour tous $z_r \in W(\mathfrak{g}^r)^*(S')$ et $z_s \in W(\mathfrak{g}^s)^*(S')$, $S' \to S$.

(iii) Soient $X_r \in W(\mathfrak{g}^r)^*(S')$, $X_s \in W(\mathfrak{g}^r)^*(S')$, et $w \in \mathrm{Norm}_G(T)(S')$ tels que $\bar{w}(r) = s$; définissons $z \in G_m(S')$ par

$$\mathrm{Ad}(w)\ X_r = z\ X_s \ .$$

Alors

$$\mathrm{int}(w)\ \exp(x\ X_r) = \exp(x\ z\ X_s) \ ,$$

$$\mathrm{int}(w)\ \exp(y\ X_r^{-1}) = \exp(y\ z^{-1}\ X_s^{-1}) \ ,$$

$$\mathrm{int}(w)\ w_r(X_r) = s^*(z)\ w_s(X_s) \ .$$

En particulier, si $z = \pm 1$, on a

$$\mathrm{int}(w)\ w_r(X_r) = w_s(X_s)^z \ .$$

(iv) Si on pose $t_r = r^*(-1)$, $t_s = s^*(-1)$, on a

$$s_r(t_s) = t_s\ t_r^{(s^*,r)} \ ,$$

$$s(t_r) = (-1)^{(r^*,s)} \ .$$

Démonstration. (i) résulte aussitôt de Exp. XXII, 5.5.2 , (ii) de Exp XX, 3.1 et de (i) appliqué à (s,r) , (s,-r) , (-s,r) , (-s,-r), (iii) est évident sur les définitions; pour la dernière assertion de (iii) , remarquer que $s^*(-1) = w_s(X_s)^{-2}$. Enfin, (iv) est trivial .

Proposition 3.1.2. Soient S un préschéma, G un S-groupe épinglé de type $A_1 + A_1$, notons $R_o = R_+ = \{r, s\}$.

(i) On a

$$t_{rs} = (w_r w_s)^2 = t_r t_s = (w_s w_r)^2 = t_{sr} .$$

(ii) On a

$$\mathrm{Ad}(w_r) X_s = X_s , \quad \mathrm{Ad}(w_s) X_r = X_r .$$

(iii) P_r et P_s commutent (i.e. U est commutatif).

En effet, par l'assertion (ii) du lemme, on a

$$w_r w_s = w_s w_r ,$$

d'où $(w_r w_s)^2 = w_r^2 w_s^2 = t_r t_s$, soit (i). Par l'assertion (ii) du lemme, on a également (ii) ; enfin (iii) est l'assertion (i) du lemme.

3.1.3. Explicitons ici la condition (v) de 2.3. En utilisant la méthode exposée en 2.6 , on obtient les deux groupes de conditions suivants; en posant

$$v_r = f_r(u_r) , \quad r \in R_o :$$

$$(A) \begin{cases} h_r v_s h_r^{-1} = v_s \\ h_s v_r h_s^{-1} = v_r \end{cases}$$

$$(B) \left\{ v_r v_s = v_s v_r \right. .$$

3.2. Groupes de type A_2 .

Proposition 3.2.1. Soient S un préschéma , G un S-groupe épinglé de type A_2 , notons $R_o = \{r,s\}$, $R_+ = \{r,s,r+s\}$.

(i) On a

$$t_{rs} = (w_r w_s)^3 = e = (w_s w_r)^3 = t_{sr} .$$

(ii) Posons $\mathrm{Ad}(w_s) X_r = X_{r+s}$. Alors

$$\mathrm{Ad}(w_r) X_s = - X_{r+s} ,$$

$$\mathrm{Ad}(w_r) X_{r+s} = X_s ,$$

$$\mathrm{Ad}(w_s) X_{r+s} = - X_r .$$

(iii) Posons $p_{r+s}(x) = \exp(x X_{r+s}) = \mathrm{int}(w_s) p_r(x)$. On a

$$p_s(y) p_r(x) = p_r(x) p_s(y) p_{r+s}(xy) .$$

3.2.2. On a $(s^*,r) = (r^*,s) = -1$, d'où $r(t_s) = s(t_r) = -1$.

Posons $\mathrm{Ad}(w_s) X_r = X_{r+s}$; on a aussitôt

$$\mathrm{Ad}(w_s) X_{r+s} = r(t_s) X_r = - X_r .$$

Posons

$$\mathrm{Ad}(w_r) X_s = z X_{r+s} , \qquad z \in \underline{G}_m(S) ,$$

d'où

$$\mathrm{Ad}(w_r) X_{r+s} = s(t_r) z^{-1} X_s = - z^{-1} X_s .$$

Nous savons (Exp. XXII, 5.5.2), qu'il existe une unique section $A \in G_a(S)$, avec

(+) $\quad p_s(y) p_r(x) = r_r(x) p_s(y) p_{r+s}(A xy)$.

Il s'agit donc pour prouver (ii) et (iii) de montrer que $A = - z = 1$.

3.2.3. Faisons opérer $\mathrm{int}(w_s)$ sur la formule (+) précédente, on obtient :

$$(++) \quad p_{-s}(-y)\, p_{r+s}(x) = p_{r+s}(x)\, p_{-s}(-y)\, p_r(-Axy)$$

3.2.4. Par définition de p_{r+s}, on a

$$w_s\, p_r(x)\, w_s^{-1} = p_{r+s}(x) \quad ,$$

ce qui s'écrit

$$p_s(1)\, p_{-s}(-1)\, p_s(1)\, p_r(x)\, p_s(-1)\, p_{-s}(1)\, p_s(-1) = p_{r+s}(x) \quad .$$

Comme P_s et P_{r+s} commutent, $r+2s$ n'étant pas racine, cela s'écrit aussi

$$p_s(1)\, p_r(x)\, p_s(-1) = p_{-s}(1)\, p_{r+s}(x)\, p_{-s}(-1) \quad .$$

Utilisant maintenant $(+)$ dans le premier membre et $(++)$ dans le second, on obtient :

$$p_r(x)\, p_s(1)\, p_{r+s}(Ax)\, p_s(-1) = p_{r+s}(x)\, p_{-s}(1)\, p_r(Ax)\, p_{-s}(-1) \quad ,$$

ce qui, $r+2s$ et $r-s$ n'étant pas racine, s'écrit

$$p_r(x)\, p_{r+s}(Ax) = p_{r+s}(x)\, p_r(Ax) \quad ,$$

donc $2r + s$ n'étant pas racine, donne $A = 1$.

3.2.5. Faisons maintenant opérer $\mathrm{int}(w_r)$ sur la formule $(+)$, on trouve, en utilisant le fait que $A = 1$,

$$(+++) \quad p_{r+s}(zy)\, p_{-r}(-x) = p_{-r}(-x)\, p_{r+s}(zy)\, p_s(-z^{-1}xy) \quad .$$

3.2.6. Ecrivons maintenant comme tout-à-l'heure

$$w_r\, p_s(y)\, w_r^{-1} = p_{r+s}(zy) \quad ,$$

soit

$$p_r(1)\, p_s(y)\, p_r(-1) = p_{-r}(1)\, p_{r+s}(zy)\, p_{-r}(-1) \quad .$$

Utilisant maintenant (+) et (+++) , cela s'écrit aussi

$$p_s(y)\, p_{r+s}(-y) = p_{r+s}(zy)\, p_s(-z^{-1}y) \quad ,$$

et donne donc $z = -1$.

3.2.7. On a donc prouvé (ii) et (iii) , prouvons (i) . On a

$$w_r\, w_s\, w_r = w_r\, w_s\, w_r^{-1}\, w_r^2 = w_{r+s}^{-1}\, t_r \quad ,$$

d'où

$$w_s\, w_r\, w_s\, w_r\, w_s = w_s\, w_{r+s}^{-1}\, t_r\, w_s = w_s\, w_{r+s}^{-1}\, w_s^{-1} \cdot s_s(t_r) \cdot t_s =$$

$$= w_r \cdot t_r\, t_s \cdot t_s = w_r\, t_r = w_r^{-1} \quad ,$$

ce qui donne

$$(w_r\, w_s)^3 = (w_s\, w_r)^3 = e \quad ,$$

ce qui achève la démonstration.

Remarque 3.2.8. La condition (v) de 2.3 se traduit ici par (notant $v_r = f_r(u_r)$) :

$$A \left\{ h_r\, v_s^{-1}\, h_r^{-1} = h_s\, v_r\, h_s^{-1} \right. ;$$

$$B \begin{cases} v_s\, v_r = v_r\, v_s \cdot h_s\, v_r\, h_s^{-1} \quad , \\ v_s \cdot h_s\, v_r\, h_s^{-1} = h_s\, v_r\, h_s^{-1} \cdot v_s , \\ v_r \cdot h_s\, v_r\, h_s^{-1} = h_s\, v_r\, h_s^{-1} \cdot v_r \quad . \end{cases}$$

Posant $v_{r+s} = \mathrm{int}(h_s)v_r$, les trois dernières conditions s'écrivent aussi

$$B \begin{cases} v_s v_r = v_r v_s v_{r+s} , \\ v_r v_{r+s} = v_{r+s} v_r , \\ v_s v_{r+s} = v_{r+s} v_s . \end{cases}$$

3.3. Groupes de type B_2 .

Proposition 3.3.1. Soient S un préschéma, G un S-groupe épinglé de type B_2 , notons $R_o = \{ r, s \}$, $R_+ = \{ r, s, r+s, 2r+s \}$.

(i) On a

$$t_{rs} = (w_r w_s)^4 = t_r = (w_s w_r)^4 = t_{sr} .$$

(ii) Si on pose

$$\mathrm{Ad}(w_s) X_r = X_{r+s} , \quad \mathrm{Ad}(w_r) X_s = X_{2r+s} ,$$

on a :

$$\mathrm{Ad}(w_r) X_{r+s} = - X_{r+s} ,$$
$$\mathrm{Ad}(w_r) X_{2r+s} = X_s ,$$
$$\mathrm{Ad}(w_s) X_{r+s} = - X_r ,$$
$$\mathrm{Ad}(w_s) X_{2r+s} = X_{2r+s} .$$

(iii) Posons $p_{r+s}(x) = \exp(xX_{r+s}) = \mathrm{int}(w_s)\, p_r(x)$

$$p_{2r+s}(x) = \exp(x\, X_{2r+s}) = \mathrm{int}(w_r)\, p_s(x) .$$

Alors :

$$p_s(y)\, p_r(x) = p_r(x)\, p_s(y)\, p_{r+s}(xy)\, p_{2r+s}(x^2 y) ,$$
$$p_{r+s}(y)\, p_r(x) = p_r(x)\, p_{r+s}(y)\, p_{2r+s}(2xy) .$$

3.3.2. On a $(s^*,r) = -1$, $(r^*,s) = -2$, d'où $r(t_s) = -1$, $s(t_r) = 1$. Notons en passant que $s(t_r) = r(t_r) = 1$, ce qui montre que t_r est une section de $\underline{Cent}(G)$. Posons

$$Ad(w_s)\, X_r = X_{r+s} , \quad Ad(w_r)\, X_s = X_{2r+s} .$$

On a aussitôt

$$Ad(w_s)\, X_{r+s} = r(t_s)\, X_r = -X_r ,$$
$$Ad(w_r)\, X_{2r+s} = s(t_r)\, X_s = X_s .$$

Comme $(2r+s)+s$ et $(2r+s)-s$ ne sont pas racines, on a

$$Ad(w_s)\, X_{2r+s} = X_{2r+s} .$$

Il existe un scalaire $k \in \underline{G}_m(S)$, avec

$$Ad(w_r)\, X_{r+s} = k\, X_{r+s} .$$

D'autre part, par Exp. XXII, 5.5.2 , il existe des sections $A,B,C \in \underline{G}_a(S)$, avec

(1) $$p_s(y)\, p_r(x) = p_r(x)\, p_s(y)\, p_{r+s}(Axy)\, p_{2r+s}(Bx^2y) ,$$

(2) $$p_{r+s}(y)\, p_r(x) = p_r(x)\, p_{r+s}(y)\, p_{2r+s}(Cxy) .$$

Il s'agit donc, dans (ii) et (iii) , de prouver $A = B = 1$, $C = 2$, $k = -1$

3.3.3. Faisons opérer $int(w_r)$ sur la formule (2) . On trouve

(3) $$p_{2r+s}(y)\, p_{-r}(-x) = p_{-r}(-x)\, p_{2r+s}(y)\, p_{r+s}(Akxy)\, p_s(Bx^2y) .$$

Transformant de même (2) , on obtient

(4) $$p_{r+s}(ky)\, p_{-r}(-x) = p_{-r}(-x)\, p_{r+s}(ky)\, p_s(Cxy) .$$

Transformant (1) par $\mathrm{int}(w_s)$, on a

$$(5) \qquad p_{-s}(-y)\, p_{r+s}(x) = p_{r+s}(x)\, p_{-s}(-y)\, p_r(-Axy)\, p_{2r+s}(Bx^2y) \ .$$

3.3.4. Ecrivons

$$w_s\ p_r(x)\ w_s^{-1} = p_{r+s}(x) \ .$$

Comme $r+2s$ n'est pas racine, cela donne

$$p_s(1)\ p_r(x)\ p_s(-1) = p_{-s}(1)\ p_{r+s}(x)\ p_{-s}(-1) \ .$$

Utilisant (1) au premier membre et (5) au second,

$$p_r(x)\ p_s(1)\ p_{r+s}(Ax)\ p_{2r+s}(Bx^2)\ p_s(-1) =$$

$$= p_{r+s}(x)\ p_{-s}(1)\ p_r(Ax)\ p_{2r+s}(-Bx^2)\ p_{-s}(-1) \ .$$

Comme P_s commute à P_{r+s} et P_{2r+s} d'une part, et P_{-s} commute à P_r et P_{2r+s} d'autre part, cela s'écrit

$$p_r(x)\ p_{r+s}(Ax)\ p_{2r+s}(Bx^2) = p_{r+s}(x)\ p_r(Ax)\ p_{2r+s}(-Bx^2) \ .$$

Transformant le second membre par (2) ,

$$p_r(x)\ p_{r+s}(Ax)\ p_{2r+s}(Bx^2) = p_r(Ax)\ p_{r+s}(x)\ p_{2r+s}((AC - B)\ x^2) \ ,$$

d'où enfin

$$A = 1 \ , \quad C = 2\,B \ .$$

3.3.5. Ecrivons maintenant

$$w_r\ p_s(y)\ w_r^{-1} = p_{2r+s}(y) \ .$$

Comme $3r+s$ n'est pas racine, cela donne

$$p_r(1)\ p_s(y)\ p_r(-1) = p_{-r}(1)\ p_{2r+s}(y)\ p_{-r}(-1) \quad .$$

Utilisant (1) au premier membre, (3) au second, on obtient

$$p_s(y)\ p_{r+s}(-Ay)\ p_{2r+s}(By) = p_{2r+s}(y)\ p_{r+s}(Aky)\ p_s(By) \quad .$$

Comme P_{r+s} , P_{2r+s} , et P_s commutent, cela donne aussitôt

$$B = 1 \ , \quad -A = A\,k \ ,$$

d'où enfin

$$A = 1 \ , \quad B = 1 \ , \ C = 2 \ , \ k = -1 \quad .$$

3.3.6. On a donc prouvé (ii) et (iii) . Prouvons (i) :

$$w_r\, w_s\, w_r = w_r\, w_s\, w_r^{-1}\, t_r = w_{2r+s}\ t_r \quad .$$

$$w_s\, w_r\, w_s\, w_r\, w_s = w_s\, w_{2r+s}\, w_s^{-1} \ . \ s_s(t_r).t_s = w_{2r+s}\ t_r\, t_s \quad .$$

$$w_r\, w_s\, w_r\, w_s\, w_r\, w_s\, w_r = w_r\, w_{2r+s}\, w_r^{-1} \ . \ s_r(t_r t_s).\ t_r =$$

$$= w_s \ . \ t_r \ . \ t_s\, t_r \ . \ t_r = w_s^{-1}\, t_r \ ,$$

d'où

$$(w_s\, w_r)^4 = t_r \ ,$$

et

$$(w_r\, w_s)^4 = s_r(t_r) = t_r \quad ,$$

ce qui achève la démonstration .

Remarque 3.3.7. La condition (v) de 2.3 se traduit ici de la manière suivante :

$$A \quad \begin{cases} \mathrm{int}(h_r\, h_s\, h_r)\, v_s = v_s\,, \\ \mathrm{int}(h_s\, h_r\, h_s)\, v_r = v_r\,, \end{cases}$$

et posant $\quad v_{r+s} = \mathrm{int}(h_s)\, v_r \quad$ et $\quad v_{2r+s} = \mathrm{int}(h_r)\, v_s\,,$

$$B \quad \begin{cases} v_s\, v_r = v_r\, v_s\, v_{r+s}\, v_{2r+s}\,, \\ v_{r+s}\, v_r = v_r\, v_{r+s}\, v_{2r+s}^2\,, \\ v_{r+s}\, v_s = v_s\, v_{r+s}\,, \\ v_{2r+s}\, v_r = v_r\, v_{2r+s}\,, \\ v_{2r+s}\, v_s = v_s\, v_{2r+s}\,, \\ v_{2r+s}\, v_{r+s} = v_{r+s}\, v_{2r+s}\,. \end{cases}$$

3.4. Groupes de type G_2.

Proposition 3.4.1. *Soient* S *un préschéma*, G *un* S*-groupe épinglé de type* G_2, *notons* $R_0 = \{r,s\}$, $R_+ = \{r,s,r+s,2r+s,3r+s,3r+2s\}$.

(i) *On a*

$$t_{rs} = (w_r\, w_s)^6 = e = (w_s\, w_r)^6 = t_{sr}\,.$$

(ii) *Si on pose*

$$\mathrm{Ad}(w_s)\, X_r = X_{r+s}\,, \quad \mathrm{Ad}(w_r)\, X_{r+s} = X_{2r+s}\,,$$
$$\mathrm{Ad}(w_r)\, X_s = -X_{3r+s}\,, \quad \mathrm{As}(w_s)\, X_{3r+s} = X_{3r+2s}\,,$$

on a :

$$\mathrm{Ad}(w_r)\, X_{2r+s} = -X_{r+s}\,, \quad \mathrm{Ad}(w_r)\, X_{3r+s} = X_s\,,$$
$$\mathrm{Ad}(w_r)\, X_{3r+2s} = X_{3r+2s}\,, \quad \mathrm{Ad}(w_s)\, X_{r+s} = -X_r\,,$$
$$\mathrm{Ad}(w_s)\, X_{2r+s} = X_{2r+s}\,, \quad \mathrm{Ad}(w_s)\, X_{3r+2s} = -X_{3r+s}\,.$$

(iii) Si on pose

$$p_{r+s}(x) = \exp(xX_{r+s}) = \mathrm{int}(w_s)\, p_r(x) \ ,$$
$$p_{2r+s}(x) = \exp(xX_{2r+s}) = \mathrm{int}(w_r w_s)\, p_r(x) \ ,$$
$$p_{3r+s}(x) = \exp(xX_{3r+s}) = \mathrm{int}(w_r)\, p_s(-x) \ ,$$
$$p_{3r+2s}(x) = \exp(xX_{3r+2s}) = \mathrm{int}(w_s w_r)\, p_s(-x) \ ,$$

on a :

$$p_s(y)\, p_r(x) =$$
$$= p_r(x)\, p_s(y)\, p_{r+s}(xy)\, p_{2r+s}(x^2y)\, p_{3r+s}(x^3y)\, p_{3r+2s}(x^3y^2) \ .$$

$$p_{r+s}(y)\, p_r(x) = p_r(x)\, p_{r+s}(y)\, p_{2r+s}(2xy)\, p_{3r+s}(3x^2y)\, p_{3r+2s}(3xy^2) \ .$$

$$p_{2r+s}(y)\, p_r(x) = p_r(x)\, p_{2r+s}(y)\, p_{3r+s}(3xy) \ .$$

$$p_{3r+s}(y)\, p_s(x) = p_s(x)\, p_{3r+s}(y)\, p_{3r+2s}(-xy) \ .$$

$$p_{2r+s}(y)\, p_{r+s}(x) = p_{r+s}(x)\, p_{2r+s}(y)\, p_{3r+2s}(3xy) \ .$$

3.4.2. On a $(s^*,r) = -1$, $(r^*,s) = -3$, d'où $s(t_r) = r(t_s) = -1$. Définissons X_{r+s} , X_{2r+s} , X_{3r+s} et X_{3r+2s} comme dans (ii) . On a aussitôt

$$\mathrm{Ad}(w_s)\, X_{r+s} = r(t_s)\, X_r = -X_r \ ,$$
$$\mathrm{Ad}(w_r)\, X_{2r+s} = r(t_r)\, s(t_r)\, X_{r+s} = -X_{r+s} \ ,$$
$$\mathrm{Ad}(w_r)\, X_{3r+s} = -s(t_r)\, X_s = X_s \ ,$$
$$\mathrm{Ad}(w_s)\, X_{3r+2s} = r(t_s)^3\, s(t_s)\, X_{3r+s} = -X_{3r+s} \ .$$

Enfin, comme $(3r+2s) \pm r$ et $(2r+s) \pm s$ ne sont pas racines, on a :

$$\mathrm{Ad}(w_r)\, X_{3r+2s} = X_{3r+2s} \ , \ \mathrm{Ad}(w_s)\, X_{2r+s} = X_{2r+s} \ ,$$

ce qui achève de démontrer (ii).

3.4.3. En vertu de Exp. XXII, 5.5.2 , il existe des scalaires

$$A,B,C,D,E,F,G,H,J \in \underline{G}_a(S) \ ,$$

tels que

(1) $p_s(y)\ p_r(x) =$
$= p_r(x)\ p_s(y)\ p_{r+s}(Axy)\ p_{2r+s}(Bx^2y)\ p_{3r+s}(Cx^3y)\ p_{3r+2s}(Dx^3y^2)$.

(2) $p_{r+s}(y)\ p_r(x) = p_r(x)\ p_{r+s}(y)\ p_{2r+s}(Exy)\ p_{3r+s}(Fx^2y)\ p_{3r+2s}(Gxy^2)$.

(3) $p_{2r+s}(y)\ p_r(x) = p_r(x)\ p_{2r+s}(y)\ p_{3r+s}(Hxy)$.

(4) $p_{3r+s}(y)\ p_s(x) = p_s(x)\ p_{3r+s}(y)\ p_{3r+2s}(Jxy)$.

3.4.4. Faisons opérer $\mathrm{int}(w_s)$ sur (1) , (3) et (4) :

(5) $p_{-s}(-y)p_{r+s}(x) =$
$= p_{r+s}(x)\ p_{-s}(-y)\ p_r(-Axy)\ p_{2r+s}(Bx^2y)\ p_{3r+2s}(Cx^3y)\ p_{3r+s}(-Dx^3y^2)$.

(6) $p_{2r+s}(y)\ p_{r+s}(x) = p_{r+s}(x)\ p_{2r+s}(y)\ p_{3r+2s}(Hxy)$.

(7) $p_{3r+2s}(y)\ p_{-s}(-x) = p_{-s}(-x)\ p_{3r+2s}(y)\ p_{3r+s}(-Jxy)$.

Faisant de même opérer $\mathrm{int}(w_r)$ sur (1) , on trouve

(8) $p_{3r+s}(-y)\ p_{-r}(-x) =$
$= p_{-r}(-x)\ p_{3r+s}(-y)\ p_{2r+s}(Axy)\ p_{r+s}(-Bx^2y)\ p_s(Cx^3y)\ p_{3r+s}(Dx^3y^2)$.

3.4.5. Ecrivons

$$w_s\ p_r(x)\ w_s^{-1} = p_{r+s}(x) \ ,$$

soit , $r + 2s$ n'étant pas racine :

$$p_s(1)\ p_r(x)\ p_r(-1) = p_{-s}(1)\ p_{r+s}(x)\ p_{-s}(-1) \quad .$$

Transformant le premier membre par (1) , puis (4) :

$$p_s(1)\ p_r(x)\ p_s(-1) =$$

$$= p_r(x)\ p_s(1)\ p_{r+s}(Ax)\ p_{2r+s}(Bx^2)\ p_{3r+s}(Cx^3)\ p_{3r+2s}(Dx^3)\ p_s(-1) =$$

$$= p_r(x)\ p_s(1)\ p_{r+s}(Ax)\ p_{2r+s}(Bx^2)\ p_s(-1)\ p_{3r+s}(Cx^3)\ p_{3r+2s}((D-CJ)x^3) =$$

$$= p_r(x)\ p_{r+s}(Ax)\ p_{2r+s}(Bx^2)\ p_{3r+s}(Cx^3)\ p_{3r+2s}((D-CJ)x^3) \quad .$$

Transformons le second membre par (5) , puis (7) :

$$p_{-s}(1)\ p_{r+s}(x)\ p_{-s}(-1) =$$

$$= p_{r+s}(x)\ p_{-s}(1)\ p_r(Ax)\ p_{2r+s}(-Bx^2)\ p_{3r+2s}(-Cx^3)\ p_{3r+s}(-Dx^3)\ p_{-s}(-1) =$$

$$= p_{r+s}(x)\ p_r(Ax)\ p_{2r+s}(-Bx^2)\ p_{3r+2s}(-Cx^3)\ p_{3r+s}((CJ-D)\ x^3) \quad .$$

Utilisant maintenant (2) , ce second membre devient

$$p_r(Ax)\ p_{r+s}(x)\ p_{2r+s}(AEx^2)\ p_{3r+s}(A^2Fx^3)\ p_{3r+2s}(AGx^3)\ldots$$

$$\ldots p_{2r+s}(-Bx^2)\ p_{3r+2s}(-Cx^3)\ p_{3r+s}((CJ-D)x^3) =$$

$$p_r(Ax)\ p_{r+s}(x)\ p_{2r+s}((AE-B)x^2)\ p_{3r+s}((A^2F+CJ-D)x^3)\ p_{3r+2s}((AG-C)x^3) \quad .$$

Identifiant les résultats obtenus, on obtient :

$$A = 1 \quad , \quad E = 2B \quad , \quad C+D = F+CJ \quad , \quad F = G \quad .$$

3.4.6. Ecrivons maintenant

$$w_r\ p_s(y)\ w_r^{-1} = p_{3r+s}(-y) \quad ,$$

soit, $4r+s$ n'étant pas racine :

$$p_r(1)\ p_s(y)\ p_r(-1) = p_{-r}(1)\ p_{3r+s}(-y)\ p_{-r}(-1) \ .$$

Transformant le premier membre par (1) :

$$p_r(1)\ p_s(y)\ p_r(-1) =$$

$$= p_s(y)\ p_{r+s}(-Ay)\ p_{2r+s}(By)\ p_{3r+s}(-Cy)\ p_{3r+2s}(-Dy^2) \ .$$

Transformons le second membre successivement par (8), (6) et (4) :

$$p_{-r}(1)\ p_{3r+s}(-y)\ p_{-r}(-1) =$$

$$= p_{3r+s}(-y)\ p_{2r+s}(Ay)\ p_{r+s}(-By)\ p_s(Cy)\ p_{3r+2s}(Dy^2) =$$

$$= p_{3r+s}(-y)\ p_{r+s}(-By)\ p_{2r+s}(Ay)\ p_{3r+2s}(-ABHy^2)\ p_s(Cy)\ p_{3r+2s}(Dy^2) =$$

$$= p_s(Cy)\ p_{3r+s}(-y)\ p_{r+s}(-By)\ p_{2r+s}(Ay)\ p_{3r+2s}((D-CJ-ABH)y^2) =$$

$$= p_s(Cy)\ p_{r+s}(-By)\ p_{2r+s}(Ay)\ p_{3r+s}(-y)\ p_{3r+2s}((D-CJ-ABH)y^2) \ .$$

Identifiant :

$$C = 1 \ , \quad A = B \ , \quad D - CJ - ABH = -D \ .$$

Tenons compte des résultats déjà obtenus :

$$A = B = C = 1 \ , \quad E = 2 \ , \quad F = G \ ,$$
$$D + 1 = F + J \ , \quad 2D = H + J \ .$$

3.4.7. Ecrivons

$$w_s\ p_{3r+s}(x)\ w_s^{-1} = p_{3r+2s}(x) \ ,$$

soit

$$p_s(1)\ p_{3r+s}(x)\ p_s(-1) = p_{-s}(1)\ p_{3r+2s}(x)\ p_{-s}(-1) \ .$$

Transformant le premier membre par (4) , le second par (7) , on obtient :

$$p_{3r+s}(x)\ p_{3r+2s}(-Jx) = p_{3r+2s}(x)\ p_{3r+s}(-Jx) \ ,$$

soit $J = -1$.

3.4.8. Ecrivons enfin

$$w_r\ p_{r+s}(y)\ w_r^{-1} = p_{2r+s}(y) \ ,$$

soit

$$p_r(1)\ p_{r+s}(y)\ p_r(-1) = p_{-r}(1)\ p_r(-1)\ p_{2r+s}(y)\ p_r(1)\ p_{-r}(-1) \ .$$

Transformant le premier membre par (2) , le second par (3) , on obtient :

$$p_{r+s}(y)\ p_{2r+s}(-Ey)\ p_{3r+s}(Fy)\ p_{3r+2s}(-Gy^2) =$$

$$= p_{-r}(1)\ p_{2r+s}(y)\ p_{3r+s}(Hy)\ p_{-r}(-1) \ .$$

Il est immédiat de voir que si l'on fait commuter $p_{-r}(-1)$ avec $p_{3r+s}(Hy)$, puis $p_{2r+s}(y)$, on n'introduit pas dans le second membre de nouveaux termes en p_{3r+s} . Celui-ci s'écrit donc, en notant par des parenthèses vides les quantités dont la valeur exacte ne nous importe pas :

$$p_{r+s}(\ )\ p_{2r+s}(\ )\ p_s(\ )\ p_{3r+s}(Hy)\ p_{3r+2s}(\ ) \ .$$

Comparant avec le premier membre, on a aussitôt $F = H$, d'où par les résultats antérieurs $2D = D + 1$, soit $D = 1$, et enfin $F = G = H = 2D - J = 3$, ce qui achève la détermination des coefficients $A,\ldots,J$ et la démonstration de (iii) .

3.4.9. Prouvons enfin (i) à la manière habituelle :

$$w_r\ w_s\ w_r = w_r\ w_s\ w_r^{-1}\ t_r = w_{3r+s}^{-1}\ t_r \ .$$

$$w_s\,(w_r\,w_s)^2 = w_s\,w_{3r+s}^{-1}\,w_s^{-1}\cdot s_s(t_r)\cdot t_s =$$

$$= w_{3r+2s}^{-1}\cdot t_r\,t_s\cdot t_s = w_{3r+2s}^{-1}\cdot t_r\ .$$

$$w_r\,(w_s\,w_r)^3 = w_r\,w_{3r+2s}^{-1}\,w_r^{-1} = w_{3r+2s}^{-1}\ .$$

$$w_s\,(w_r\,w_s)^4 = w_s\,w_{3r+2s}^{-1}\,w_s^{-1}\cdot t_s = w_{3r+s}\cdot t_s\ .$$

$$w_r\,(w_s\,w_r)^5 = w_r\,w_{3r+s}\,w_r^{-1}\cdot s_r(t_s)\cdot t_s = w_s\cdot t_s t_r\cdot t_r =$$

$$= w_s^{-1}\ .$$

D'où

$$(w_r\,w_s)^6 = (w_s\,w_r)^6 = e\ .$$

Remarque 3.4.10. La condition (v) de 2.4 est formée de

$$\text{(A)}\quad \begin{cases} \mathrm{int}(h_r\,h_s\,h_r\,h_s\,h_r)\,v_s = v_s\ , \\ \mathrm{int}(h_s\,h_r\,h_s\,h_r\,h_s)\,v_r = v_r\ , \end{cases}$$

et posant

$$v_{r+s} = \mathrm{int}(h_s)\,v_r\ ,\quad v_{2r+s} = \mathrm{int}(h_r\,h_s)\,v_r\ ,$$

$$v_{3r+s} = \mathrm{int}(h_r)\,v_s^{-1}\ ;\quad v_{3r+2s} = \mathrm{int}(h_s\,h_r)\,v_s^{-1}\ ,$$

des relations de commutation :

$$\text{(B)}\quad \begin{cases} v_s\,v_r = v_r\,v_s\,v_{r+s}\,v_{2r+s}\,v_{3r+s}\,v_{3r+2s}\ , \\ v_{r+s}\,v_r = v_r\,v_{r+s}\,v_{2r+s}^2\,v_{3r+s}^3\,v_{3r+2s}^3\ , \\ v_{2r+s}\,v_r = v_r\,v_{2r+s}\,v_{3r+s}^3\ , \end{cases}$$

$$
(B)\quad \begin{cases}
v_{3r+s}\, v_r = v_r\, v_{3r+s} \ , \\
v_{3r+2s}\, v_r = v_r\, v_{3r+2s} \ , \\
v_{r+s}\, v_s = v_s\, v_{r+s} \ , \\
v_{2r+s}\, v_s = v_s\, v_{2r+s} \ , \\
v_{3r+s}\, v_s = v_s\, v_{3r+s}\, v_{3r+2s}^{-1} \ , \\
v_{3r+2s}\, v_s = v_s\, v_{3r+2s} \ , \\
v_{2r+s}\, v_{r+s} = v_{r+s}\, v_{2r+s}\, v_{3r+2s}^{3} \ , \\
v_{3r+s}\, v_{r+s} = v_{r+s}\, v_{3r+s} \ , \\
v_{3r+2s}\, v_{r+s} = v_{r+s}\, v_{3r+2s} \ , \\
v_{3r+s}\, v_{2r+s} = v_{2r+s}\, v_{3r+s} \ , \\
v_{3r+2s}\, v_{2r+s} = v_{2r+s}\, v_{3r+2s} \ , \\
v_{3r+2s}\, v_{3r+s} = v_{3r+s}\, v_{3r+2s} \ .
\end{cases}
$$

3.5. Forme explicite du théorème de générateurs et relations.

Théorème 3.5.1. Soient S un préschéma, G un S-groupe épinglé, T son tor maximal, R_o son système de racines simples, $u_r \in P_r(S)^*$ et $w_r \in \mathrm{Norm}_G(T)(S)$ les éléments définis par l'épinglage $(r \in R_o)$. Soient

$$f_T : T \longrightarrow H$$

$$f_r : P_r \longrightarrow H \quad , \quad r \in R_o$$

des morphismes de groupes, H étant un S-faisceau en groupes pour (fppf) ; soient $h_r \in H(S)$, $(r \in R_o)$ des sections de H , posons $v_r = f_r(u_r)$, $r \in R_o$. Pour qu'il existe un morphisme de groupes

$$f : G \longrightarrow H$$

prolongeant f_T , f_r $(r \in R_o)$ et vérifiant $f(w_r) = h_r$ $(r \in R_o)$ (et alors nécessairement unique), il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites :

(i) Pour tout $S' \longrightarrow S$, tout $r \in R_o$, tout $t \in T(S')$ et tout $x \in P_r(S')$, on a

(1) $\quad \text{int}\, f_T(t)\ f_r(x) = f_r(\text{int}(t)\, x) \left[= f_r(x^{r(t)}) \right]$.

(ii) Pour tout $r \in R_o$, tout $S' \longrightarrow S$ et tout $t \in T(S')$, on a

(2) $\quad \text{int}(h_r)\, f_T(t) = f_T(s_r(t)) \left[= f_T(t.\, r^*r(t)^{-1}) \right]$.

(iii) Pour tout $r \in R_o$, on a

(3') $\quad h_r^2 = f_T(r^*(-1))$,

(4) $\quad (h_r\, v_r)^3 = e$.

(iv) Pour tout couple $(r,s) \in R_o \times R_o$, $r \neq s$, tel que $(r^*,s) = 0$ (resp. $(r^*,s) = (s^*,r) = -1$, resp. $(r^*,s) = -2$, resp. $(r^*,s) = -3$) , on a :

a) la relation

(3") $\quad (h_r\, h_s)^2 = f_T(r^*(-1)\ s^*(-1))$

(resp. $(h_r\, h_s)^3 = e$,

resp. $(h_r h_s)^4 = f_T(r^*(-1))$,

resp. $(h_r h_s)^6 = e$) ;

b) Les relations (A) de 3.1.3 (resp. 3.2.8 , resp. 3.3.7 , resp. 3.4.10) ;

c) la (resp. les trois , resp. les six, resp. les quinze) relation(s) (B) de 3.1.3 (resp. 3.2.8 , resp. 3.3.7 , resp. 3.4.10).

Cela résulte aussitôt de 2.3 , 2.6 et des calculs faits dans chaque cas particulier.

Remarque 3.5.2. On peut présenter de manière légèrement différente les résultats précédents : on se donne des morphismes

$$a_r : T \cdot P_r \longrightarrow H \qquad (r \in R_o)$$

$$b_r : \underline{\mathrm{Norm}}_{Z_r}(T) \longrightarrow H \qquad (r \in R_o) \ ;$$

les conditions à vérifier sont les suivantes :

1) tous les a_r $(r \in R_o)$ et tous les b_r $(r \in R_o)$ ont même restriction à T ;

2) pour tout $r \in R_o$, posons

$$h_r = b_r(w_r) \ , \quad v_r = a_r(u_r) \ ;$$

on a pour tout $r \in R_o$ la relation

$$(h_r v_r)^3 = e \ ,$$

et les conditions de (iv) ci-dessus sont vérifiées.

3.5.3. On donnera dans l'exposé suivant diverses applications de ce théorème. Signalons-en ici une : le théorème 3.5.1 donne une description par générateurs et relations de G dans la catégorie des S-faisceaux pour (fppf) ; autrement dit, considérons pour chaque $S' \longrightarrow S$ le groupe $H(S')$ engendré par $T(S')$, $p_r(S')$, $r \in R$, et w_r, $r \in R$, soumis aux relations analogues à (1) .... (3"),(A), (B) ; alors G n'est autre que le faisceau associé au préfaisceau $S' \longmapsto H(S')$. En particulier, si S' est le spectre d'un corps algébriquement clos k, on a $G(S') = H(S')$ (conséquence immédiate du Nullstellensatz sous la forme : "un crible d'un corps algébriquement clos, couvrant pour (fppf), est trivial "), de sorte que 3.5.1 donne aussitôt une description explicite par générateurs et relations du groupe "abstrait" $G(k)$.

4. Unicité des groupes épinglés : théorème fondamental.

Théorème 4.1. Soit S un préschéma non vide. Le foncteur $\mathcal{R}$ de 1.6 est pleinement fidèle : soient G et G' deux S-groupes épinglés, q un entier 0 tel que $x \longmapsto x^q$ soit un endomorphisme de G_{aS}, $h : \mathcal{R}(G') \longrightarrow \mathcal{R}(G)$ un q-morphisme de données radicielles épinglées.
Il existe un unique morphisme de groupes épinglés

$$f : G \longrightarrow G'$$

tel que $\mathcal{R}(f) = h$.

L'unicité est démontrée en 1.9. Il suffit de démontrer l'existence. Par hypothèse, on a une bijection $u : R \xrightarrow{\sim} R'$ et une application $\underline{a} : R \longrightarrow q^{\mathbb{N}}$ telle que

$$h(u(r)) = \underline{a}(r)\, r \ ,$$
$$t_{h(r^*)} = \underline{a}(r)\, u(r)^* \ ,$$

pour tout $r \in R$. En particulier, les rangs semi-simples de G et G' coïncident.

4.1.1. Supposons $rgss(G) = rgss(G') = 0$. Alors G et G' sont des tor on a $G = T = D_S(M)$, $G' = T' = D_S(M')$ et h est simplement un morphisme groupes ordinaires $h : M' \longrightarrow M$. On prend alors $f = D_S(h)$.

4.1.2. Supposons $rgss(G) = rgss(G') = 1$. Considérons alors

$$f_T = D_S(h) : T \longrightarrow T' .$$

Par hypothèse. on a un diagramme commutatif $(r' = u(r))$.

$$\begin{array}{ccccc} \underline{G}_m S & \xrightarrow{r^*} & T & \xrightarrow{r} & \underline{G}_m S \\ \downarrow \underline{u}(r) & & \downarrow f_T & & \downarrow \underline{u}(r) \\ \underline{G}_m S & \xrightarrow{r'^*} & T' & \xrightarrow{r'} & \underline{G}_m S \end{array} .$$

On applique alors Exp. XX, 4.1.

4.1.3. Supposons $rgss(G) = rgss(G') = 2$. Alors, par Exp. XXI, 7.5.3 on connaît toutes les possibilités pour $h : \mathcal{R}(G') \longrightarrow \mathcal{R}(G)$. Etudions-les successivement, en vérifiant chaque fois les conditions de 2.5.

Notons $R_o = \{r,s\}$, $R'_o = \{r',s'\}$ de façon que $u(r) = r'$, $u(s) = s'$.

4.1.4. G et G' de type $A_1 + A_1$. On a alors

$$h(r') = q\, r \quad , \quad h(s') = q_1\, s \ .$$

Montrons que les conditions de 2.5. sont vérifiées. Par 3.1.2 (ii) (resp (iii)) , (ii) (resp. (iii)) est trivial. Prouvons (i) .

n a

$$D_S(h)\ t_{rs} = D_S(h)\ t_r\ t_s = {}^t h(r^*)(-1)\ {}^t h(s^*)(-1) =$$

$$= r'^*(-1)^q\ s'^*(-1)^{q'} = r'^*(-1)\ s'^*(-1) = t'_{r',\,s'} .$$

.1.5. G et G' de type A_2 . On a alors

$$h(r') = q\,r \qquad , \quad h(s') = q\,s \ .$$

osons $X_{r+s} = \mathrm{Ad}(w_s)\ X_r$, $X'_{r'+s'} = \mathrm{Ad}(w_{s'})\ X_{r'}$. Vérifions les conditions de 2.5. Pour (i) , on raisonne comme ci-dessus, à l'aide de 3.2.1 i) ; pour (ii) , c'est immédiat par 3.2.1 (ii) ; reste à vérifier (iii) . n a à vérifier que

$$p_r(x)\ p_s(y)\ p_{r+s}(z) \longmapsto p'_{r'}(x^q)\ p'_{s'}(y^q)\ p'_{r'+s'}(z^q)$$

st un morphisme de groupes. La seule relation de commutation non triviale st celle de 3.2.1 (iii) qui s'écrit

$$p_s(y)\ p_r(x) = p_r(x)\ p_s(y)\ p_{r+s}(xy) \ ,$$

$$p'_{s'}(y^q)\ p'_{r'}(x^q) = p'_{r'}(x^q)\ p'_{s'}(y^q)\ p'_{r'+s'}(x^q y^q) \ .$$

.1.6. On raisonne de même pour G et G' de type B_2 (resp. G_2) , orsque les exposants radiciels sont égaux, à l'aide de 3.3.1 (resp. 3.4.1); l reste donc à traiter, pour achever le cas des groupes de rang 2 , les deux as exceptionnels de Exp. XXI, 7.5.3.

.1.7. G et G' sont de type B_2 , S est de caractéristique 2 , on a

$(r) = 2q$, $q(s) = q$.

Les racines positives sont $\{r,s,r+s,\ 2r+s\}$ et $\{r',s',r'+s',r'+2s'\}$ (remarquer que les racines "courtes" sont r et s'). On a

$$h(r') = 2qr\ ,\ h(s') = qs\ ,\ h(r'+s') = q(2r+s)\ ,\ h(r'+2s') = 2q(r+s)\ ,$$

ce qui donne

$$u(r+s) = r'+2s'\ ,\quad \underline{q}(r+s) = 2q\ ,$$

$$u(2r+s) = r'+s'\ ,\quad \underline{q}(2r+s) = q\ .$$

Posons

$$X_{r+s} = \mathrm{Ad}(w_s)\,X_r\ ,\quad X_{2r+s} = \mathrm{Ad}(w_r)\,X_s\ ,$$

$$X'_{r'+s'} = \mathrm{Ad}(w'_{r'})\,X'_{s'}\ ,\quad X'_{r'+2s'} = \mathrm{Ad}(w'_{s'})\,X'_{r'}\ .$$

Vérifions maintenant les conditions de 2.5.

(i) Comme S est de caractéristique 2, on a $-1 = 1$ sur S, donc $t_{rs} = t_r = r^*(-1) = e = s'^*(-1) = t'_{s'} = t'_{r's'}$, (cf. 3.3.1 (i)).

(ii) On a par construction

$$\mathrm{Ad}(w_r)\,X_s = X_{2r+s}\ ,\quad \mathrm{Ad}(w'_{r'})\,X'_{s'} = X'_{r'+s'} = X'_{u(2r+s)}\ ;$$

$$\mathrm{Ad}(w_s)\,X_r = X_{r+s}\ ,\quad \mathrm{Ad}(w'_{s'})\,X'_{r'} = X'_{r+2s'} = X'_{u(r+s)}\ .$$

Par 3.3.1 (ii) et le fait que $-1 = 1$ sur S, on a de part et d'autre

$$\mathrm{Ad}(w_r)\,X_{r+s} = X_{r+s}\ ,\quad \mathrm{Ad}(w'_{r'})\,X'_{u(r+s)} = \mathrm{Ad}(w'_{r'})\,X'_{r'+2s'} =$$

$$= X'_{r'+2s'} = X'_{u(r+s)}\ ;$$

$$\mathrm{Ad}(w_r)\,X_{2r+s} = X_s\ ,\quad \mathrm{Ad}(w'_{r'})\,X'_{u(2r+s)} = \mathrm{Ad}(w'_{r'})\,X'_{r'+s'} =$$

$$= X'_{s'} = X'_{u(s)}\ ;$$

$$\mathrm{Ad}(w_s)\, X_{r+s} = X_r \quad , \quad \mathrm{Ad}(w'_{s'})\, X'_{u(r+s)} = \mathrm{Ad}(w'_{s'})\, X'_{r'+2s'} =$$

$$= X'_{r'} = X'_{u(r)} \quad ;$$

$$\mathrm{Ad}(w_s)\, X_{2r+s} = X_{2r+s} \quad , \quad \mathrm{Ad}(w'_{s'})\, X'_{u(2r+s)} = \mathrm{Ad}(w'_{s'})\, X'_{r'+s'} =$$

$$= X'_{r'+s'} = X'_{u(2r+s)} \quad .$$

(iii) Par 3.3.1 (iii), on voit que la seule relation de commutation non triviale dans U (resp. U') est

$$p_s(y)\, p_r(x) = p_r(x)\, p_s(y)\, p_{r+s}(xy)\, p_{2r+s}(x^2y) \quad ,$$

(resp.

$$p'_{r'}(y')\, p'_{s'}(x') = p'_{s'}(x')\, p'_{r'}(y')\, p'_{r'+s'}(x'y')\, p'_{r'+2s'}(x'^2y') \ ).$$

Il nous faut vérifier que le morphisme

$$p_r(x)\, p_s(y)\, p_{r+s}(z)\, p_{2r+s}(t) \longmapsto p'_{r'}(x^{2q})\, p'_{s'}(y^q)\, p'_{r'+2s'}(z^{2q})\, p'_{r'+s'}(t^q)$$

est un morphisme de groupes; on voit aussitôt que cela revient à voir que

$$p'_{s'}(y^q)\, p'_{r'}(x^{2q}) = p'_{r'}(x^{2q})\, p'_{s'}(y^q)\, p'_{r'+2s'}((xy)^{2q})\, p'_{r'+s'}((x^2y)^q) \quad ,$$

ce qui n'est autre que la seconde relation ci-dessus (en posant $y' = x^{2q}$, $x' = y^q$).

4.1.8. G et G' sont de type G_2, S est de caractéristique 3, on a

$$a(r) = 3q \quad , \quad a(s) = q \quad .$$

Les racines positives sont $\{r, s, r+s, 2r+s, 3r+s, 3r+2s\}$ d'une part,

Les racines positives sont $\{r,s,r+s,2r+s,3r+s,3r+2s\}$ d'une part, $\{r',s',r'+s',r'+2s',r'+3s',2r'+3s'\}$ d'autre part (comme dans le cas précédent, les racines courtes sont r et s') . On a

$$h(r') = 3qr \quad , \quad h(s') = qs \quad , \quad h(r'+s') = q(3r+s) \ ,$$

$$h(r'+2s') = q(3r+2s) \ , \ h(r'+3s') = 3q(r+s) \quad ,$$

$$h(2r'+3s') = 3q(2r+s) \quad ,$$

ce qui donne

$$u(r+s) = r'+3s' \quad , \quad \underline{a}(r+s) = 3q \ ,$$

$$u(2r+s) = 2r'+3s' \quad , \quad \underline{a}(2r+s) = 3q \ ,$$

$$u(3r+s) = r'+s' \quad , \quad \underline{a}(3r+s) = q \ ,$$

$$u(3r+2s) = r'+2s' \quad , \quad \underline{a}(3r+2s) = q \ .$$

Posons

$$X_{r+s} = \mathrm{Ad}(w_s)\, X_r \quad , \quad X_{2r+s} = \mathrm{Ad}(w_r)\, X_{r+s} \ ,$$

$$X_{3r+s} = -\mathrm{Ad}(w_r)\, X_s \quad , \quad X_{3r+2s} = \mathrm{Ad}(w_s)\, X_{3r+s} \ ;$$

$$X'_{r'+s'} = -\mathrm{Ad}(w'_{r'})\, X'_{s'} \quad , \quad X'_{r'+2s'} = \mathrm{Ad}(w'_{s'})\, X'_{r'+s'} \ ,$$

$$X'_{r'+3s'} = \mathrm{Ad}(w'_{s'})\, X'_{r'} \quad , \quad X'_{2r+3s'} = \mathrm{Ad}(w'_{r'})\, X'_{r'+3s'} \ .$$

Vérifions maintenant les conditions de 2.5.

(i) On a $t_{rs} = e$, $t'_{r's'} = e$ (par 3.4.1 (i)).

(ii) On a par construction

$$\mathrm{Ad}(w_s)\, X_r = X_{r+s} \quad , \quad \mathrm{Ad}(w'_{s'})\, X'_{r'} = X'_{r'+3s'} = X'_{u(r+s)} \ ;$$

$$\mathrm{Ad}(w_r)\, X_s = -X_{3r+s} \quad , \quad \mathrm{Ad}(w'_{r'})\, X'_{s'} = -X'_{r'+s'} = -X'_{u(3r+s)}$$

$$\mathrm{Ad}(w_s)\, X_{3r+s} = X_{3r+2s} \quad , \quad \mathrm{Ad}(w'_{s'})\, X'_{u(3r+s)} = \mathrm{Ad}(w'_{s'})\, X'_{r'+s'} =$$

$$= X'_{r'+2s'} = X'_{u(3r+2s)} \ ;$$

$$\mathrm{Ad}(w_r)\, X_{r+s} = X_{2r+s} \quad , \quad \mathrm{Ad}(w'_{r'})\, X'_{u(r+s)} = \mathrm{Ad}(w'_{r'})\, X'_{r'+3s'} =$$
$$= X'_{2r'+3s'} = X'_{u(2r+s)} \ .$$

Par 3.4.1 (ii), on a de part et d'autre :

$$\mathrm{Ad}(w_r)\, X_{2r+s} = - X_{r+s} \quad , \quad \mathrm{Ad}(w'_{r'})\, X'_{u(2r+s)} = \mathrm{Ad}(w'_{r'})\, X'_{2r'+3s'} =$$
$$= - X'_{r'+3s'} = - X'_{u(r+s)} \ ;$$

$$\cdots \qquad\qquad \cdots$$

$$\mathrm{Ad}(w_s)\, X_{3r+2s} = - X_{3r+s} \quad , \quad \mathrm{Ad}(w'_{s'})\, X'_{u(3r+2s)} = \mathrm{Ad}(w'_{s'})\, X'_{r'+2s'} =$$
$$= - X'_{r'+s'} = - X'_{u(3r+s)} \ .$$

(Les pointillés remplacent 4 vérifications du même genre).

(iii) Les seules relations de commutation non triviales dans U et U' sont par 3.4.1 (iii) (et compte tenu de $3 = 0$ sur S) :

$$p_s(y)\, p_r(x) = p_r(x)\, p_s(y)\, p_{r+s}(xy)\, p_{2r+s}(x^2y)\, p_{3r+s}(x^3y)\, p_{3r+2s}(x^3y^2) \ ,$$

$$p_{r+s}(y)\, p_r(x) = p_r(x)\, p_{r+s}(y)\, p_{2r+s}(-xy) \ ,$$

$$p_{3r+s}(y)\, p_s(x) = p_s(x)\, p_{3r+s}(y)\, p_{3r+2s}(-xy) \ ;$$

$$p'_{r'}(y')\, p'_{s'}(x') = p'_{s'}(x')\, p'_{r'}(y')\, p'_{r'+s'}(-x'y')\, p'_{r'+2s'}(-x'^2y')$$
$$p'_{r'+3s'}(-x'^3y')\, p'_{2r'+3s'}(-x'^3y'^2) \ ,$$

$$p'_{r'+s'}(y')\, p'_{s'}(x') = p'_{s'}(x')\, p'_{r'+s'}(y')\, p'_{r'+2s'}(x'y') \ ,$$

$$p'_{r'+3s'}(y')\, p'_{r'}(x') = p'_{r'}(x')\, p'_{r'+3s'}(y')\, p'_{2r'+3s'}(x'y') \ .$$

Nous avons à vérifier que le morphisme φ de U dans U' défini par

$$\varphi\left(p_r(x)\, p_s(y)\, p_{r+s}(t)\, p_{2r+s}(u)\, p_{3r+s}(v)\, p_{3r+2s}(w)\right) =$$

$$= p'_{r'}(x^{3q})\, p'_{s'}(y^q)\, p'_{r'+3s'}(t^{3q})\, p'_{2r'+3s'}(u^{3q})\, p'_{r'+s'}(v^q)\, p'_{r'+2s'}(w^q)$$

est un morphisme de groupes. Or on vérifie immédiatement que les trois dernières relations de commutation s'écrivent aussi

$$p'_{s'}(y^q)\, p'_{r'}(x^{3q}) = p'_{r'}(x^{3q})\, p'_{s'}(y^q)\, p'_{r'+3s'}((xy)^{3q})\, p'_{2r'+3s'}((x^2y)^{3q})$$

$$p'_{r'+s'}((x^3y)^q)\, p'_{r'+2s'}((x^3y^2)^q) \quad ,$$

$$p'_{r'+3s'}(y^{3q})\, p'_{r'}(x^{3q}) = p'_{r'}(x^{3q})\, p'_{r'+3s'}(y^{3q})\, p'_{2r'+3s'}(-(xy)^{3q}) \quad ,$$

$$p'_{r'+s'}(y^q)\, p'_{s'}(x^q) = p'_{s'}(x^q)\, p'_{r'+s'}(y^q)\, p'_{r'+2s'}(-(xy)^q) \quad ;$$

ce qui montre que φ est bien un morphisme de groupes et achève la démonstration de 4.1.7.

4.1.9. Cas où G et G' sont de rang semi-simple ≥ 2. Pour chaque racine $r \in R_o$, notons $r' = u(r) \in R'_o = u(R_o)$. Pour chaque $(r,s) \in R_o \times R_o$, considérons les groupes épinglés de rang semi-simple ≤ 2, Z_{rs} et $Z'_{r's'}$. Le morphisme de groupes $M' \longrightarrow M$ sous-jacent à h définit un q-morphisme de données radicielles

$$h_{rs} : \mathcal{R}(Z_{rs}) \longrightarrow \mathcal{R}(Z'_{r's'}) \quad .$$

En vertu des résultats précédents, il existe donc un morphisme de groupes épinglés

$$f_{rs} : Z_{rs} \longrightarrow Z'_{r's'}$$

tel que $\mathcal{R}(f_{rs}) = h_{rs}$. Prouvons que les f_{rs} vérifient la condition de

recollement de 2.5 ; en effet $f_{rs} \mid Z_r$ et f_{rr} sont deux morphismes de groupes épinglés

$$Z_r \longrightarrow Z'_{r'},$$

correspondant au même morphisme de données radicielles épinglées, et coïncident donc par le résultat d'unicité déjà démontré. Par 2.5 il existe donc un morphisme de groupes

$$f : G \longrightarrow G'$$

prolongeant les f_{rs}. Celui-ci est évidemment un morphisme de groupes épinglés tel que $\mathcal{R}(f) = h$, ce qui achève la démonstration du théorème.

5. Corollaires du théorème fondamental.

Le plus important est :

Corollaire 5.1. *Soient* S *un préschéma non vide*, G *et* G' *deux* S*-groupes épinglés*, h *un isomorphisme de données radicielles épinglées*

$$h : \mathcal{R}(G') \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}(G) .$$

Il existe un unique isomorphisme de S*-groupes épinglés*

$$f : G \xrightarrow{\sim} G'$$

tel que $\mathcal{R}(f) = h$.

Notons que 5.1 se déduit aussi de 3.5.1 (les relations de 3.5.1 peuvent s'écrire en utilisant uniquement la donnée de $\mathcal{R}(G)$; notons aussi que 5.1 se déduit de la partie la plus élémentaire de la démonstration de 4.1 (on n'a pas besoin de considérer les "isogénies exceptionnelles" de 4.1.7 et 4.1.8).

Corollaire 5.2. ("Théorème d'Unicité"). Soient S un préschéma, G et G' deux S-groupes déployables (Exp. XXII, 1.13). Si G et G' sont de même type (Exp. XII, 2.6), ils sont isomorphes.

Corollaire 5.3. Soient S un préschéma, G et G' deux S-groupes déployables. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) G et G' sont isomorphes.

(ii) G et G' sont isomorphes localement pour la topologie (fpqc).

(iii) Il existe un $s \in S$ tel que les $\bar{s}$-groupes $G_{\bar{s}}$ et $G'_{\bar{s}}$ soient de même type.

En effet, on a évidemment (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii). D'autre part, (iii) entraîne que $\mathcal{R}(G) = \mathcal{R}(G_{\bar{s}}) = \mathcal{R}(G'_{\bar{s}}) = \mathcal{R}(G')$, donc que G et G' vérifient la condition de 4.2.

Corollaire 5.4. ("unicité des schémas de Chevalley"). Soient G et G' deux $\underline{\underline{Z}}$-groupes réductifs possédant des tores maximaux triviaux.(1). Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) G et G' sont isomorphes.

(ii) Il existe $s \in \mathrm{Spec}(\underline{\underline{Z}})$ tel que G_s et G'_s soient de même type.

(iii) $G_{\underline{\underline{C}}}$ et $G'_{\underline{\underline{C}}}$ sont de même type.

En effet G et G' sont déployables par Exp. XXII, 2.2.

Corollaire 5.5. ("Existence d'automorphismes extérieurs"). Soient S un préschéma, G un S-groupe épinglé, h un automorphisme de la donnée radicielle épinglée $\mathcal{R}(G)$. Il existe un (unique) automorphisme u de G respectant son épinglage et tel que $\mathcal{R}(u) = h$.

Explicitons le corollaire précédent :

(1) En fait, on peut prouver que tout $\underline{\underline{Z}}$-tore est trivial.

Corollaire 5.5. bis. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif déployé, R_+ un système de racines positives de G . Choisissons pour chaque racine simple r , un isomorphisme de groupes vectoriels $p_r : \underline{G}_{a\,S} \xrightarrow{\sim} P_r$. Soit h un automorphisme de M permutant les racines positives et les coracines correspondantes : si $r \in R_+$, $h(r) \in R_+$ et $h^\vee(r^*) = h(r)^*$. Il existe un unique automorphisme u de G induisant $D_S(h)$ sur T et tel que $u \circ p_r = p_{h(r)}$ pour toute racine simple r .

Corollaire 5.6. Soient G et G' deux S-groupes réductifs. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) G et G' sont isomorphes localement pour (fpqc) .

(i bis) G et G' sont isomorphes localement pour la topologie étale.

(ii) Pour tout $s \in S$, G_s et G'_s sont isomorphes.

(iii) Les fonctions $s \longmapsto$ type de G_s et $s \longmapsto$ type de G'_s sont égales.

En effet (i bis) $\Longrightarrow$ (i) trivialement, (i) $\Longrightarrow$ (ii) par le principe de l'extension finie , (ii) $\Longrightarrow$ (iii) trivialement, reste à prouver (iii) $\Longrightarrow$ (i bis). Or on peut supposer G et G' déployables (Exp. XXII, 2.3), auquel cas l'assertion résulte de 5.3.

Corollaire 5.7. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, G' un S-groupe affine, lisse et à fibres connexes. Soit $s \in S$ tel que G_s et G'_s soient isomorphes; il existe un $S' \longrightarrow S$ étale et couvrant s tel que $G_{S'}$ et $G'_{S'}$ soient isomorphes .

En effet, par Exp. XIX, 2.3 et Exp. XXII, 2.1 , on peut supposer G et G' réductifs déployables et on est ramené à 5.3.

Dans le cas où S est le spectre d'un corps, on déduit de 5.6 et 5.7 :

Corollaire 5.8. Soient k un corps et G et G' deux k-groupe réductifs. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) G et G' sont de même type.

(ii) $G \otimes_k \bar{k}$ et $G' \otimes_k \bar{k}$ sont isomorphes.

(iii) Il existe une extension séparable finie K de k telle que $G \otimes_k K$ et $G' \otimes_k K$ soient isomorphes.

Corollaire 5.9. Soient S un préschéma non vide et $\mathcal{R}$ une donnée radicielle Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe un S-groupe épinglé de type $\mathcal{R}$.

(ii) Il existe un S-groupe de type $\mathcal{R}$.

(iii) Il existe localement pour (fpqc) un S-groupe réductif de type $\mathcal{R}$.

Il s'agit évidemment de prouver (iii) $\Longrightarrow$ (i) . Pour simplifier la démonstration, supposons qu'il existe un morphisme fidèlement plat quasi-compact $S' \longrightarrow S$ et un S'-groupe réductif G' de type $\mathcal{R}$. On peut supposer G' déployable; fixons un épinglage E' de G' ; notons $\mathcal{R} = \mathcal{R}(G',E')$. Les deux images réciproques de (G',E') sur $S'' = S' \times_S S''$ sont des groupes épinglés (G''_1,E''_1) , (G''_2,E''_2) ; on a des isomorphismes canoniques $p_i : \mathcal{R}(G''_i,E''_i) \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}$, d'où un isomorphisme

$$p = p_2^{-1} \circ p_1 = \mathcal{R}(G''_1,E''_1) \longrightarrow \mathcal{R}(G''_2,E''_2) .$$

Par le théorème d'unicité, il existe un unique isomorphisme

$$f : (G''_1,E''_1) \xrightarrow{\sim} (G''_2,E''_2)$$

tel que $\mathcal{R}(f) = p$. On a donc sur G' une donnée de recollement; c'est une donnée de descente. En effet, il faut vérifier une condition de compatibilité entre les images réciproques de f sur S"' , mais il suffit de la faire sur

les transformés de ces flèches par $\mathcal{R}$, car ce dernier est pleinement fidèle. Or p est bien une donnée de descente, par construction, ce qui montre que f en est aussi une. Comme G' est affine, cette donnée de descente est affective; comme l'épinglage de G' est stable par la donnée de descente, on vérifie aisément qu'il existe un S-groupe épinglé (G,E) qui donne (G',E') par extension de la base et qui est donc de type $\mathcal{R}$.

N.B. Naturellement, dans le langage des catégories fibrées, la démonstration précédente se simplifie (et se comprend).

Corollaire 5.10. Soit S un préschéma non vide. Soit $\mathcal{R}$ une donnée radicielle épinglée telle qu'il existe un S-groupe réductif de type $\mathcal{R}$. Alors il existe un S-groupe épinglé de type $\mathcal{R}$, unique à un isomorphisme unique près.

Définition 5.11. Sous les conditions précédentes, on notera $Ep_S(\mathcal{R})$ l'unique S-groupe épinglé de type $\mathcal{R}$, $T_S(\mathcal{R})$ son tore maximal canonique, $B_S(\mathcal{R})$ son groupe de Borel canonique, ...

Si on a un morphisme $S' \longrightarrow S$ (S' non vide) , on peut identifier $Ep_{S'}(\mathcal{R})$ à $Ep_S(\mathcal{R}) \times_S S'$, ... En particulier, si $Ep_{Spec(\underline{\underline{Z}})}(\mathcal{R})$ existe (on verra que c'est toujours le cas), on le note $Ep(\mathcal{R})$ et on a

$$Ep_S(\mathcal{R}) = Ep(\mathcal{R}) \times_{Spec(\underline{\underline{Z}})} S .$$

On dit que $Ep(\mathcal{R})$ est le schéma de Chevalley de type $\mathcal{R}$.

5.12. Il revient donc au même de dire que le S-faisceau en groupes G est un S-groupe réductif de type $\mathcal{R}$ ou de dire qu'il est localement isomorphe (pour la topologie étale ou (fpqc)) à $Ep_S(\mathcal{R})$. De même, en vertu des théorèmes de conjugaison, il revient au même de dire que (G,T) est un S-groupe réductif de type $\mathcal{R}$ muni d'un tore maximal ou qu'il est localement isomorphe à $(Ep_S(\mathcal{R}) , T_S(\mathcal{R}))$; de même avec groupes de Borel ou couples de Killing.

6. Systèmes de Chevalley

Les calculs explicites du n° 3 ont des conséquences numériques importantes. Posons d'abord la définition suivante :

Définition 6.1. Soient S un préschéma, (G,T,M,R) un S-groupe déployé. On appelle système de Chevalley de G une famille $(X_r)_{r \in R}$ d'éléments

$$X_r \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^r)^*$$

vérifiant la condition suivante :

(SC) pour tout couple $r,s \in R$, on a

$$\mathrm{Ad}(w_r(X_r))\ X_s = \pm\ X_{s_r(s)} \ .$$

On rappelle (Exp. XX, 3.1) que

$$w_r(X_r) = \exp(X_r)\ \exp(-X_r^{-1})\ \exp(X_r) \ .$$

Remarquons que (SC) entraîne en particulier $X_{-r} = \pm X_r$ pour $r \in R$, en vertu de la relation (Exp. XX, 2.10) $\mathrm{Ad}(w_r(X_r))X_r = -X_{-r}$.

Proposition 6.2. Tout groupe déployé possède un système de Chevalley. Plus précisément, soit $(R_o,(X'_r)_{r \in R_o})$ un épinglage (1.1) du groupe déployé (G,T,M,R) ; il existe un système de Chevalley $(X_r)_{r \in R}$ de G tel que $X_r = X'_r$ pour $r \in R_o$.

Montrons d'abord qu'il suffit de vérifier la condition (SC) pour $r \in R_o$; pour tout $r \in R$, il existe une suite $\{r_i\} \subset R_o$ avec $r = s_{r_1} \cdots s_{r_n}(r_{n+1})$, d'où en appliquant la condition (SC) pour chacun des r_i ,

$$X_r = \pm\ \mathrm{Ad}(w_{r_1}(X_{r_1}) \cdots w_{r_n}(X_{r_n}))\ X_{r_{n+1}} \ .$$

Par 3.1.1 , (iii) , on a

$$w_{r_1}(X_{r_1}) \ldots w_{r_n}(X_{r_n})\, w_{r_{n+1}}(X_{r_{n+1}})\, w_{r_n}(X_{r_n})^{-1} \ldots w_{r_1}(X_{r_1})^{-1} =$$

$$= r^*(\pm 1)\ w_r(X_r) \quad .$$

Maintenant, il suffit de remarquer que $w_{r_i}(X_{r_i})^{-1} = r_i^*(-1)\, w_{r_i}(X_{r_i})$ et que pour tout couple de racines (u,v) , on a $u(v^*(-1)) = (-1)^{(v^*,u)} = \pm 1$, ce qui entraîne que si (SC) est vérifié pour les couples (r_i,t) $(t \in R)$, il l'est pour tout couple (r,s) , $(s \in R)$. Construisons maintenant un système $(X_r)_{r \in R}$ de la manière suivante. Pour tout $r \in R$, choisissons une suite $\{r_i\} \subset R_o$ comme ci-dessus et définissons X_r par

$$X_r = \mathrm{Ad}(w_{r_1}(X_{r_1}) \ldots w_{r_n}(X_{r_n}))\ X'_{r_{n+1}} \quad .$$

Pour vérifier (SC) , il suffit de prouver :

Lemme 6.3. Soit $(G,T,M,R,R_o,(X_r)_{r \in R_o})$ un S-groupe épinglé; soit r_i $(o \leqslant i \leqslant n+1)$ une suite de racines simples telle que

$$\mathrm{int}(s_{r_1} \ldots\ldots s_{r_n})(r_{n+1}) = r_o \quad .$$

Alors

$$\mathrm{Ad}(w_{r_1} \ldots\ldots w_{r_n})\ X_{r_{n+1}} = \pm\ X_{r_o} \quad .$$

Raisonnant comme dans 2.3.4 à l'aide du lemme de Tits, on est ramené à vérifier le lemme 6.3 dans les deux cas suivants :
1) G est de rang semi-simple au plus 2 ou 2) $w_{r_1} \ldots w_{r_n}$ est une section de T. Dans le cas 1), remarquons que 6.3 est une conséquence de 6.2 et que 6.2 a été vérifié en 3.1.2 (resp. 3.2.1 , resp. 3.3.1 , resp. 3.4.1), (ii). Reste donc à prouver 6.3 dans le cas 2) , ou, ce qui revient au même,

que si $\{r_i\}$ est une suite de racines simples telle que $s_{r_1} \cdots\cdots s_{r_n} = id.$, alors $t = w_{r_1} \cdots w_{r_n}$ vérifie $r(t) = \pm 1$ pour toute racine $r \in R$. En vertu de la structure du groupe de Weyl (Exp. XXI, 5.1), le mot $s_{r_1} \cdots s_{r_n}$ du groupe libre engendré par les s_r, $r \in R_o$ est dans le sous-groupe invariant engendré par les $(s_r s_s)^{n_{rs}}$, $(r,s) \in R_o \times R_o$. On est donc ramené au cas où $s_{r_1} \cdots s_{r_n}$ est de la forme

$$s_{r_1} \cdots s_{r_i} (s_{r_{i+1}} s_{r_{i+2}})^{n_{r_{i+1} r_{i+2}}} s_{r_i} \cdots s_{r_1} .$$

Alors on a

$$t = s_{r_1} \cdots s_{r_i} (t_{r_{i+1} r_{i+2}}) ,$$

et on est ramené à vérifier que pour tout couple de racines simples (r_1, r_2) et toute racine $s \in R$, on a $s(t_{r_1 r_2}) = \pm 1$, ce qui est trivial, vu les valeurs de $t_{r_1 r_2}$ calculées au n° 3 (partie (i) de 3.1.2, 3.2.1, 3.3.1, 3.4.1).

Proposition 6.4. Soient S un préschéma, (G,T,M,R) un S-groupe déployé, $(X_r)_{r \in R}$ un système de Chevalley de G. Soient r et s deux racines non proportionnelles; supposons

$$\text{long}(r) \leqslant \text{long}(s) , \text{ i.e. } |(s^*, r)| \leq |(r^*, s)| .$$

Soient p et q les entiers $\geqslant 0$ tels que l'ensemble des racines de la forme $s + k r$, $k \in \underline{Z}$, soit

$$\{ s - (p-1)r , \ldots , s , \ldots . s + q r \} .$$

(cf. Exp. XXI, 2.3.5 ; on a donc (loc. cit.) $-(r^*, s) = q - p + 1$). Alors la relation de commutation entre P_r et P_s est donnée par le tableau suivant (qui épuise les cas possibles, car la longueur de la chaine de racines

précédentes est $p+q-1 \leqslant 3$), où on note pour chaque $t \in R$, $p_t(x) = \exp(x\, X_t)$:

p quelconque , $q = 0$,

$$p_s(y)\, p_r(x) = p_r(x)\, p_s(y) \quad .$$

$p = 1$, $q = 1$,

$$p_s(y)\, p_r(x) = p_r(x)\, p_s(y)\, p_{r+s}(\pm\, xy) \quad .$$

$p = 1$, $q = 2$,

$$p_s(y)\, p_r(x) = p_r(x)\, p_s(y)\, p_{r+s}(\pm\, xy)\, p_{2r+s}(\pm\, x^2y) \quad .$$

$p = 1$, $q = 3$,

$$p_s(y)\, p_r(x) =$$
$$= p_r(x)\, p_s(y)\, p_{r+s}(\pm\, xy)\, p_{2r+s}(\pm\, x^2y)\, p_{3r+s}(\pm\, x^3y)\, p_{3r+2s}(\pm\, x^3y^2).$$

$p = 2$, $q = 1$,

$$p_s(y)\, p_r(x) = p_r(x)\, p_s(y)\, p_{r+s}(\pm\, 2xy) \quad .$$

$p = 2$, $q = 2$,

$$p_s(y)\, p_r(x) =$$
$$= p_r(x)\, p_s(y)\, p_{r+s}(\pm\, 2xy)\, p_{2r+s}(\pm\, 3x^2y)\, p_{r+2s}(\pm\, 3\, xy^2) \quad .$$

$p = 3$, $q = 1$,

$$p_s(y)\, p_r(x) = p_r(x)\, p_s(y)\, p_{r+s}(\pm\, 3xy) \quad .$$

Démonstration. En vertu de Exp. XXI , 3.5.4 , il existe un système de racines simples R_o de R tel que $r \in R_o$ et qu'il existe $r' \in R_o$ et $a,b \geqslant 0$ avec $s = ar + br'$. Considérons l'épinglage $(R_o, (X_r)_{r \in R_o})$ de G . La relation de commutation à vérifier est une relation entre éléments de $U_{rr'}$; on est donc ramené aux calculs explicites du n° 3, et on conclut aussitôt par la condition (SC) .

Corollaire 6.5. (Régle de Chevalley). Soient S un préschéma, (X_r) un système de Chevalley du S-groupe déployé G. Si $r,s,r+s \in R$, alors

$$[X_r , X_s] = \pm p\ X_{r+s} ,$$

où p est le plus petit entier > 0 tel que $s - pr$ ne soit pas racine.

En effet, comme l'assertion est symétrique en r et s, on peut supposer $\mathrm{long}(r) \leqslant \mathrm{long}(s)$, et on est ramené à 6.4.

Corollaire 6.6. Soient S un préschéma tel que $6.1_S \neq 0$ et (G,T,M,R) un S-groupe déployé. Si R' est une partie de R telle que

$$\mathfrak{g}_{R'} = \mathfrak{t} \oplus \coprod_{r \in R'} \mathfrak{g}^r$$

soit une sous-Algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$, alors R' est une partie close de R (Exp. XXI, 3.1.4).

6.7. Il est possible de préciser la valeur exacte des divers $\pm$ de ce n°, grâce à l'étude du groupe $\underline{\mathrm{Norm}}_G(T)$ et plus précisément, du "groupe de Weyl étendu" :

$$W^* = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{Ep}\,(\mathcal{R})}(T(\mathcal{R}))(\underline{\underline{Z}})$$

qui est une extension de $W(\mathcal{R})$ par un groupe abélien de type $(2,2,\ldots 2)$, qui est "responsable des signes", (*).

(*) J. Tits : Sur les constantes de structure et le théorème d'existence des algèbres de Lie semi-simples. Pub. Math. I.H.E.S. n° 31 .

EXPOSÉ XXIV

AUTOMORPHISMES DES GROUPES REDUCTIFS

par M. DEMAZURE

La première partie de cet exposé (n° 1 à 5) est une conséquence directe de l'existence pour un groupe réductif de "suffisamment d'automorphismes extérieurs", résultat qui est une conséquence de la forme la plus faible du théorème d'isomorphisme des groupes épinglés. La seconde partie (n° 6 et 7) expose deux applications des résultats plus précis de l'exposé précédent; en particulier, le n° 7 utilise le théorème de générateurs et relations sous sa forme explicite. Enfin, nous avons donné en appendice (n° 8) des résultats de cohomologie "galoisienne" utilisés dans le texte.

Précisons nos notations cohomologiques : si S un préschéma et G un S-préschéma en groupes, on notera $H^1(S,G)$ le premier ensemble de cohomologie de S à coefficients dans G, calculé pour la topologie (fpqc); c'est aussi l'ensemble des classes d'isomorphisme de faisceaux (fpqc) principaux homogènes sous G. On notera $H^1_{ét}(S,G)$ l'ensemble correspondant pour la topologie étale; c'est donc la partie de $H^1(S,G)$ formée des classes de faisceaux homogènes sous G qui sont quasi-isotriviaux (= localement triviaux pour la topologie étale). On notera $\mathrm{Fib}(S,G)$ la partie de $H^1(S,G)$ formée des classes de faisceaux représentables (fibrés principaux homogènes).

On a donc les inclusions

$$H^1_{ét}(S,G) \subset H^1(S,G) \quad ,$$

$$\mathrm{Fib}(S,G) \subset H^1(S,G) \quad .$$

Si tout faisceau principal homogène sous G est représentable (par exemple si G est quasi-affine sur S cf. SGA VIII 7.9), on a donc $\mathrm{Fib}(S,G) = H^1(S,G)$. Si $S' \longrightarrow S$ est un morphisme couvrant pour la topologie (fpqc), on note $H^1(S'/S,G)$ le noyau de l'application canonique $H^1(S,G) \longrightarrow H^1(S',G_{S'})$. On sait que $H^1(S'/S,G)$ peut se calculer de manière simpliciale (TDTE, II, A,4), ce qui implique que lorsque $S' \longrightarrow S$ est couvrant pour la topologie étale, c'est aussi le noyau de $H^1_{ét}(S,G) \to H^1_{ét}(S',G_{S'}$

Enfin, on appelle "théorème 90" l'assertion suivante : "tout faisceau principal homogène sous $\underline{G}_{m\,S}$ est représentable et localement trivial". (Exp. VIII, 4.5) , assertion équivalente à " $H^1(S,\underline{G}_{m\,S}) = \mathrm{Pic}(S)$ ", ou encore à " $H^1(S,\underline{G}_{m\,S}) = 0$ pour S local (resp. semi-local) ".

1. Schéma des automorphismes d'un groupe réductif.

1.0. Il convient d'abord de préciser certaines définitions de l'exposé précédent. Soient S un préschéma non vide, G un S-groupe réductif, $\mathcal{R} = (M,M^*,R,R^*,R_o)$ une donnée radicielle réduite épinglée. On appelle <u>épinglage de</u> G <u>de type</u> $\mathcal{R}$, ou $\mathcal{R}$ -<u>épinglage de</u> G , la donnée

(i) d'un isomorphisme de $D_S(M)$ sur un tore maximal T de G (ou, ce qui revient au même, d'un monomorphisme $D_S(M) \longrightarrow G$ dont l'image soit

un tore maximal T de G), identifiant R à un système de racines de G relativement à T (Exp. XIX , 3.6) et R^* à l'ensemble des coracines correspondantes ,

(ii) pour chaque $r \in R_o$, d'un $X_r \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^r)^*$.

Pour que G possède un $\mathcal{R}$-épinglage, il faut et il suffit qu'il soit déployable et de type $\mathcal{R}$ (Exp. XXII, 2.7).

Si $u : G \longrightarrow G'$ est un isomorphisme de S-groupes réductifs, à tout $\mathcal{R}$-épinglage $\underline{e}$ de G correspond par "transport de structure" un $\mathcal{R}$-épinglage $u(\underline{e})$ de G' . Si $v : \mathcal{R}' \longrightarrow \mathcal{R}$ est un isomorphisme de données radicielles épinglées, à tout $\mathcal{R}'$-épinglage $\underline{e}$ de G correspond par transport de structure un $\mathcal{R}$-épinglage $v(\underline{e})$ de G .

Appelons groupe épinglé un triplet $(G, \mathcal{R}, \underline{e})$ où G est un S-groupe réductif, $\mathcal{R}$ une donnée radicielle réduite épinglée, et $\underline{e}$ un épinglage de G de type $\mathcal{R}$. On appelle <u>isomorphisme</u> du groupe épinglé $(G, \mathcal{R}, \underline{e})$ sur le groupe épinglé $(G', \mathcal{R}', \underline{e}')$ un couple (u,v) où u est un isomorphisme $u : G \longrightarrow G'$ et v un isomorphisme de données radicielles épinglées $v : \mathcal{R}' \longrightarrow \mathcal{R}$, tels que $u(\underline{e}) = v(\underline{e}')$

N.B. <u>Si S est non vide</u>, v est uniquement déterminé par u , et on dira aussi par abus de langage que u est un isomorphisme des groupes épinglés . En particulier, si $(G, \mathcal{R}, \underline{e})$ est un groupe épinglé, un automorphisme de $(G, \mathcal{R}, \underline{e})$ est donc un automorphisme u de G tel qu'il existe un automorphisme v de $\mathcal{R}$ tel que $u(\underline{e}) = v(\underline{e})$; c'est donc un automorphisme de G, normalisant T, induisant sur T un automorphisme de

la forme $D_S(h)$, où h est un automorphisme de M, et permutant entre eux les éléments X_r, $r \in R_o$. (comme on le voit facilement, les conditions précédentes caractérisent d'ailleurs les automorphismes de $(G, \mathcal{R}, \underline{e})$).

On a un foncteur contravariant évident

$$\mathcal{R} : (G, \mathcal{R}, \underline{e}) \longmapsto \check{\mathcal{R}}, \quad (u, v) \longmapsto v$$

et le résultat principal de l'exposé précédent (Exp. XXIII, 4.1) nous montre que c'est un foncteur pleinement fidèle (nous verrons d'ailleurs dans l'exposé suivant que c'est une équivalence de catégories).
Il s'ensuit en particulier que le groupe des automorphismes de $(G, \mathcal{R}, \underline{e})$ est canoniquement isomorphe au groupe des automorphismes de la donnée radicielle épinglée $\mathcal{R}$ (cf. Exp. XXIII, 5.5).

1.1. Soit S un préschéma; munissons $(Sch)_{/S}$ de la topologie (fpqc) et considérons le S-faisceau en groupes $\underline{Aut}_{S\text{-}gr}(G)$, où G est un S-préschéma en groupes. On a une suite exacte de S-faisceaux en groupes

$$e \to \underline{Cent}(G) \longrightarrow G \xrightarrow{\text{int}} \underline{Aut}_{S\text{-}gr}(G)$$

qui définit un monomorphisme

$$j : G/\underline{Cent}(G) \longrightarrow \underline{Aut}_{S\text{-}gr}(G) .$$

Le faisceau image de j est le faisceau des automorphismes intérieurs de G ; pour qu'un automorphisme u de G soit intérieur, il faut et il suffit qu'il existe une famille couvrante $\{ S_i \longrightarrow S \}$ et pour chaque i un $g_i \in G(S_i)$ tel que $\text{int}(g_i) = u_{S_i}$. Si v est un autre automorphisme de G, on voit aussitôt que $\text{int}(v)\, u = v\, u\, v^{-1}$ est l'automorphisme intérieur défini par la famille $g_i' = v(g_i)$. Il s'ensuit que

l'image de j est distinguée dans $\underline{\mathrm{Aut}}_{S\text{-}gr}(G)$. Le faisceau en groupes quotient, noté $\underline{\mathrm{Autext}}(G)$, est le faisceau des automorphismes extérieurs de G . On a donc une suite exacte

$$e \to G/\underline{\mathrm{Cent}}(G) \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{S\text{-}gr}(G) \longrightarrow \underline{\mathrm{Autext}}(G) \longrightarrow e \ .$$

Les définitions précédentes sont toutes compatibles avec les changements de base. Elles sont naturellement valables dans tout site.

1.2. Soient S un préschéma et $(G,\mathcal{R},\underline{e})$ un groupe réductif épinglé. Soit E le groupe (abstrait) des automorphismes de la donnée radicielle épinglée $\mathcal{R}$, i.e. le groupe des automorphismes de $\mathcal{R}$ normalisant R_o . Par Exp. XXIII, 5.5 , on a un monomorphisme canonique

$$E \longrightarrow \mathrm{Aut}_{S\text{-}gr}(G)$$

qui associe à $h \in E$ l'unique automorphisme du groupe épinglé G tel que $\mathcal{R}(u) = h$. Ce monomorphisme définit canoniquement un monomorphisme de faisceaux

$$a : E_S \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{S\text{-}gr}(G) \ .$$

Pour qu'un automorphisme u de G soit une section du faisceau image de a , il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :

(i) u normalise T . On sait alors que u permute les racines de G relativement à T . Si $r \in R$, alors $u(r) : t \longrightarrow r(u^{-1}(t))$ est donc localement sur S de la forme $t \longrightarrow s(t)$, $s \in R$. La seconde condition s'écrit alors comme suit :

(ii) Si $r \in R_o$ et si U est un ouvert de S tel que $u(r)_U \in R$,

alors $u(r)_U \in R_o$ et on a

$$\underline{\mathrm{Lie}}(u_U)\ (X_r)_U = (X_{u(r)})_U \ .$$

Il résulte aussitôt des définitions que les sections de $a(E_S)$ normalisent les sous-groupes de G définis par l'épinglage : T , B , B^- , U , U^- .

Ces définitions posées, on a :

Théorème 1.3. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif. Considérons la suite exacte canonique de S-faisceaux en groupes

$$e \longrightarrow ad(G) \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{S\text{-}gr}(G) \xrightarrow{p} \underline{\mathrm{Autext}}(G) \longrightarrow e \ .$$

(i) $\underline{\mathrm{Aut}}_{S\text{-}gr}(G)$ est représentable par un S-préschéma lisse et séparé.

(ii) Autext(G) est représentable par un S-préschéma constant tordu à engendrement fini (Exp. X, 5.1).

(iii) Si G est déployable, la suite exacte précédente est scindée. Plus précisément, pour tout épinglage de G , le morphisme (cf. 1.2)

$$p \circ a : E_S \longrightarrow \underline{\mathrm{Autext}}(G)$$

est un isomorphisme.

Montrons d'abord comment le théorème se déduit de :

Lemme 1.4. Dans les notations de 1.2 , $\underline{\mathrm{Aut}}_{S\text{-}gr}(G)$ est le produit semi-direct $a(E_S).\mathrm{int}(G)$.

Le lemme entraîne aussitôt le théorème lorsque G est déployable. Comme G est localement déployable pour la topologie étale (Exp. XXII, 2.3),

donc aussi pour la topologie (fppf) , et que celle-ci est "de descente effective" pour la catégorie fibrée des morphismes constants tordus (Exp. X , 5.5) , on en déduit (ii) dans le cas général (cf. Exp. IV, 4.6.8) . Pour en déduire (i) , on remarque que $int(G) \simeq ad(G)$ est affine sur S , donc le morphisme p affine lorsque $\underline{Aut}_{S\text{-gr}}(G)$ est représentable, et on conclut par descente des schémas affines.

Il ne nous reste donc qu'à prouver 1.4. Pour ce faire, il suffit de prouver :

Lemme 1.5. Si $(\mathcal{R},e)$ et $(\mathcal{R}',e')$ sont deux épinglages du S-groupe réductif G , il existe un unique automorphisme intérieur u de G sur S transformant un épinglage en l'autre (i.e. tel qu'il existe $v : \mathcal{R}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}$ avec $u(e) = v(e')$, cf. 1.0).

1.5.1. Unicité . Il suffit de prouver que si G est un S-groupe épinglé et si $int(g)$ est un automorphisme de groupe épinglé ($g \in G(S)$), alors $int(g) = id$. Or on a d'abord $int(g)\, T = T$, $int(g)\, B = B$, donc $g \in \underline{Norm}_G(T)(S) \cap \underline{Norm}_G(B)(S) = T(S)$ (cf. par exemple Exp. XXII, 5.6.1). Il s'ensuit que $int(g)$ normalise chaque P_r et que $\underline{Lie}(int(g))\, X_r = Ad(g)\, X_r = r(g)\, X_r$ pour $r \in R_o$. On a donc $r(g) = e$ pour $r \in R_o$, donc $g \in \bigcap_{r \in R_o} \operatorname{Ker} r\ (S) = \underline{Cent}(G)(S)$ (Exp. XXII, 4.1.8) , cqfd.

1.5.2. Existence. Il suffit de la prouver localement pour la topologie (fpqc) . Soient

$$(T,M,R,R_o,(X_r)_{r \in R_o}) \quad \text{et} \quad (T',M',R',R'_o,(X'_{r'})_{r' \in R'_o})$$

les deux épinglages.

Par conjugaison des tores maximaux, on peut supposer $T = T'$. Quitte à restreindre S , on peut supposer que l'isomorphisme $D_S(M) \xrightarrow{\sim} D_S(M')$ provient d'un isomorphisme $M \xrightarrow{\sim} M'$ transportant R sur R' , et on est ramené à la situation $T = T'$, $M = M'$, $R = R'$. Comme les systèmes de racines simples sont conjugués par le groupe de Weyl (Exp. XXI, 3.3.7), on peut également supposer $R_o = R'_o$. Il existe alors pour chaque $r \in R_o$ un scalaire $z_r \in \underline{G}_m(S)$ tel que $X'_r = z_r X_r$, et il suffit de construire (localement pour fpqc) une section t de T telle que $r(t) = z_r$ pour chaque $r \in R_o$. Mais le morphisme $T \longrightarrow \underline{G}_{m\,S}^{R_o}$ de composantes $\{ r , r \in R_o \}$ est le dual d'une injection $\underline{Z}^{R_o} \longrightarrow M$, donc est fidèlement plat, ce qui achève la démonstration de 1.5.2 et donc de 1.3.

Corollaire 1.6. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif . Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\underline{\mathrm{Aut}}_{S\text{-gr}}(G)$ est affine (resp. de type fini, resp. de présentation finie, resp. quasi-compact) sur S .

(ii) $\underline{\mathrm{Autext}}(G)$ est fini sur S .

(iii) Pour tout $s \in S$, on a $\mathrm{rgred}(G_s) - \mathrm{rgss}(G_s) \leq 1$.

En effet, comme $\mathrm{ad}(G)$ est affine plat et de présentation finie sur S , le morphisme p est affine, fidèlement plat et de présentation finie.

Si $\underline{\mathrm{Autext}}(G)$ est fini sur S , il est affine sur S , donc aussi $\underline{\mathrm{Aut}}_{S\text{-gr}}(G)$, ce qui prouve (ii) $\Longrightarrow$ (i) . Si $\underline{\mathrm{Aut}}_{S\text{-gr}}(G)$ est quasi-compact sur S, il est de présentation finie sur S (étant de toute façon

localement de présentation finie et séparé sur S) ; par Exp. V , 9.1 , $\underline{\mathrm{Autext}}(G)$ est alors de présentation finie sur S , donc fini, ce qui prouve (i) $\Longrightarrow$ (ii). Enfin, pour prouver l'équivalence de (ii) et (iii) , on peut supposer G déployé, et on est ramené à Exp. XXI, 6.7.8 .

Corollaire 1.7. Soient S un préschéma , G un S-groupe réductif. Alors $\underline{\mathrm{Aut}}_{S\text{-}gr}(G)^{\circ} = \mathrm{int}(G) \simeq \mathrm{ad}(G)$.

Corollaire 1.8. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, H un S-préschéma en groupes lisse, affine et à fibres connexes sur S . Alors le S-foncteur

$$\underline{\mathrm{Isom}}_{S\text{-}gr}(G,H)$$

est représentable par un S-préschéma lisse et séparé (qui est affine sur S si G est semi-simple).

En effet, soit U l'ensemble des points t de S tels que H_t soit réductif; c'est un ouvert (Exp. XIX , 2.6) ; si S' est un S-préschéma, $H_{S'}$ est réductif si et seulement si $S' \longrightarrow S$ se factorise par U . Il s'ensuit que le morphisme canonique $\underline{\mathrm{Isom}}_{S\text{-}gr}(G,H) \longrightarrow S$ se factorise par U . On peut donc supposer S = U et on est ramené à :

Corollaire 1.9. Soient S un préschéma, G et G' deux S-groupes réductifs. Alors

$$F = \underline{\mathrm{Isom}}_{S\text{-}gr}(G,G')$$

est représentable par un S-préschéma lisse et séparé (affine si G ou G' est semi-simple). De plus, S se décompose en somme de deux sous-

préschémas ouverts S_1 et S_2 tels que $F_{S_1} = \emptyset$ et que F_{S_2} soit un fibré principal homogène à gauche (resp. droite) sous $\underline{Aut}_{S_2\text{-gr}}(G'_{S_2})$ (resp. $\underline{Aut}_{S_2\text{-gr}}(G_{S_2})$) .

En effet, soit S_2 l'ensemble des points de S où G et G' sont de même type, et soit S_1 son complémentaire.

Comme le type d'un groupe réductif est une fonction localement constante, S_1 et S_2 sont ouverts. Il est clair que $F_{S_1} = \emptyset$, et on peut supposer $S = S_2$. Par Exp. XXIII , 5.6 , F est un faisceau principal homogène sous $\underline{Aut}_{S\text{-gr}}(G)$, localement trivial pour la topologie étale. Il s'ensuit que $F_o = F/ad(G)$ est un faisceau principal homogène sous $\underline{Autext}(G)$, localement trivial pour la topologie étale , donc représentable (Exp. X, 5.5). Comme ad(G) est affine, F est donc aussi représentable.

Remarquons qu'en cours de démonstration, on a obtenu :

Corollaire 1.10. Soient S un préschéma, G et G' deux S-groupes réductifs de même type en chaque $s \in S$. Alors ad(G) opère librement (à droite) dans $\underline{Isom}_{S\text{-gr}}(G,G')$, le faisceau quotient

$$\underline{Isomext}(G,G') = \underline{Isom}_{S\text{-gr}}(G,G')/ad(G)$$

est représentable par un S-préschéma constant tordu, qui est un fibré principal homogène sous $\underline{Autext}(G)$ (et qui est donc fini sur S si G est semi-simple). De plus, l'isomorphisme

$$\underline{Isom}_{S\text{-gr}}(G,G') \simeq \underline{Isom}_{S\text{-gr}}(G',G)$$

défini par $u \longmapsto u^{-1}$ induit un isomorphisme

$$\underline{Isomext}(G,G') \simeq \underline{Isomext}(G',G) .$$

Remarque 1.11. On dit que G est une forme tordue intérieure de G' si $\underline{\mathrm{Isomext}}(G,G')(S) \neq \emptyset$; alors G' est une forme tordue intérieure de G ; on peut alors réduire le groupe structural de $\underline{\mathrm{Isom}}_{S\text{-gr}}(G,G')$ à ad(G). Plus précisément, soit $u \in \underline{\mathrm{Isomext}}(G,G')(S)$, considéré comme une section $u : S \longrightarrow \underline{\mathrm{Isomext}}(G,G')$. Notons

$$\underline{\mathrm{Isomint}}_u(G,G')$$

l'image réciproque par le morphisme canonique $\underline{\mathrm{Isom}}_{S\text{-gr}}(G,G') \longrightarrow \underline{\mathrm{Isomext}}(G,G')$ du sous-préschéma fermé de $\underline{\mathrm{Isomext}}(G,G')$ image de u . L'opération naturelle de ad(G) sur $\underline{\mathrm{Isomint}}_u(G,G')$ munit ce préschéma d'une structure de fibré principal homogène; par extension du groupe structural $\mathrm{ad}(G) \longrightarrow \underline{\mathrm{Autext}}(G)$, $\underline{\mathrm{Isomint}}_u(G,G')$ redonne $\underline{\mathrm{Isom}}_{S\text{-gr}}(G,G')$.

Par le lemme de Hensel (Exp. XI, 1.11) , 1.8. donne aussitôt :

Corollaire 1.12. Soient S un schéma local hensélien, G un S-groupe réductif, G' un S-groupe lisse affine à fibres connexes, s le point fermé de S . Si G_s et G'_s sont des k(s)-groupes algébriques isomorphes, G et G' sont isomorphes. Plus précisément, tout k(s)-isomorphisme $G_s \xrightarrow{\sim} G'_s$ provient d'un S-isomorphisme $G \xrightarrow{\sim} G'$.

Appliquant maintenant 1.7 (resp. 1.12) au schéma des nombres duaux sur un corps, on a par Exp. III, 2.10 (resp. 3.10) :

Corollaire 1.13. Soient k un corps et G un k-groupe réductif. Alors

$$H^1(G,\underline{\mathrm{Lie}}(G/k)) = H^2(G,\underline{\mathrm{Lie}}(G/k)) = 0 .$$

Remarques 1.14. (i) L'assertion concernant le H^1 était connue (CHEVALLEY); celle concernant le H^2 a été démontrée dans la plupart des cas de la

classification par CHEVALLEY.

(ii) En fait, la conjonction de 1.13 et du théorème d'unicité sur un corps algébriquement clos est essentiellement équivalente au théorème d'unicité. Une démonstration directe de 1.13 donnerait donc une manière de déduire le théorème d'unicité général du théorème d'unicité de CHEVALLEY sur un corps.

(iii) L'existence de groupes réductifs de tous les types sur tous les préschémas (Exp. XXV) montre que les obstructions au relèvement d'un k-groupe réductif G au-dessus des anneaux artiniens à corps résiduel k (qui par Exp. III, 3.8 sont des éléments de $H^3(G,\underline{Lie}(G/k))$ V) où V est un certain k-espace vectoriel) sont nulles. Ceci semble suggérer que $H^3(G,\underline{Lie}(G/k)) = 0$. Là encore, une démonstration directe de ce fait (s'il est vrai) donnerait sans doute une manière de déduire le théorème d'existence général du théorème d'existence sur un corps (Tohoku de Chevalley).

Corollaire 1.15. Soient k un préschéma, G un k-groupe réductif. Considérons k comme G-module trivial. Alors

$$H^1(G,k) = H^2(G,k) = 0 .$$

Considérons en effet le k-groupe réductif $H = G \times_k \underline{G}_{m\,k}$. On a $\underline{Lie}(H/k) = \underline{Lie}(G/k) \oplus k$, décomposition stable sous H . Pour un H-Module quelconque M , on a $H^i(H,M) = H^i(G,H^0(\underline{G}_{m\,k},M))$ (cela résulte de la caractérisation des $H^i(H,.)$ comme foncteurs dérivés de $H^0(H,.) = H^0(G,H^0(\underline{G}_{m\,k}, .))$, et du fait que le foncteur $H^0(\underline{G}_{m\,k}, .)$ est exact , cf. Exp. I , n° 5) . En particulier, on a

$H^i(H,\underline{Lie}(H/k)) = H^i(G,\underline{Lie}(G/k)) \oplus H^i(G,k)$ pour $i > 0$. On conclut alors en appliquant 1.13 au groupe réductif H .

Définition 1.16. Soient S un préschéma , G un S-groupe réductif . On appelle forme de G sur S un S-préschéma en groupes G' localement isomorphe à G pour (fpqc) (il revient au même, Exp. XXIII, 5.6 , de dire que G' est localement isomorphe à G pour (ét) , ou encore que G' est un S-groupe réductif de même type que G en chaque point de S).

Corollaire 1.17. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif . Le foncteur

$$G' \longmapsto \underline{Isom}_{S\text{-}gr}(G,G')$$

est une équivalence entre la catégorie des formes de G sur S et la catégorie des fibrés principaux homogènes sous $\underline{Aut}_{S\text{-}gr}(G)$.
Si $S' \longrightarrow S$ est un morphisme couvrant, formes de G trivialisées par S' et fibrés trivialisés par S' se correspondent.
Tout faisceau principal homogène sous $\underline{Aut}_{S\text{-}gr}(G)$ est représentable et quasi-isotrivial (localement trivial pour la topologie étale).

La première assertion est formelle dans la catégorie des faisceaux (pour (fpqc) par exemple). D'autre part, tout faisceau localement isomorphe à G (pour (fpqc)) est représentable (car G est affine sur S) et localement isomorphe à G pour (ét) . Enfin, pour toute forme G' de G , le S-faisceau $\underline{Isom}_{S\text{-}gr}(G,G')$ est représentable (1.8). Le corollaire en résulte aussitôt.

Corollaire 1.18. L'ensemble des classes d'isomorphisme de formes du groupe réductif G sur S est isomorphe à

$$H^1(S,\underline{Aut}_{S\text{-}gr}(G)) = H^1_{ét}(S,\underline{Aut}_{S\text{-}gr}(G)) = Fib(S,\underline{Aut}_{S\text{-}gr}(G)) .$$

Si $S' \longrightarrow S$ est un morphisme couvrant, le sous-ensemble formé des formes trivialisées par S' est isomorphe à $H^1(S'/S,\underline{Aut}_{S\text{-}gr}(G))$.

Corollaire 1.19. Soient S un préschéma et $\mathcal{R}$ une donnée radicielle réduite épinglée telle que $\underline{\underline{Ep}}_S(\mathcal{R})$ existe (condition automatiquement vérifiée , Exp. XXV). Notons

$$\underline{\underline{A}}_S(\mathcal{R}) = \underline{Aut}_{S\text{-}gr}(\underline{\underline{Ep}}_S(\mathcal{R})) = ad(\underline{\underline{Ep}}_S(\mathcal{R})).E(\mathcal{R})_S .$$

L'ensemble des classes d'isomorphisme de S-groupes réductifs de type $\mathcal{R}$ (Exp. XXII, 2.7 , cf. Exp. XXIII, 5.12) est isomorphe à

$$H^1(S, \underline{\underline{A}}_S(\mathcal{R})) = H^1_{ét}(S , \underline{\underline{A}}_S(\mathcal{R})) = Fib(S, \underline{\underline{A}}_S(\mathcal{R})) .$$

Si $S' \longrightarrow S$ est un morphisme couvrant, le sous-ensemble formé des classes de groupes déployables sur S' est isomorphe à $H^1(S'/S, \underline{\underline{A}}_S(\mathcal{R}))$.

Remarque 1.20. Avec les notations précédentes, à tout S-groupe réductif de type $\mathcal{R}$ est associé canoniquement un fibré principal homogène à droite sous $\underline{\underline{A}}_S(\mathcal{R})$:

$$\underline{Isom}_{S\text{-}gr}(\underline{\underline{Ep}}_S(\mathcal{R}), G) = P .$$

Remarquons que P s'interprète comme le "schéma des épinglages de G de type $\mathcal{R}$ (1.0)". D'ailleurs P est également un fibré principal homogène (à gauche) sous $\underline{Aut}_{S\text{-}gr}(G)$, structure qui apparaît aussitôt dans la description ci-dessus.

Proposition 1.21. Soient S un schéma local hensélien , s son point fermé . Le foncteur

$$G \longmapsto G_s$$

induit une bijection de la classification des S-groupes réductifs sur celle des k(s)-groupes réductifs. En particulier, pour tout S-groupe réductif G , il existe un morphisme étale fini surjectif $S' \longrightarrow S$ tel que $G_{S'}$ soit déployable.

Utilisant l'existence des $\underline{\underline{Ep}}_S(\mathcal{R})$ (Exp. XXV) , on est ramené à prouver que si on note $H = \underline{\underline{A}}_S(\mathcal{R})$, l'application canonique

$$Fib(S,H) \longrightarrow Fib(k(s),H_s)$$

est bijective (et que tout élément de Fib(S,H) a la propriété indiquée ci-dessus). Or, toute partie finie de H est contenue dans un ouvert affine (c'est en effet trivial pour un groupe constant, et H est affine au-dessus d'un groupe constant); on peut donc utiliser le résultat démontré en appendice (8.1).

2. Automorphismes et sous-groupes.

Introduisons une notation : si $H = \underline{Aut}_{S\text{-}gr}(G)$, et si X est un sous-foncteur de G , on note

$$\underline{Aut}_{S\text{-}gr}(G,X) = \underline{Norm}_H(X) ,$$

$$\underline{Aut}_{S\text{-}gr}(G,\text{id. sur } X) = \underline{Cent}_H(X) .$$

On définit de même $\underline{Aut}_{S\text{-}gr}(G,X,Y),\ldots$, $\underline{Isom}_{S\text{-}gr}(G,X;G',X'),\ldots$.

Proposition 2.1. Soient S un préschéma , G un S-groupe réductif , T un tore maximal de G (resp. B un groupe de Borel de G , resp.

$B \supset T$ un couple de Killing de G) . Notons T^{ad} (resp. B^{ad}) le tore maximal (resp. le groupe de Borel) de $ad(G)$ correspondant à T (resp. B) :

$$B^{ad} \simeq B/\underline{Cent}(G) = B/\underline{Cent}(B) ,$$

$$T^{ad} \simeq T/\underline{Cent}(G) .$$

Alors $\underline{Aut}_{S\text{-}gr}(G,T)$ (resp. $\underline{Aut}_{S\text{-}gr}(G,B)$, resp. $\underline{Aut}_{S\text{-}gr}(G,B,T)$) est représentable par un sous-préschéma fermé de $\underline{Aut}_{S\text{-}gr}(G)$, lisse sur S , et la suite exacte de 1.3. induit une suite exacte

$$e \longrightarrow \underline{Norm}_{ad(G)}(T^{ad}) \longrightarrow \underline{Aut}_{S\text{-}gr}(G,T) \longrightarrow \underline{Autext}(G) \longrightarrow e$$

(resp.

$$e \longrightarrow B^{ad} \longrightarrow \underline{Aut}_{S\text{-}gr}(G,B) \longrightarrow \underline{Autext}(G) \longrightarrow e ,$$

resp.

$$e \longrightarrow T^{ad} \longrightarrow \underline{Aut}_{S\text{-}gr}(G,B,T) \longrightarrow \underline{Autext}(G) \longrightarrow e) .$$

Par descente des sous-préschémas fermés, on se ramène aussitôt au cas où G est épinglé et où $B \supset T$ est son couple de Killing canonique (Exp. XXII, 5.5.5 (iv)). Comme le groupe E de 1.2 normalise B et T , le résultat se déduit aussitôt des théorèmes de normalisation dans $ad(G)$ (Exp. XXII, 5.3.12 , 5.6.1).

Utilisant maintenant les théorèmes de conjugaison (cf. Exp. XXIII, 5.12), et raisonnant comme au n° 1 , on en déduit :

Corollaire 2.2. Soient S un préschéma, G et G' deux S-groupes réductifs de même type en chaque point.

(i) Soit T (resp. T') un tore maximal de G (resp. G') . Alors le S-foncteur $\underline{Isom}_{S\text{-}gr}(G,T;G',T')$ est représentable par un sous-préschéma

fermé lisse de $\underline{\mathrm{Isom}}_{S\text{-}gr}(G,G')$ qui est principal homogène sous $\underline{\mathrm{Aut}}_{S\text{-}gr}(G,T)$. De plus, $\underline{\mathrm{Norm}}_{ad(G)}(T^{ad})$ opère librement sur ce préschéma, et on a un isomorphisme canonique

$$\underline{\mathrm{Isom}}_{S\text{-}gr}(G,T;G',T')/\underline{\mathrm{Norm}}_{ad(G)}(T^{ad}) \simeq \underline{\mathrm{Isomext}}(G,G') .$$

(ii) Soit B (resp. B') un groupe de Borel de G (resp. G') . Alors le S-foncteur $\underline{\mathrm{Isom}}_{S\text{-}gr}(G,B;G',B')$ est représentable par un sous-préschéma fermé lisse de $\underline{\mathrm{Isom}}_{S\text{-}gr}(G,G')$ qui est principal homogène sous $\underline{\mathrm{Aut}}_{S\text{-}gr}(G,B)$. De plus, B^{ad} opère librement sur ce préschéma et on a un isomorphisme canonique

$$\underline{\mathrm{Isom}}_{S\text{-}gr}(G,B;G',B')/ B^{ad} \simeq \underline{\mathrm{Isomext}}(G,G') .$$

(iii) Soit $B \supset T$ (resp. $B' \supset T'$) un couple de Killing de G (resp. G') . Alors le S-foncteur $\underline{\mathrm{Isom}}_{S\text{-}gr}(G,B,T;G',B',T')$ est représentable par un sous-préschéma fermé lisse de $\underline{\mathrm{Isom}}_{S\text{-}gr}(G,G')$ qui est principal homogène sous $\underline{\mathrm{Aut}}_{S\text{-}gr}(G,B,T)$. De plus, T^{ad} opère librement sur ce préschéma et on a un isomorphisme canonique

$$\underline{\mathrm{Isom}}_{S\text{-}gr}(G,B,T;G',B',T')/ T^{ad} \simeq \underline{\mathrm{Isomext}}(G,G') .$$

Raisonnant encore comme au n° 1 , on en déduit :

Corollaire 2.3. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, $B \supset T$ un couple de Killing de G . Le foncteur

$$(G',T') \longmapsto \underline{\mathrm{Isom}}_{S\text{-}gr}(G,T;G',T')$$

(resp.

$$(G',B') \longmapsto \underline{\mathrm{Isom}}_{S\text{-}gr}(G,B;G',B') ,$$

resp.

$$(G',B',T') \longmapsto \underline{\mathrm{Isom}}_{S\text{-}gr}(G,B,T;G',B',T')) ,$$

est une équivalence entre la catégorie des couples $(G;T')$ (resp. des couples (G',B'), resp. des triplets (G',B',T')), où G' est une forme de G et T' un tore maximal de G' (resp. B' un groupe de Borel de G', resp. $B' \supset T'$ un couple de Killing de G'), et la catégorie des fibrés principaux homogènes sous le S-groupe H, où $H = \underline{Aut}_{S\text{-}gr}(G,T)$ (resp. $H = \underline{Aut}_{S\text{-}gr}(G,B)$, resp. $H = \underline{Aut}_{S\text{-}gr}(G,B,T)$).
De plus, tout faisceau principal homogène sous H est représentable et quasi-isotrivial, de sorte qu'on a

$$H^1(S,H) = H^1_{ét}(S,H) = \mathrm{Fib}(S,H) .$$

Remarque 2.4. Sous les conditions de 2.2, le morphisme noté ensemblistement $u \longmapsto u(T)$ (resp. $u \longmapsto u(B)$, resp. $u \longmapsto (u(B),u(T))$) induit un isomorphisme

$$\underline{Isom}_{S\text{-}gr}(G,G')/\underline{Aut}_{S\text{-}gr}(G,T) \simeq \underline{Tor}(G')$$

(resp. $\underline{Isom}_{S\text{-}gr}(G,G')/\underline{Aut}_{S\text{-}gr}(G,B) \simeq \underline{Bor}(G')$,

resp. $\underline{Isom}_{S\text{-}gr}(G,G')/\underline{Aut}_{S\text{-}gr}(G,B,T) \simeq \underline{Kil}(G')$) .

La démonstration est immédiate : il suffit de la faire localement pour (fpqc), on peut donc supposer $G \simeq G'$, et on est ramené à Exp. XXII, 5.8.3 (iii)).

Remarque 2.5. Les résultats précédents s'interprètent aussitôt en termes de restriction du groupe structural : si G' est une forme de G, correspondant au fibré principal $\underline{Isom}_{S\text{-}gr}(G,G')$, se donner une restriction du groupe structural de ce fibré à $\underline{Aut}_{S\text{-}gr}(G,T)$ revient à se donner un tore maximal T' de G', les bijections suggérées ci-dessus étant celle

de 2.4. d'une part, l'application $T' \longmapsto \underline{\mathrm{Isom}}_{S\text{-}gr}(G,T;G',T')$ d'autre part. De même pour groupes de Borel et couples de Killing.

Proposition 2.6. Sous les conditions de 2.2 (i), T^{ad} opère librement sur $\underline{\mathrm{Isom}}_{S\text{-}gr}(G,T;G',T')$, le quotient

$$P = \underline{\mathrm{Isom}}_{S\text{-}gr}(G,T;G',T')/T^{ad}$$

est représentable; c'est un fibré principal homogène sous

$$A = \underline{\mathrm{Aut}}_{S\text{-}gr}(G,T)/T^{ad} ,$$

où A est représentable par un S-préschéma constant tordu, extension de $\underline{\mathrm{Autext}}(G)$ par $W_{ad(G)}(T^{ad}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{ad(G)}(T^{ad})/T^{ad}$. De plus, si on fait opérer A sur T de la manière évidente, le fibré associé à P n'est autre que T' .

La première partie de la proposition résulte aussitôt des résultats précédents. Pour prouver la seconde, on remarque qu'il y a un morphisme évident $P \times_S T \longrightarrow T'$ (défini par $(u,t) \longmapsto u(t)$); pour démontrer qu'après passage au quotient par A il induit un isomorphisme, on peut encore une fois supposer $(G,T) \simeq (G',T')$, auquel cas c'est immédiat.

De manière absolument semblable, on a :

Proposition 2.7. Sous les conditions de 2.2. (ii), si on fait opérer $\underline{\mathrm{Aut}}_{S\text{-}gr}(G,B,T)/T^{ad} \simeq \underline{\mathrm{Autext}}(G)$ de la manière évidente sur T, le fibré associé à $\underline{\mathrm{Isomext}}(G,G')$ n'est autre que T' .

Corollaire 2.8. Soient G et G' deux S-groupes réductifs qui sont des formes tordues intérieures l'un de l'autre; soit $B \supset T$

(resp. $B' \supset T'$) un couple de Killing de G (resp. G'). Alors T et T' sont isomorphes.

Remarque 2.9. Il n'est pas vrai en général que B et B' soient isomorphes; ce sont cependant des formes tordues intérieures l'un de l'autre (cf. n° 5).

On peut développer des variantes "Isomint" des résultats précédents. Signalons-en une :

Proposition 2.10. Sous les conditions de 2.2 (iii), soit $u \in \underline{\mathrm{Isomext}}(G,G')(S)$; considérons

$$\underline{\mathrm{Isomint}}_u(G,B,T;G',B',T') = \underline{\mathrm{Isom}}_{S\text{-gr}}(G,B,T;G',B',T') \cap \underline{\mathrm{Isomint}}_u(G,G') .$$

C'est un S-préschéma lisse et affine qui est un fibré principal homogène sous T^{ad}. En particulier, $\underline{\mathrm{Isomint}}_u(G,B,T;G',B',T')(S) \neq \emptyset$ si et seulement l'élément correspondant de $H^1(S,T^{ad})$ est nul.

Pour terminer ce n° , démontrons deux résultats qui nous seront utiles par la suite :

Proposition 2.11. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, T un tore maximal de G. Le morphisme évident

$$T^{ad} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Aut}}_{S\text{-gr}}(G, \text{id. sur } T)$$

est un isomorphisme.

Cela résulte des énoncés précédents; d'ailleurs, on a donné une démonstration directe au cours de la preuve de 1.5.2.

Corollaire 2.12. Sous les conditions précédentes, il existe une équivalence entre la catégorie des couples (G',f), où G' est une forme de G et f un isomorphisme de T sur un tore maximal de G, et la catégorie des fibrés principaux homogènes sous T^{ad}.

Corollaire 2.13. Si $H^1(S,T^{ad}) = 0$, et si G' est une forme de G possédant un tore maximal isomorphe à T, G' est isomorphe à G.

Corollaire 2.14. Soient S un préschéma tel que $Pic(S) = 0$, et G un S-groupe réductif de type constant. Pour que G soit déployable, il faut et il suffit que G possède un tore maximal trivial.

Soient G un groupe réductif, $rad(G)$ son radical (Exp. XXII, 4.3.9); comme $rad(G)$ est central et caractéristique dans G, on a un morphisme canonique $\underline{Autext}(G) \xrightarrow{q} \underline{Aut}_{S\text{-}gr}(rad(G))$.

Proposition 2.15. Soit G un S-groupe réductif. La suite suivante est exacte :

$$e \to ad(G) \to \underline{Aut}_{S\text{-}gr}(G;\text{id. sur } rad(G)) \xrightarrow{p} \underline{Autext}(G) \xrightarrow{q} \underline{Aut}_{S\text{-}gr}(rad(G)).$$

De plus, $Ker(q) = Im(p)$ est un sous-préschéma ouvert et fermé de $\underline{Autext}(G)$, fini sur S.

On peut supposer G déployé. La première assertion est immédiate; la seconde résulte de Exp. XXI, 6.7.5 et 6.7.7.

Notant $H = \underline{Aut}_{S\text{-}gr}(G,\text{id. sur } rad(G))$, on en déduit :

Corollaire 2.16. Il existe une équivalence entre la catégorie des couples (G',f), où G' est une forme de G et f un isomorphisme de $rad(G)$

sur le radical de G' , et la catégorie des fibrés principaux sous un certain S-préschéma en groupes H , où H est tel qu'il existe une suite exacte

$$e \longrightarrow ad(G) \longrightarrow H \longrightarrow F \longrightarrow e ,$$

où le S-groupe F est étale et fini sur S .

3. Schéma de Dynkin d'un groupe réductif. Groupes quasi-déployés.

3.1. On rappelle (Exp. XXI, 7.4.1) qu'un diagramme de Dynkin est un ensemble fini muni de la structure définie par un ensemble de couples d'éléments distincts (liaisons) et d'une application dans $\{1,2,3\}$ (longueurs). A chaque donnée radicielle réduite épinglée $\mathcal{R}$ est associée un diagramme de Dynkin $D(\mathcal{R})$, dont l'ensemble sous-jacent est l'ensemble des racines simples.

3.2. Soit S un préschéma. Un S-schéma de Dynkin est un S-schéma constant tordu fini, D muni de la structure définie par un sous-schéma L de $D \times_S D$ d'intersection vide avec la diagonale, et d'un morphisme $D \longrightarrow \{1,2,3\}_S$. Pour chaque $S' \longrightarrow S$, $D(S')$ est muni naturellement d'une structure de diagramme de Dynkin.

On définit aussitôt les notions suivantes : isomorphisme de deux schémas de Dynkin, extension de la base d'un schéma de Dynkin, schéma de Dynkin constant associé à un diagramme de Dynkin. Toute

donnée de descente sur un schéma de Dynkin pour la topologie étale est effective.

3.3. On se propose d'associer à chaque S-groupe réductif G un S-schéma de Dynkin. Supposons d'abord G déployable sur S ; pour tout épinglage E de G , notons D(E) le schéma de Dynkin constant associé à la donnée radicielle épinglée définie par E ; si E et E' sont deux épinglages de G , il existe par 1.5 un unique automorphisme intérieur de G sur S transformant E en E' ; cet automorphisme de G définit un isomorphisme $a_{EE'} : D(E) \xrightarrow{\sim} D(E')$; les $a_{EE'}$ forment évidemment un système transitif, de sorte qu'on peut identifier les D(E) (i.e. prendre la limite inductive); le résultat est un schéma de Dynkin constant noté Dyn(G). Si maintenant G est un S-groupe réductif quelconque, il existe une famille couvrante pour la topologie étale $\{ S_i \longrightarrow S \}$ telle que G_{S_i} soit déployable. Raisonnant comme précédemment, on a donc une donnée de descente canonique sur les $\underline{Dyn}(G_{S_i})$, permettant de construire par descente un S-schéma de Dynkin Dyn(G) .

3.4. Cette construction vérifie les propriétés suivantes (qui d'ailleurs la caractérisent essentiellement) :

(i) A chaque S-groupe réductif est associé un schéma de Dynkin Dyn(G) ; à tout isomorphisme $u : G \xrightarrow{\sim} G'$ est associé fonctoriellement un isomorphisme $\underline{Dyn}(u) : \underline{Dyn}(G) \xrightarrow{\sim} \underline{Dyn}(G')$.

(ii) Si S' est un S-préschéma et G un S-groupe réductif, on a

$$\underline{\mathrm{Dyn}}(G \times_S S') \simeq \underline{\mathrm{Dyn}}(G) \times_S S' \ .$$

(iii) Si E est un épinglage de G, définissant la donnée radicielle épinglée de diagramme de Dynkin D, on a

$$\underline{\mathrm{Dyn}}(G) \simeq D_S \ .$$

(iv) Si u est un automorphisme intérieur de G, $\underline{\mathrm{Dyn}}(u)$ est l'automorphisme identique de $\underline{\mathrm{Dyn}}(G)$.

3.5. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif. Il est clair que le foncteur $\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{Dyn}}(\underline{\mathrm{Dyn}}(G))$ des automorphismes de $\underline{\mathrm{Dyn}}(G)$ pour la structure de schéma de Dynkin est représentable par un S-schéma constant tordu fini. Par 3.4 (i) et (ii), on a un morphisme canonique

$$\underline{\mathrm{Aut}}_{S\text{-gr}}(G) \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{Dyn}}(\underline{\mathrm{Dyn}}(G)) \ ,$$

qui, en vertu de (iv), se factorise par un morphisme

$$\underline{\mathrm{Autext}}(G) \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{Dyn}}(\underline{\mathrm{Dyn}}(G)) \ .$$

Plus généralement, si G et G' sont deux S-groupes réductifs, on a un morphisme canonique

$$\underline{\mathrm{Isomext}}(G,G') \longrightarrow \underline{\mathrm{Isom}}_{\mathrm{Dyn}}(\underline{\mathrm{Dyn}}(G),\underline{\mathrm{Dyn}}(G')) \ ;$$

en particulier, si G' est une forme tordue intérieure de G (1.11), les schémas de Dynkin $\underline{\mathrm{Dyn}}(G)$ et $\underline{\mathrm{Dyn}}(G')$ sont isomorphes.

3.6. Si G est semi-simple (resp. adjoint ou simplement connexe), le morphisme

$$\underline{\mathrm{Autext}}(G) \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{Dyn}}(\underline{\mathrm{Dyn}}(G))$$

est un monomorphisme (resp. un isomorphisme). En effet, on peut supposer G épinglé et on est ramené au résultat correspondant pour les données radicielles réduites épinglées (cf. Exp. XXI, 7.4.5).

On a un résultat analogue pour les $\underline{\mathrm{Isom}}$; d'où il résulte en particulier que deux S-groupes semi-simples adjoints (resp. simplement connexes) sont des formes tordues intérieures l'un de l'autre si et seulement si leurs schémas de Dynkin sont isomorphes.

3.7. On peut donner une construction différente du schéma de Dynkin associé à un groupe réductif. Soient $\mathcal{R}$ une donnée radicielle réduite épinglée, G un S-groupe réductif de type $\mathcal{R}$; notons $D(\mathcal{R})$ le diagramme de Dynkin défini par la donnée radicielle $\mathcal{R}$. On a (3.5) un morphisme canonique

$$\underline{\underline{A}}_S(\mathcal{R}) = \underline{\mathrm{Aut}}_{S\text{-gr}}(\underline{\underline{\mathrm{Ep}}}_S(\mathcal{R})) \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{Dyn}}(D(\mathcal{R})_S) .$$

Le S-groupe réductif G correspond (1.17) à un fibré principal homogène $\underline{\mathrm{Isom}}_{S\text{-gr}}(\underline{\underline{\mathrm{Ep}}}_S(\mathcal{R}),G)$ sous $\underline{\underline{A}}_S(\mathcal{R})$. Le fibré sous $\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{Dyn}}(D(\mathcal{R})_S)$ associé correspond à une forme sur S de $D(\mathcal{R})_S$: c'est $\underline{\mathrm{Dyn}}(G)$; en d'autres termes, ce fibré associé n'est autre que $\underline{\mathrm{Isom}}_{\mathrm{Dyn}}(D(\mathcal{R})_S, \underline{\mathrm{Dyn}}(G))$. Sous cette dernière forme, la démonstration est immédiate.

3.8. Schéma de Dynkin et couples de Killing. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif , $B \supset T$ un couple de Killing de G . Il existe un morphisme canonique

$$i : \underline{\mathrm{Dyn}}(G) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr}}(T, \underline{G_m}_S)$$

qui identifie $\underline{\mathrm{Dyn}}(G)$ au "schéma des racines simples de B relativement à T " ; ce morphisme se définit aussitôt par descente à partir du cas épinglé. Remarquons d'ailleurs que la donnée de T et de i permet de reconstruire B (" correspondance biunivoque entre systèmes de racines simples et systèmes de racines positives").

Il résulte de la description précédente de $\underline{\mathrm{Dyn}}(G) = D$, qu'il existe une <u>racine canonique</u> de B_D par rapport à T_D : cette racine r_D est l'image par i(D) du morphisme identique de D . On en déduit un <u>$\underline{O}_D$-Module inversible canonique</u> $\mathcal{J}^D$

$$\mathcal{J}^D = (\mathcal{J} \otimes_{\underline{O}_S} \underline{O}_D)^{r_D} .$$

Dans le cas épinglé, on a

$$D = \coprod_{r \in R_o} S_r ,$$

où chaque S_r est une copie de S , et $\mathcal{J}^D$ est le $\underline{O}_D$-Module qui induit $\mathcal{J}^r$ sur S_r , $r \in R_o$.

3.9. <u>Quasi-épinglages</u>. <u>Groupes quasi-épinglés</u>. Si G est un S-groupe réductif, on appelle <u>quasi-épinglage</u> de G la donnée :

(i) d'un couple de Killing $B \supset T$ de G ,

(ii) d'une section $X \in \Gamma (\underline{\mathrm{Dyn}}(G), \mathcal{J}^D)^*$.

On dit qu'un S-groupe réductif est <u>quasi-déployable</u> s'il possède un quasi-épinglage.

On appelle <u>groupe quasi-épinglé</u> un groupe réductif muni d'un quasi-épinglage.

Si $B \supset T$ est un couple de Killing du S-groupe réductif G, G est quasi-épinglable relativement à ce couple de Killing si et seulement si $\mathcal{O}_S^D$ possède une section non nulle en chaque point, i.e. si l'élément de $\mathrm{Pic}(\underline{\mathrm{Dyn}}(G))$ défini par $\mathcal{O}_S^D$ est nul. Supposons en particulier S semi-local; alors $\underline{\mathrm{Dyn}}(G)$ est également semi-local, donc $\mathrm{Pic}(\underline{\mathrm{Dyn}}(G)) = 0$. Utilisant en outre Exp. XXII, 5.9.7, on en déduit :

Proposition 3.9.1. Soient S un schéma semi-local, G un S-groupe réductif. Pour que G soit quasi-déployable, il faut et il suffit qu'il possède un groupe de Borel.

Remarquant maintenant que pour un S-groupe réductif quelconque le S-préschéma $\underline{\mathrm{Bor}}(G)$ est lisse et projectif (Exp. XXII, 5.8.3), donc possède des sections après extension étale finie surjective de la base (EGA IV, § 24), on en déduit le

Corollaire 3.9.2. Soient S un schéma semi-local, G un S-groupe réductif. Il existe un morphisme $S' \longrightarrow S$ étale fini et surjectif tel que $G_{S'}$ soit quasi-déployable.

Remarque 3.9.3. Sous les conditions précédentes, soit T un tore maximal de G (Exp. XIV, 3.20); alors on peut supposer en outre que $G_{S'}$ est quasi-déployable relativement à $T_{S'}$: il suffit d'appliquer le raisonnement précédent au "schéma des groupes de Borel contenant T" qui est fini et étale sur S (Exp. XXII, 5.5.5 (ii)).

3.10. Soient E et E' deux quasi-épinglages du S-groupe réductif G. Il existe un unique automorphisme intérieur de G transformant E en E'.

En effet, on ramène aussitôt au cas déployé, où l'assertion a déjà été démontrée (1.5 , il suffit de remarquer en effet qu'il revient au même pour un automorphisme intérieur de G de respecter un épinglage ou le quasi-épinglage sous-jacent). On en conclut comme au n° 1 qu'un quasi-épinglage du S-groupe réductif G définit un scindage h de la suite exacte

$$e \longrightarrow ad(G) \longrightarrow \underline{Aut}_{S\text{-}gr}(G) \underset{p}{\overset{h}{\rightleftarrows}} \underline{Autext}(G) \longrightarrow e \ ,$$

l'image de h étant le sous-groupe de $\underline{Aut}_{S\text{-}gr}(G)$ qui laisse invariant le quasi-épinglage.

De même si G et G' sont deux S-groupes quasi-épinglés, on définit de manière naturelle le sous-foncteur

$$\underline{Isom}_{S\text{-}gr.\ q.ép.}(G,G')$$

de $\underline{Isom}_{S\text{-}gr}(G,G')$; la projection de $\underline{Isom}_{S\text{-}gr}(G,G')$ sur $\underline{Isomext}(G,G')$ induit un isomorphisme

$$\underline{Isom}_{S\text{-}gr.q.ép.}(G,G') \xrightarrow{\sim} \underline{Isomext}(G,G') \ .$$

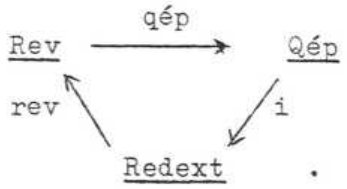
Théorème 3.11. Soient S un préschéma, $\mathcal{R}$ une donnée radicielle réduite épinglée telle que $\underline{Ep}_S(\mathcal{R})$ existe (cf. Exp. XXV), E le groupe de ses automorphismes. Considérons les trois catégories suivantes :

(i) La catégorie Rev des revêtements principaux galoisiens de S de groupe E (les morphismes sont les isomorphismes).

(ii) La catégorie Redext dont les objets sont les S-groupes réductifs de type $\mathcal{R}$ (Exp. XXII, 2.7), les morphismes de G dans G' étant les éléments de $\underline{Isomext}(G,G')(S)$.

(iii) La catégorie Qép des S-groupes réductifs quasi-épinglés de type $\mathcal{R}$ (les morphismes sont les isomorphismes respectant les quasi-épinglages).

Ces trois catégories sont équivalentes : plus précisément, on a un diagramme de foncteurs, commutatif à isomorphismes près



Nous allons décrire ci-dessous ces trois foncteurs, en laissant au lecteur le soin de vérifier la commutativité du diagramme.

3.11.1. Le foncteur i . C'est le foncteur évident : $i(G) = G$, $i(f)$ = image de f par le morphisme décrit en 3.10.

3.11.2. Le foncteur qép. Soit S' un revêtement principal galoisien de S de groupe E . L'homomorphisme canonique

$$h : E \longrightarrow \mathrm{Aut}_{S'\text{-gr}}(\underline{\underline{Ep}}_{S'}(\mathcal{R})) = \underline{\underline{A}}_S(\mathcal{R})(S')$$

définit une opération de E sur $\underline{\underline{Ep}}_{S'}(\mathcal{R})$, opération qui respecte le quasi-épinglage canonique de $\underline{\underline{Ep}}_S(\mathcal{R})$. Comme $S' \longrightarrow S$ est couvrant pour la topologie (fpqc) , c'est un morphisme de descente effective pour la catégorie fibrée des morphismes affines, et on note

$$\text{qép}(S') = \underline{\underline{Q.Ep}}_{S'/S}(\mathcal{R})$$

le S-groupe quasi-épinglé obtenu par descente galoisienne.

3.11.3. Le foncteur rev . Soit G un S-groupe réductif de type $\mathcal{R}$. On note

$$\mathrm{rev}(G) = \underline{\mathrm{Isomext}}(\underline{\mathrm{Ep}}_S(\mathcal{R}),G) ,$$

c'est un fibré principal homogène (1.10) sous E_S , c'est-à-dire un objet de Rev .

Développons un des corollaires de 3.11 :

Corollaire 3.12. Pour tout S-groupe réductif G , il existe un S-groupe quasi-épinglé $G_{q.ép.}$ et un "isomorphisme extérieur" $u \in \underline{\mathrm{Isomext}}(G_{q.ép.},G)(S)$. Le couple $(G_{q.ép.},u)$ est unique à un isomorphisme unique près .

En effet, on peut supposer G de type constant $\mathcal{R}$, et on prend $G_{q.ép.} = \underline{\underline{\mathrm{Q.Ep}}}_{\mathrm{rev}(G)/S}(\mathcal{R})$.

3.12.1. Remarquons que la donnée de u permet de définir de manière canonique le S-préschéma (1.11)

$$Q = \underline{\mathrm{Iscmint}}(G_{q.ép.},G) ,$$

qui est un fibré principal homogène sous $\mathrm{ad}(G_{q.ép.})$, et dont la donnée "équivaut" à celle de la forme tordue intérieure G de $G_{q.ép.}$. D'ailleurs Q n'est autre que le "schéma des quasi-épinglages de G", définition qui rend compte de sa structure de fibré principal homogène (à gauche) sous ad(G) (3.10) - comparer avec 1.20.

Proposition 3.13. Soient S un préschéma, G un S-groupe semi-simple adjoint (resp. simplement connexe) , $B \supset T$ un couple de Killing de G ,

Dyn(G) le S-schéma de Dynkin de G . Il existe un isomorphisme canonique de S-préschémas en groupes

$$T \xrightarrow{\sim} \prod_{\mathrm{Dyn}(G)/S} \mathbb{G}_m \, \mathrm{Dyn}(G) \cdot$$

(On rappelle, Exp. II , 1, que le second membre est par définition le S-foncteur qui à $S' \longrightarrow S$ associe $\mathbb{G}_m(\mathrm{Dyn}(G) \times_S S')$, ou, ce qui revient au même $\mathbb{G}_m(\mathrm{Dyn}(G_{S'}))$.

1ère démonstration. Faisons-la pour simplifier dans le cas adjoint. Considérons le morphisme composé

$$T \longrightarrow \prod_{D/S} T_D \longrightarrow \prod_{D/S} \mathbb{G}_m \, D \quad ,$$

où le premier morphisme est le morphisme canonique, le second est $\prod_{D/S} r_D$ (on a noté $D = \mathrm{Dyn}(G)$). Pour vérifier que ce morphisme est un isomorphisme, on peut supposer G déployé; or, dans ce cas, ce n'est autre que le morphisme $T \longrightarrow (\mathbb{G}_{m\,S})^{R_o}$ de composantes r , $r \in R_o$, et celui-ci est un isomorphisme (Exp. XXII, 4.3.8).

2ème démonstration. D'après 2.8 , 3.5 et 3.11 , on peut supposer que $G = \underline{\mathrm{Q.Ep}}_{S'/S}(\mathcal{R})$, T étant le tore maximal canonique. Sur S' , on a par Exp. XXII 4.3.8 , un isomorphisme $T_{S'} \longrightarrow (\mathbb{G}_{m\,S'})^{R_o}$, défini par les racines simples (resp. les coracines simples). Le groupe E opère au second membre par permutation de R_o . Or le fibré associé à S'/S par $E \longrightarrow \mathrm{Aut}(R_o)$ est Dyn(G) (3.7) , et on conclut aussitôt.

Utilisant 8.1 , on en tire :

Corollaire 3.14. Sous les conditions précédentes, on a

$$H^1(S,T) \xrightarrow{\sim} H^1(\mathrm{Dyn}(G),\mathbb{G}_m) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(\mathrm{Dyn}(G)) \cdot$$

En particulier, $H^1(S,T) = 0$ lorsque S est semi-local.

Remarque 3.15. Soient S un préschéma, G (resp. G') un S-groupe réductif, $B \supset T$ (resp. $B' \supset T'$) un couple de Killing de G (resp. G'), $u \in \underline{\mathrm{Isomext}}(G,G')(S)$. Posons (2.10)

$$P = \underline{\mathrm{Isomint}}_u(G,B,T;G',B',T') ;$$

c'est un fibré principal homogène sous T^{ad} (par $(f,t) \longmapsto f\,\mathrm{int}(t)$). Soit d'autre part $D = \underline{\mathrm{Dyn}}(G) = \underline{\mathrm{Dyn}}(G')$ (identifiés grâce à u (3.5)), et soit $L = \underline{\mathrm{Isom}}_D(\mathcal{J}^D, \mathcal{J}'^D)$ le fibré principal homogène sous $\underline{G}_m\,D$ défini par le $\underline{O}_D$-Module inversible $\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_D}(\mathcal{J}^D, \mathcal{J}'^D) = \mathcal{J}'^D \otimes \check{\mathcal{J}}^D$. Chaque $f \in P(S')$ définit un isomorphisme de $\mathcal{J}^D \otimes_{\underline{O}_S} \underline{O}_{S'}$ sur $\mathcal{J}'^D \otimes_{\underline{O}_S}$ de $\underline{O}_{S'}$, d'où un morphisme canonique

$$P \longrightarrow \coprod_{D/S} L .$$

Ce morphisme est un isomorphisme, compatible avec l'isomorphisme d'opérateurs

$$T^{ad} \longrightarrow \coprod_{D/S} \underline{G}_m\,D$$

défini ci-dessus. En effet, il suffit de le vérifier dans le cas où les deux groupes sont épinglés, où c'est facile.

Il s'ensuit en particulier que dans l'isomorphisme

$$H^1(S,T^{ad}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(\underline{\mathrm{Dyn}}(G))$$

de 3.14, la classe du fibré P est transformée en $\mathrm{cl}(\mathcal{J}'^D) - \mathrm{cl}(\mathcal{J}^D)$. Le fibré P est donc trivial si et seulement si $\mathcal{J}'^D$ et $\mathcal{J}^D$ sont isomorphes.

Si (G,B,T) est quasi-déployable, par exemple si on prend pour G le

groupe $G'_{q.ép.}$, avec son couple de Killing canonique, il s'ensuit que l'image de la classe de P n'est autre que l'obstruction au quasi-déploiement de G' définie en 3.9.

3.16. Symétries .

3.16.1. Soient S un préschéma , G un S-groupe réductif, $B \supset T$ un couple de Killing de G . On rappelle (Exp. XXII, 5.9.1) qu'il existe un unique groupe de Borel B^- de G tel que $B \cap B^- = T$.
Si $X \in \Gamma(D, \mathcal{O}_D)^*$ définit un quasi-épinglage de G relativement à (B,T) (3.9) , $Y = -X^{-1} \in \Gamma(D, \check{\mathcal{O}}_D)^*$ définit un quasi-épinglage de G relativement à (B^-,T) ; on dit que c'est le quasi-épinglage opposé.
Si $\mathcal{R}$ est une donnée radicielle réduite épinglée et si e est un $\mathcal{R}$-épinglage du S-groupe réductif G , on définit un $\mathcal{R}$-épinglage e^- dit opposé à e de la manière suivante : on garde le même tore maximal T , on prend l'opposé de l'isomorphisme $D_S(M) \xrightarrow{\sim} T$, et on "épingle" par $Y_r = -X_r^{-1} \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S^{-r})^*$, $r \in R_o$. Le quasi-épinglage sous-jacent à e^- est le quasi-épinglage opposé au quasi-épinglage sous-jacent à e .

Remarque . Dans les notations de Exp. XIX, 3.1 , si on pose

$$w_r(X_r) = \exp(X_r)\ \exp(-X_r^{-1})\ \exp(X_r) ,$$

on a $w_r(X_r) = w_{-r}(Y_r)$ (loc. cit. 3.1 (vi)).

Proposition 3.16.2. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif .

(i) Soit T un tore maximal de G ; il existe un unique

$$i_T \in (\underline{\mathrm{Aut}}_{S\text{-}gr}(G,T)/T^{ad})(S) \subset \mathrm{Aut}_{S\text{-}gr}(T)$$

tel que $i_T(t) = t^{-1}$ pour toute section t de T .

(ii) Soit (B,T) un couple de Killing de G ; il existe une unique section

$$w_{B,T} \in (\underline{\mathrm{Norm}}_G(T)/T)(S) = W_G(T)(S)$$

telle que $\mathrm{int}(w_{B,T})(B) = B^-$ (avec l'abus de langage évident) .

(iii) Soit $\underline{a} = (B,T,X)$ un quasi-épinglage de G , $\underline{a}^- = (B^-,T,Y)$ le quasi-épinglage opposé; il existe un unique automorphisme intérieur de G

$$n_{\underline{a}} \in \underline{\mathrm{Norm}}_{ad(G)}(T^{ad})(S) \subset \mathrm{Aut}_{S\text{-}gr}(G)$$

tel que $n_{\underline{a}}(\underline{a}) = \underline{a}^-$, c'est-à-dire $n_{\underline{a}}(T) = T$, $n_{\underline{a}}(B) = B^-$, $n_{\underline{a}}(X) = Y$.

(iv) Soit $(\mathcal{R},\underline{e})$ un épinglage de G , $(\mathcal{R},\underline{e}^-)$ l'épinglage opposé; il existe un unique automorphisme de G

$$u_{\underline{e}} \in \mathrm{Aut}_{S\text{-}gr}(G,T) \subset \mathrm{Aut}_{S\text{-}gr}(G)$$

tel que $u_{\underline{e}}(\underline{e}) = \underline{e}^-$, c'est-à-dire $u_{\underline{e}}(t) = t^{-1}$ pour toute section t de T , $\mathrm{Ad}(u_{\underline{e}})\, X_r = Y_r$ pour $r \in R_o$.

Démonstration . (ii) résulte de Exp. XXII, 5.5.5 (ii) ; (iii) résulte de 3.10 , et (iv) résulte de Exp. XXIII, 4.1. Enfin pour prouver (i) , on peut supposer G épinglé. L'existence résulte de (iv) par exemple, l'unicité du fait qu'un automorphisme de G qui induit l'identité sur T est donné par une section de T^{ad} (2. 11).

Corollaire 3.16.3. On a $i_T^2 = w_{B,T}^2 = n_{\underline{a}}^{\ 2} = u_{\underline{e}}^2 = e$. De plus, i_T (resp. $u_{\underline{e}}$) est $\neq e$ si $G \neq e$, et $w_{B,T}$ (resp. $n_{\underline{a}}$) est $\neq e$ si G n'est pas un tore.

Corollaire 3.16.4. Dans la situation de (iii) (resp. (iv)), $n_{\underline{a}}$ se projette sur $w_{B,T}$ (resp. $u_{\underline{e}}$ se projette sur i_T) par le morphisme canonique

$$\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{ad}(G)}(T^{\mathrm{ad}}) \longrightarrow W_{\mathrm{ad}(G)}(T^{\mathrm{ad}}) \simeq W_G(T)$$

(resp.

$$\underline{\mathrm{Aut}}_{S\text{-}gr}(G,T) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{S\text{-}gr}(G,T)/T^{\mathrm{ad}}\ ) .$$

Corollaire 3.16.5. Les définitions précédentes sont compatibles avec l'extension de la base, et sont fonctorielles par isomorphisme (en un sens évident).

Proposition 3.16.6. (i) On peut définir de manière unique pour chaque groupe réductif G sur un préschéma S un élément

$$s_G \in \underline{\mathrm{Autext}}(G)(S)$$

de telle manière que cette construction soit fonctorielle en G par isomorphisme, soit compatible avec les changements de base et que chaque fois que T est un tore maximal du S-groupe réductif G , s_G soit l'image de i_T par le morphisme canonique

$$\underline{\mathrm{Aut}}_{S\text{-}gr}(G,T)/T^{\mathrm{ad}} \longrightarrow \underline{\mathrm{Autext}}(G) .$$

(ii) On a $s_G^2 = e$, s_G est un élément central de $\underline{\mathrm{Autext}}(G)$.

(iii) Sous les conditions de 3.16.2 (ii), si on identifie $\underline{\mathrm{Aut}}_{S\text{-}gr}(G,B,T)/T^{ad}$ à $\underline{\mathrm{Autext}}(G)$ (2.2), on a

$$w_{B,T}\ i_T = i_T\ w_{B,T} = s_G .$$

(iv) Sous les conditions de 3.16.2 (iv), si on identifie $\underline{\mathrm{Aut}}_{S\text{-}gr\text{-}ép}(G,\mathcal{R},e)$ à $\underline{\mathrm{Autext}}(G)$ (1.3 (iii)), on a

$$n_{\underline{e}}\ u_{\underline{e}} = u_{\underline{e}}\ n_{\underline{e}} = s_G .$$

Démonstration. (i) se prouve sans difficulté par descente. D'autre part, comme i_T est évidemment une section centrale et de carré e dans $\underline{\mathrm{Aut}}_{S\text{-}gr}(T)$, (ii) en résulte immédiatement ; (iii) est une conséquence de (iv) par descente. Enfin, sous les conditions de (iv), il est clair que $n_{\underline{e}}\ u_{\underline{e}} = u_{\underline{e}}\ n_{\underline{e}}$ et que cet automorphisme de G respecte l'épinglage; modulo l'identification faite, il est donc égal à son image dans $\underline{\mathrm{Autext}}(G)$; mais $n_{\underline{e}}$ est intérieur et $u_{\underline{e}}$ se projette sur s_G.

Remarques 3.16.7. (i) On détermine explicitement s_G dans chacun des cas de la classification grâce à (iii) : il suffit pour chaque donnée radicielle irréductible épinglée de composer la symétrie par rapport à l'origine avec la symétrie dans le groupe de Weyl (i.e. l'élément du groupe de Weyl tel que $w(R_o) = -R_o$). On trouve les résultats suivants : on a $s_G = 1$ sauf pour A_n ($n \geqslant 2$), D_n (n impair) et E_6, auquel cas s_G est l'unique "automorphisme extérieur" non trivial.

(ii) L'automorphisme $u_{\underline{e}}$ est celui qui sert à fabriquer "les formes réelles compactes" dans la théorie des algèbres de Lie semi-simples.

Remarque 3.16.8. On a défini en 3.16.1 une involution dans le S-préschéma $Q = \underline{\mathrm{Isomint}}(G_{q.ép.}, G)$ des quasi-épinglages de G (3.12.1); par transport de structure de $G_{q.ép.}$ à G , on voit aussitôt que cette involution est donnée par l'action d'un élément de $\mathrm{ad}(G_{q.ép.})(S)$: l'élément n_o défini (3.16.2 (iii)) par le quasi-épinglage canonique de $G_{q.ép.}$.

De la même manière, on a défini une involution dans le S-préschéma $P = \underline{\mathrm{Isom}}_{S\text{-gr}}(\underline{\underline{\mathrm{Ep}}}_S(\mathcal{R}), G)$ des $\mathcal{R}$-épinglages de G (1.20). Raisonnant comme précédemment, on voit que cette involution est donnée par l'action de l'automorphisme u_o de $\underline{\underline{\mathrm{Ep}}}_S(\mathcal{R})$ défini (3.16.2 (iv)) par l'épinglage canonique de $\underline{\underline{\mathrm{Ep}}}_S(\mathcal{R})$.

4. Isotrivialité des groupes réductifs et des fibrés principaux sous les groupes réductifs.

4.1. Définitions. Théorème d'isotrivialité.

Définition 4.1.1. Soient S un préschéma , G un S-préschéma en groupes, P un fibré principal homogène sous G . On dit que P est localement isotrivial (resp. semi-localement isotrivial) si pour tout point $s \in S$ (resp. tout ensemble fini F de points de S contenu dans un ouvert affine) il existe un ouvert U de S contenant s (resp. F) et un morphisme étale fini surjectif $S' \longrightarrow U$ tel que $P_{S'}$ soit trivial.

Définition 4.1.2. Soient S un préschéma , G un S-groupe réductif. On dit que G est loc. isot. (resp. semi-loc. isot.) si pour tout point

$s \in S$ (resp. tout ensemble fini F de points de S contenu dans un ouvert affine) il existe un ouvert U de S contenant s (resp. F) et un morphisme étale fini surjectif $S' \longrightarrow U$ tel que $G_{S'}$ soit déployable.

Remarques 4.1.3. (i) L'équivalence de catégories de 1.17 respecte par définition l'isotrivialité locale (resp. semi-locale.)

(ii) Ajoutons aux conditions de 4.1.1 : G localement de présentation finie sur S. Alors le fibré principal P (ou le groupe réductif G) est localement-isotrivial (resp. semi-localement isotrivial) si et seulement si pour tout $S' \longrightarrow S$, S' local (resp. semi-local), $P_{S'}$ est isotrivial (ou $G_{S'}$ isotrivial), c'est-à-dire s'il existe $S'' \longrightarrow S'$ étale fini surjectif tel que $P_{S''}$ soit trivial (ou $G_{S''}$ déployé).

(iii) Dans le cas des tores, la définition 4.1.2 coïncide avec celle de Exp. IX, 1.1.

4.1.4. Rappelons (Exp. XXII, 4.3 et 6.2) que pour tout groupe réductif G, nous avons introduit les groupes $\mathrm{rad}(G)$, $\mathrm{corad}(G)$ et $\mathrm{der}(G)$. Les groupes $\mathrm{rad}(G)$ et $\mathrm{corad}(G)$ sont des tores, qui sont triviaux lorsque G est déployé; de plus, il existe une isogénie $\mathrm{rad}(G) \longrightarrow \mathrm{corad}(G)$. Le S-groupe $\mathrm{der}(G)$ est semi-simple, on a $G/\mathrm{der}(G) = \mathrm{corad}(G)$; il s'ensuit que pour tout fibré principal homogène P sous G, $P/\mathrm{der}(G)$ est un fibré principal homogène sous $\mathrm{corad}(G)$. Ceci dit, on a :

Théorème 4.1.5. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif de type constant.

(i) Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) G est localement (resp. semi-localement) isotrivial.

(b) Le tore rad(G) l'est.

(b') Le tore corad(G) l'est.

(c) Le revêtement galoisien de S associé à G (3.11) l'est.

Si T est un tore maximal de G , ces conditions sont également équivalentes à

(d) Le tore T est localement (resp. semi-localement) isotrivial

(ii) Soit P un fibré principal homogène sous G ; pour que P soit localement (resp. semi-localement) isotrivial, il faut et il suffit que le corad(G)-fibré principal P/der(G) le soit .

Corollaire 4.1.6. Les conditions de (i) sont vérifiées lorsque G est semi-simple ou lorsque S est localement noethérien et normal (ou plus généralement géométriquement unibranche). Les conditions de (ii) sont vérifiées lorsque G est localement (resp. semi-localement) isotrivial.

Pour (i) , la première assertion est triviale sur (b) , la seconde résulte de c) et Exp. X , 5.14 et 5.15 Pour (ii) , il suffit de remarquer qu'en vertu du théorème 90 , un fibré principal sous un tore trivial est semi-localement isotrivial.

4.2. Démonstration : le cas semi-simple .

Démontrons d'abord, en vue d'une référence ultérieure:

Proposition 4.2.1. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, T un tore maximal de G (resp. B un groupe de Borel, resp. $B \supset T$ un couple de Killing de G), P un fibré principal homogène sous G ; G' la forme tordue de G associée à P (via le morphisme $\mathrm{int} : G \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{S\text{-gr}}(G)$) . On a un isomorphisme canonique

$$P/\underline{\mathrm{Norm}}_G(T) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Tor}}(G')$$

$$\text{(resp. } P/B \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Bor}}(G') \text{ ,}$$

$$\text{resp. } P/T \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Kil}}(G') \text{) .}$$

Par construction, G' est le quotient de $P \times_S G$ par une certaine opération de G ($(p,g')\, g = (pg, g^{-1}g'g)$); on a donc un morphisme $P \times_S G \longrightarrow G'$, c'est-à-dire un morphisme

$$P \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_S(G,G') \text{ ,}$$

qui, comme on le voit aussitôt, se factorise par un morphisme

$$f : P \longrightarrow \underline{\mathrm{Isom}}_{S\text{-gr}}(G,G') \text{ ,}$$

(pour vérifier cette assertion, on peut supposer $G = P$, auquel cas on a $G' = G$, $f = \mathrm{int}$). L'application ensembliste $p \longmapsto f(p)(T)$ définit un morphisme

$$P \longrightarrow \underline{\mathrm{Tor}}(G') \text{ .}$$

Pour vérifier que ce morphisme induit un isomorphisme $P/\underline{\mathrm{Norm}}_G(T) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Tor}}(G')$ comme annoncé, on peut de nouveau supposer $P = G$ auquel cas on est ramené à Exp. XXII, 5.8.3 (iii) (En fait, loc. cit. devrait être remplacé par l'énoncé ci-dessus). On raisonne de même pour Bor et Kil .

Proposition 4.2.2. Soient S un schéma semi-local, G un S-groupe semi-simple de type constant.

(i) G est isotrivial.

(ii) Tout fibré principal sous G est isotrivial.

Prouvons (i). Quitte à faire une extension étale finie surjective de la base, on peut, par 3.9.2 supposer G quasi-déployé. Mais alors G est isotrivial par construction (3.10 , le groupe E est fini). Pour prouver (ii) , on peut, en vertu de (i), supposer G déployé; on est alors ramené à :

Lemme 4.2.3. Soit S un schéma semi-local. Tout fibré principal sous un groupe réductif déployé est isotrivial.

En effet, avec les notations de 4.2.1 , où $B \supset T$ désigne le couple de Killing canonique de G déployé, le S-préschéma Kil(G') possède une section, après extension étale finie surjective de la base, en vertu de 3.9.2. On peut donc réduire le groupe structural de G à T , or T est trivial , donc $H^1(S,T) = 0$ (théorème 90) .

Corollaire 4.2.4. Soient S un préschéma et

$$e \longrightarrow G \longrightarrow G' \longrightarrow G'' \longrightarrow e$$

une suite exacte de S-préschémas en groupes (pour (fpqc)), G étant semi-simple de type constant. Soit P un fibré principal homogène sous G' , supposons le fibré associé P/G représentable (par exemple G" affine sur S). Pour que P soit localement isotrivial (resp. semi-localement isotrivial), il faut et il suffit que P/G le soit (comme fibré sous G').

Si P est trivial , P/G l'est aussi, ce qui montre que la

condition est nécessaire. Réciproquement, supposons S local (resp. semi-local) et P/G isotrivial, donc trivialisé par une extension S' de S étale finie et surjective. Etendant la base à S' , on peut réduire le groupe structural de $P_{S'}$ à $G_{S'}$. Mais S' est encore semi-local et $G_{S'}$ semi-simple de type constant, donc le fibré obtenu est isotrivial (4.2.2).

4.3. Démonstration : cas général.

Remarquons d'abord que 4.1.5 (ii) résulte aussitôt de l'application de 4.2.4 à la suite exacte

$$e \longrightarrow der(G) \longrightarrow G \longrightarrow corad(G) \longrightarrow e .$$

Démontrons donc (i) . Si G est déployé , rad(G) et corad(G) sont triviaux, ainsi que rev(G); on a donc (a) $\Longrightarrow$ (b),(b'),(c) .

4.3.1. On a (c) $\Longrightarrow$ (a) . Soit $\mathcal{R}$ le type de G ; on a une suite exacte

$$e \longrightarrow ad(\underline{\underline{Ep}}_S(\mathcal{R})) \longrightarrow \underline{\underline{A}}_S(\mathcal{R}) \longrightarrow E_S \longrightarrow e .$$

Appliquant 4.2.4. au fibré $P = \underline{\underline{Isom}}_{S\text{-}gr}(\underline{\underline{Ep}}_S(\mathcal{R}))$ et au fibré associé $rev(G) = P/ad(\underline{\underline{Ep}}_S(G))$, on a (c) $\Longrightarrow$ (a) .

4.3.2. On a (b) $\Longrightarrow$ (a) . Il nous suffit de prouver que si rad(G) est trivial , G est semi-localement isotrivial. Or soit $G_o = \underline{\underline{Ep}}_S(\mathcal{R})$; considérons la catégorie des couples (G',f) où G' est une forme de G_o et f un isomorphisme de $rad(G_o)$ sur rad(G) .

On sait (2.16.) que cette catégorie est équivalente à la catégorie des fibrés principaux homogènes sous un certain S-groupe H extension d'un groupe constant tordu fini par un groupe semi-simple. Il nous suffit de prouver que tout fibré principal sous H est semi-localement isotrivial, or cela résulte aussitôt de 4.2.4.

4.3.3. On a (b') $\Rightarrow$(a) . On peut raisonner comme précédemment (ce sera d'ailleurs le même groupe H qui s'introduira). On peut aussi voir que (b) et (b') sont équivalentes; un tore isogène à un tore localement trivial est également localement trivial (cf. Exp. IX, 2.11 (iii)).

4.3.4. On a (d) $\Rightarrow$(a) . Il suffit de prouver qu'un groupe de type constant possédant un tore maximal trivial est semi-localement isotrivial; or cela résulte aussitôt de 2.14.

4.3.5. On a (a) $\Rightarrow$(d) . Il suffit de prouver qu'un tore maximal d'un groupe déployé est semi-localement isotrivial. Or on a plus précisément :

Lemme 4.3.6. Soient S un schéma semi-local , G un S-groupe réductif, T_o un tore maximal trivial de G , $W_o = \underline{Norm}_G(T_o)/T_o$ (c'est un S-groupe localement constant, et constant si G est de type constant , par 2.14), T un tore maximal de G . Il existe un morphisme $S' \longrightarrow S$ qui est principal homogène sous W_o (donc étale fini et surjectif - et même principal galoisien si G est de type constant) , tel que $T_{S'}$ soit conjugué à $T_{oS'}$ par un élément de $G(S')$ (et donc en particulier trivial).

En effet, on sait que $\underline{\mathrm{Transp}}_G(T_o,T)$ est un fibré principal homogène sous $\underline{\mathrm{Norm}}_G(T_o)$ (cf. par exemple Exp. XI, 5.4 bis). Posons $S' = \underline{\mathrm{Transp}}_G(T_o,T)/T_o$; c'est un fibré principal homogène sous W_o. Etendant la base de S à S', on peut réduire le groupe structural de $\underline{\mathrm{Transp}}_G(T_o,T)$ à T_o. Or S' est semi-local et T_o trivial, donc $\underline{\mathrm{Transp}}_G(T_o,T)$ possède une section sur S', cqfd.

4.4. Utilisation de l'existence de tores maximaux.

En utilisant le théorème d'existence de tores maximaux de Grothendieck (Exp. XIV, 3.20), on peut préciser considérablement les résultats précédents. Enonçons tout de suite :

Théorème 4.4.1. Soient S un schéma semi-local, $\mathcal{R}$ une donnée radicielle réduite épinglée, W son groupe de Weyl, E le groupe de ses automorphismes (On rappelle que E opère naturellement sur W et que le produit semi-direct A = W . E s'identifie au groupe des automorphismes de $\mathcal{R}$ non épinglée, cf. Exp. XXI, 6.7.2).

(i) Tout fibré principal homogène sous $\underline{\underline{\mathrm{Ep}}}_S(\mathcal{R})$ est trivialisé par un revêtement principal galoisien $S' \longrightarrow S$ de groupe W .

(ii) Soit G un S-groupe réductif de type $\mathcal{R}$; soit $\mathrm{rev}(G) = \underline{\mathrm{Isomext}}(\underline{\underline{\mathrm{Ep}}}_S(\mathcal{R}),G)$ le revêtement galoisien de S de groupe E associé. Soit W_o la forme de W_S associée à rev(G) . Il existe un morphisme $S' \longrightarrow S$, qui est un fibré principal homogène sous W_o , tel que $G_{S'}$ soit quasi-déployable (i.e. possède un groupe de Borel).

(iii) Tout S-groupe réductif de type $\mathcal{R}$ est déployé par un revêtement principal galoisien $\overline{S} \longrightarrow S$ de groupe A .

Enonçons d'abord :

Proposition 4.4.2. Soient S un préschéma , G un S-groupe réductif, T un tore maximal de G , P un fibré principal homogène sous G , G' la forme tordue de G associée à P (on a alors, 4.2.1 , un isomorphisme canonique $P/\underline{Norm}_G(T) \xrightarrow{\sim} \underline{Tor}(G')$) . Soit T' un tore maximal de G' définissant un morphisme composé

$$S \longrightarrow \underline{Tor}(G') \xrightarrow{\sim} P/\underline{Norm}_G(T) \quad .$$

Considérons les morphismes canoniques

$$P \longrightarrow P/T \longrightarrow P/\underline{Norm}_G(T)$$

et prenons-en les images réciproques par le morphisme précédent

$$\begin{array}{ccccc} P & \longrightarrow & P/T & \longrightarrow & P/\underline{Norm}_G(T) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ H & \longrightarrow & S' & \longrightarrow & S \quad . \end{array}$$

Alors S' (resp. H) est un fibré principal homogène au-dessus de S (resp. S') sous $W_G(T)$ (resp. $T_{S'}$) . De plus, si on fait opérer $W_G(T)$ sur T de la manière évidente, le fibré associé à S' est isomorphe à T' .

Les deux premières assertions sont triviales, la dernière se prouve comme l'assertion correspondante de 2.6.

Corollaire 4.4.3. Soient S un schéma semi-local, G un S-groupe réductif, T un tore maximal de G . Supposons l'une des deux conditions

suivantes satisfaites :

(i) T est trivial.

(ii) T est contenu dans un groupe de Borel de G , et G est soit adjoint, soit simplement connexe.

Soit en outre P un fibré principal homogène sous G . Il existe un S-préschéma S', qui est un fibré principal homogène sous $W_G(T)$, tel que $P_{S'}$ soit trivial.

En effet, si G' est la forme de G associée à P , G' possède un tore maximal T' (Exp. XIV, 3.20). Reprenant les notations de la proposition précédente, on voit que $H^1(S',T_{S'}) = 0$ (en vertu du théorème 90 pour (i) , de 3.14 pour (ii)). Le morphisme $H \longrightarrow S'$ possède une section, donc $P_{S'}$ possède aussi une section sur S' , cqfd.

Démontrons maintenant le théorème. L'assertion (i) est un cas particulier du corollaire précédent (prendre $G = \underline{\underline{Ep}}_S(\mathcal{R})$, muni de son tore trivial canonique). Prouvons (ii) . On sait (3.12), que G est une forme tordue intérieure de

$$G_o = \underline{\underline{Q.Ep}}_{rev(G)/S}(\mathcal{R}) .$$

Si T_o est le tore maximal canonique de G_o , $W_{G_o}(T_o)$ est bien le groupe W_o décrit dans l'énoncé. La forme G de G_o correspond à un fibré principal homogène P sous $ad(G_o)$ ($P = \underline{Isomint}(G_o,G)$).
Le groupe $W_{ad(G_o)}(T_o^{ad})$ est canoniquement isomorphe à W_o , et on obtient le résultat voulu en appliquant 4.4.3 à la situation $(ad(G_o),T_o^{ad}, P)$, l'hypothèse (ii) de 4.4.3 étant bien vérifiée. Démontrons enfin (iii).

Reprenons les notations de (ii) ; on a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \overset{\mathrm{rev}(G)}{\downarrow} & \\ E_S & & \\ & S \xleftarrow[W_o]{} S' & . \end{array}$$

On sait que $G_{S'}$ est isomorphe à $G_{oS'}$ et que $G_{o\ \mathrm{rev}(G)}$ est déployable. Si on pose $\overline{S} = S' x_S \mathrm{rev}(G)$, $G_{\overline{S}}$ est bien déployable, et il ne reste plus qu'à vérifier que $\overline{S}$ est bien un revêtement principal galoisien de S de groupe A , ce qui résulte du lemme plus général suivant (naturellement valable dans tout site) :

Lemme 4.4.4. Soient S un préschéma , G et H deux S-préschémas en groupes , $G \longrightarrow \mathrm{Aut}_{S\text{-}gr}(H)$ une opération de G sur H , E un G-fibré principal homogène, F un H_o-fibré principal homogène, où H_o est la forme de H associée à E . Alors $E x_S F$ est muni naturellement d'une structure de fibré principal homogène sous le produit semi-direct $H . G$.

Notons $(e,g) \longmapsto eg$ (resp. $(f,u) \longmapsto fu$) l'opération (à droite) de G sur E (resp. de H_o sur F). Notons

$$p : E x_S H \longrightarrow H_o$$

la projection canonique (H_o est par définition le quotient de $E x_S H$ par G y opérant suivant la formule $(e,h)\, g = (eg, g^{-1}hg)$).
Considérons le morphisme

$$r : E x_S F x_S H x_S G \longrightarrow E x_S F$$

défini ensemblistement par

$$r(e,f,h,g) = (eg,\ f\ p(e,h)) .$$

Le morphisme r définit bien une opération du produit semi-direct $H \cdot G$ sur $E \times_S F$. En effet, on a ensemblistement

$$r(r(e,f,h,g)h',g') = (egg',\ f\ p(e,h)\ p(eg,h'))\ ;$$

Mais

$$p(e,h)\ p(eg,h') = p(e,h)\ p(e,gh'g^{-1}) = p(e,h\ g\ h'\ g^{-1})\ ,$$

d'où

$$r(r(e,f,h,g),h',g') = r(e,f,h\ gh'\ g^{-1},gg')\ ,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Pour prouver maintenant que cette loi est bien une loi de fibré principal homogène, on peut supposer que E et F sont triviaux, auquel cas on voit aussitôt que $E \times_S F$ est également un fibré trivial.

5. Décomposition canonique d'un groupe adjoint ou simplement connexe.

Dans ce n°, nous allons utiliser les résultats du n° 1 pour généraliser au cas des préschémas une décomposition classique des groupes adjoints (resp. simplement connexe). Pour ne pas surcharger indéfiniment la rédaction, les démonstrations sont esquissées et le détail en est laissé au lecteur; en fait il s'agit toujours de démonstrations absolument standard de théorie des fibrés principaux : réduction du groupe structural, torsion,... .

5.1. Rappelons (Exp. XXI, 7.4) qu'un diagramme de Dynkin est réunion disjointe de ses composantes connexes, qui sont des diagrammes de Dynkin.

De plus, tout diagramme de Dynkin connexe non vide correspondant à une donnée radicielle est isomorphe à l'un des diagrammes type $(A_n, B_n, \ldots, G_2)$ qui ont été exhibés en Exp. XXI, 7.4.6. . Dans la suite, nous ne nous intéresserons qu'à des diagrammes de Dynkin dont les composantes connexes sont de l'un des types précédents. Soit $\underline{\underline{T}}$ l'ensemble de ces diagrammes-type. Pour tout diagramme de Dynkin D, soit $n(t)$ le nombre de composantes connexes de D isomorphes à t, où $t \in \underline{\underline{T}}$. Le type de D est par définition $\sum_{t \in \underline{\underline{T}}} n(t)\, t$.

Un diagramme de Dynkin de type t est dit <u>simple</u> de type t, un diagramme de Dynkin de type $n\,t$ est dit <u>isotypique</u> de type t.

Soit D_o l'ensemble des composantes connexes de D et soit

$$a : D_o \longrightarrow \underline{\underline{T}}$$

l'application évidente. Le type de D n'est autre que $\sum_{x \in D_o} a(x)$.

5.2. Soient S un préschéma, D un S-<u>schéma de Dynkin</u> (vérifiant la condition restrictive énoncée ci-dessus). Le conoyau du couple de morphismes $R \rightrightarrows D$ (R = schéma des liaisons de D) est noté D_o. C'est le "schéma des composantes connexes" de D (il existe trivialement lorsque D est constant; le cas général s'en déduit par descente; c'est un S-schéma constant tordu fini). On a un morphisme canonique

$$a : D_o \longrightarrow \underline{\underline{T}}_S \ ;$$

Pour $t \in \underline{\underline{T}}$, posons $a^{-1}(t) = D_{o,t}$; c'est un sous-schéma de D_o, dont l'image réciproque dans D, notée D_t, est la <u>composante isotypique</u> de type t du schéma de Dynkin D. Chaque D_t est un sous-schéma de D,

et on a

$$D = \coprod_{t \in \underline{\underline{T}}} D_t .$$

Remarquons que le degré de $D_{o,t}$ en $s \in S$ est $n(s,t)$, si le type de D en s est $\sum n(s,t)t$.

5.3. Dans la suite, nous ne considérerons que des groupes semi-simples adjoints (resp. simplement connexes). Pour simplifier le langage, nous énoncerons les résultats pour des groupes adjoints ; tous les énoncés resteront valables si on y substitue partout simplement connexe à adjoint.

Rappelons qu'une donnée radicielle réduite adjointe est déterminée à isomorphisme près par le type de ses diagrammes de Dynkin. On dira donc qu'une donnée radicielle adjointe $\mathcal{R}$ (resp. un groupe semi-simple adjoint G) est de type $\sum n(t)\, t$ si ses diagrammes de Dynkin le sont (resp. si son type est donné par une donnée radicielle adjointe de type $\sum n(t)\, t$). On dira que $\mathcal{R}$ ou G est simple de type t (resp. isotypique de type t), si son type est t (resp. $n\,t$, $n \geqslant 0$).

Si G est un groupe semi-simple adjoint, on utilisera les symboles $\underline{Dyn}_o(G)$ et $\underline{Dyn}_{o,t}(G)$ dans le sens défini en 5.2.

5.4. Soient t_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, des éléments distincts de $\underline{\underline{T}}$, et soit $\mathcal{R}_i$ une donnée radicielle adjointe épinglée isotypique de type t_i. Considérons le produit $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \times \ldots \times \mathcal{R}_n$ (Exp. XXI, 6.4.1). Soit S un préschéma tel que les différents $\underline{\underline{Ep}}_S(\mathcal{R}_i)$ existent. On vérifie aussitôt qu'il existe un isomorphisme canonique

$$(*) \qquad \underline{\underline{Ep}}_S(\mathcal{R}) = \underline{\underline{Ep}}_S(\mathcal{R}_1) \times_S \ldots \times_S \underline{\underline{Ep}}_S(\mathcal{R}_n) .$$

De plus, si E_i désigne le groupe des automorphismes de $\mathcal{R}_i$, E le groupe des automorphismes de $\mathcal{R}$, D_i (resp. D) le diagramme de Dynkin de $\mathcal{R}_i$ (resp. $\mathcal{R}$), on a des isomorphismes :

$$D = \coprod D_i \quad , \quad E = \prod E_i \quad ,$$

$$E \simeq \mathrm{Aut}(D) \quad , \quad E_i \simeq \mathrm{Aut}(D_i) \quad .$$

Combinant avec (*) et 1.4., on voit que (*) induit un isomorphisme

$$\underline{A}_S(\mathcal{R}) \simeq \underline{A}_S(\mathcal{R}_1) \times_S \cdots \times_S \underline{A}_S(\mathcal{R}_n) \ .$$

Proposition 5.5. Soient S un préschéma, G un S-groupe semi-simple adjoint. Il existe une décomposition unique

$$G \simeq \prod_{t \in \underline{T}} G_t \ ,$$

où G_t est un S-groupe semi-simple adjoint isotypique de type t. De plus, la décomposition précédente induit des isomorphismes

$$\underline{\mathrm{Dyn}}_t(G) \simeq \underline{\mathrm{Dyn}}(G_t)$$

$$\underline{\mathrm{Aut}}_{S\text{-gr}}(G) \simeq \prod_{t \in \underline{T}} \underline{\mathrm{Aut}}_{S\text{-gr}}(G_t) \ .$$

Cela a en effet été démontré ci-dessus lorsque G est déployé. Dans le cas général, on peut supposer G de type constant $\mathcal{R}$. Utilisant la décomposition précédente de $\underline{A}_S(\mathcal{R})$ et 1.17, on en déduit la décomposition voulue de G. Les autres résultats se prouvent alors par descente.

Remarque 5.6. Plus généralement, si G et H sont deux groupes semi-simples adjoints, on a comme suit des isomorphismes canoniques (le diagramme est commutatif) :

$$\begin{array}{ccc}
\underline{\mathrm{Isom}}_{S\text{-}gr}(G,H) & \xrightarrow{\sim} & \prod_{t \in \underline{T}} \underline{\mathrm{Isom}}_{S\text{-}gr}(G_t,H_t) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\underline{\mathrm{Isomext}}(G,H) & \xrightarrow{\sim} & \prod_{t \in \underline{T}} \underline{\mathrm{Isomext}}\,(G_t,H_t) \\
\downarrow\wr & & \downarrow\wr \\
\underline{\mathrm{Isom}}_{Dyn}(\underline{Dyn}(G),\underline{Dyn}(H)) & \xrightarrow{\sim} & \prod_{t \in \underline{T}} \underline{\mathrm{Isom}}_{Dyn}(\underline{Dyn}(G_t),\underline{Dyn}(H_t))
\end{array} .$$

Remarque 5.7. On peut donner une caractérisation intrinsèque de G_t, que nous énonçons ci-après sans démonstration : c'est le plus grand sous-groupe réductif de G invariant (et d'ailleurs caractéristique) et isotypique de type t.

La proposition précédente permet de ramener l'étude des groupes semi-simples adjoints à celle des groupes semi-simples adjoints isotypiques. C'est cette étude que nous allons faire ci-dessous.

5.8. Soient $\mathcal{R}$ une donnée radicielle réduite épinglée adjointe simple de type t, I un ensemble fini non vide, $\mathcal{R}^I$ la donnée radicielle produit de copies $\mathcal{R}_i$ de $\mathcal{R}$, pour $i \in I$. Notons E le groupe des automorphismes de $\mathcal{R}$, qui s'identifie au groupe des automorphismes du diagramme de Dynkin D de $\mathcal{R}$. Le diagramme de Dynkin de $\mathcal{R}^I$ s'identifie à D^I, ce qui montre que l'on a une suite exacte :

$$e \longrightarrow \mathrm{Aut}(D)^I \longrightarrow \mathrm{Aut}(D^I) \longrightarrow \mathrm{Aut}(I) \longrightarrow e ,$$

où $\mathrm{Aut}(I)$ désigne le groupe des permutations de I. Il s'ensuit que l'isomorphisme canonique

$$\underline{\underline{\mathrm{Ep}}}_S(\mathcal{R})^I \simeq \underline{\underline{\mathrm{Ep}}}_S(\mathcal{R}^I)$$

induit une suite exacte

$$e \longrightarrow \underline{\underline{A}}_S(\mathcal{R})^I \longrightarrow \underline{\underline{A}}_S(\mathcal{R}^I) \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}(I_S) \longrightarrow e ,$$

le dernier groupe étant le S-groupe constant associé à $\mathrm{Aut}(I)$. Remarquons d'autre part que I s'identifie canoniquement à l'ensemble des composantes connexes de D^I. Si G est un S-groupe semi-simple de type $\mathcal{R}^I$, définissant (1.17) un fibré principal homogène P sous $\underline{\underline{A}}_S(\mathcal{R}^I)$, la définition de $\underline{\mathrm{Dyn}}(G)$ par descente (3.7), et celle de $\underline{\mathrm{Dyn}}_o(G)$ (5.2), montre que le fibré associé à P par le morphisme $A_S(\mathcal{R}^I) \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}(I_S)$ n'est autre que $\underline{\mathrm{Isom}}_S(I_S, \underline{\mathrm{Dyn}}_o(G))$, correspondant à la forme $\underline{\mathrm{Dyn}}_o(G)$ de I_S. Utilisant à nouveau l'équivalence de catégories 1.17 et la suite exacte précédente, on en déduit par un raisonnement formel qu'il existe un $\underline{\mathrm{Dyn}}_o(G)$-groupe réductif de type $\mathcal{R}$, soit G_o, et un S-isomorphisme $G \simeq \prod_{\underline{\mathrm{Dyn}}_o(G)/S} G_o$.

<u>Proposition</u> 5.9. <u>Soient</u> S <u>un préschéma</u>, G <u>un</u> S-<u>groupe semi-simple adjoint</u> isotypique <u>de type</u> t. <u>Il existe un</u> $\underline{\mathrm{Dyn}}_o(G)$-<u>groupe semi-simple adjoint</u> simple <u>de type</u> t, <u>et un</u> S-<u>isomorphisme</u> (uniques)

$$G \simeq \prod_{\underline{\mathrm{Dyn}}_o(G)/S} G_o .$$

<u>De plus, cet isomorphisme induit une suite exacte</u>

$$e \longrightarrow \prod_{\underline{\mathrm{Dyn}}_o(G)/S} \underline{\mathrm{Aut}}_{gr}(G_o) \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{S\text{-}gr}(G) \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_S(\underline{\mathrm{Dyn}}_o(G)) \longrightarrow e .$$

On peut évidemment supposer G de type constant n t . La première assertion a déjà été démontrée (l'assertion d'unicité est évidente). La seconde se déduit alors du cas déployé par descente.

On peut regrouper 5.5 et 5.9 :

Proposition 5.10. Soient S un préschéma , G un S-groupe semi-simple adjoint, D = Dyn(G) son schéma de Dynkin.

(i) Il existe une décomposition canonique.

$$G \simeq \prod_{t \in \underline{T}} \prod_{D_{o,t}/S} G_{o,t} \simeq \prod_{\underline{Dyn}_o(G)/S} G_o ,$$

où chaque $G_{o,t}$ est un $\underline{Dyn}_{o,t}(G)$-groupe simple adjoint de type t (resp. où G_o est un $\underline{Dyn}_o(G)$-groupe semi-simple adjoint dont le type en $x \in \underline{Dyn}_o(G)$ est $a(x) \in \underline{T}$ (le morphisme $a : \underline{Dyn}_o(G) \longrightarrow \underline{T}_S$ a été défini en 5.2)).

(ii) Les décompositions précédentes induisent des suites exactes isomorphes (notées verticalement).

$$\begin{array}{ccccc}
 & e & & e & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
\prod_{t \in \underline{T}} & \prod_{D_{o,t}/S} \underline{Aut}_{gr}(G_{o,t}) & \xrightarrow{\sim} & \prod_{\underline{Dyn}_o(G)/S} & \underline{Aut}_{gr}(G_o) \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 & \underline{Aut}_{S\text{-}gr}(G) & \longrightarrow & \underline{Aut}_{S\text{-}gr}(G) & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
\prod_{t \in \underline{T}} & \underline{Aut}_S(\underline{Dyn}_{o,t}(G)) & \xrightarrow{\sim} & \underline{Aut}_{S,a}(\underline{Dyn}_o(G)) & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 & e & & e & ,
\end{array}$$

où $\underline{Aut}_{S,a}(D_o)$ dénote le schéma des automorphismes de $\underline{Dyn}_o(G)$ qui commutent au morphisme $a : \underline{Dyn}_o(G) \longrightarrow \underline{T}_S$.

Corollaire 5.11. Sous les conditions précédentes, les trois catégories suivantes sont équivalentes :

(i) la catégorie des fibrés principaux homogènes sous G .

(ii) la catégorie des fibrés principaux homogènes sous G_o .

(iii) la catégorie produit, pour $t \in \underline{T}$, des catégories des fibrés principaux homogènes sous les $G_{o,t}$.

Cela se déduit formellement des décompositions précédentes et de 8.4.

Corollaire 5.12. On a des isomorphismes canoniques

$$\underline{Tor}(G) \simeq \prod_{t \in \underline{T}} \prod_{D_{o,t}/S} \underline{Tor}(G_{o,t}) \simeq \prod_{\underline{Dyn}_o(G)/S} \underline{Tor}(G_o) ,$$

et de même en remplaçant Tor par Bor (resp. Kil).

Trivial à partir du cas déployé.

Remarque 5.13. Le morphisme canonique

$$\underline{Dyn}(G) \longrightarrow \underline{Dyn}_o(G)$$

permet de considérer $\underline{Dyn}(G)$ comme un $\underline{Dyn}_o(G)$-schéma de Dynkin ; en fait c'est le schéma de Dynkin $\underline{Dyn}(G_o)$ de G_o .
De même si $T \subset B$ est un couple de Killing de G , correspondant canoniquement au couple de Killing $T_o \subset B_o$ de G_o , on vérifie que les obstructions au quasi-déploiement de G et G_o qui se trouvent (3.9) dans $\mathrm{Pic}(\underline{Dyn}(G)) = \mathrm{Pic}(\underline{Dyn}(G_o))$ coïncident. On en déduit :

Corollaire 5.14. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) G est quasi-déployable,

(ii) G_o est quasi-déployable,

(iii) chaque $G_{o,t}$, $t \in \underline{T}$, est quasi-déployable.

6. Automorphismes des groupes de Borel des groupes réductifs.

Lemme 6.1. Soient S un préschéma, (G,T,M,R) un S-groupe déployé , R_o un système de racines simples de R , B le groupe de Borel correspondant. Alors B^u est engendré comme faisceau (fppf) en groupes par les P_r , $r \in R_o$.

Soit H le sous-faisceau en groupes de B^u engendré par les P_r , $r \in R_o$. Prouvons $H \supset P_r$ par récurrence sur l'entier > 0 , $\mathrm{ord}_{R_o}(r)$ (Exp. XXI , 3.2.15). L'assertion est vérifiée par hypothèse pour $\mathrm{ord}(r) = 1$. Supposons donc $\mathrm{ord}(r) > 1$ et $P_s \subset H$ dès que $\mathrm{ord}(r) > \mathrm{ord}(s)$. Il existe $r_1 \in R_o$ tel que $r - r_1 \in R_+$ (Exp. XXI , 3.1.1). Soit p le plus grand entier tel que $r - pr_1 = r_2 \in R_+$. On a $P_{r_1}, P_{r_2} \subset H$, $r_2 - r_1 \notin R$. On est donc ramené à prouver :

Lemme 6.2. Reprenons les notations de Exp. XXIII , 6.4. Supposons $p = 1$, c'est-à-dire $s - r$ non racine. Si H est un sous-faisceau en groupes de B^u tel que $P_r, P_s \subset H$, alors $P_{ir+js} \subset H$ chaque fois que $ir+js \in R$, $i > 0$, $j > 0$.

Distinguons quatre cas suivant la valeur de $q = 0,1,2,3$. Dans la suite x et y désignent deux sections arbitraires de $\underline{G}_{a\,S'}$, $S' \to S$.

Si $q = 0$, il n'y a rien à démontrer.

Si $q = 1$, on a $p_{r+s}(\pm x) = p_s(-1)p_r(-x)p_s(1)p_r(x) \in H(S')$,

donc $P_{r+s} \subset H$.

Si $q = 2$, on a de même

$$p_{r+s}(\pm xy)\ p_{2r+s}(\pm x^2y) = p_s(-y)\ p_r(-x)\ p_s(y)\ p_r(x) \in H(S') ,$$

d'où, quitte à changer certains signes

$$F(x,y) = p_{r+s}(xy)\ p_{2r+s}(x^2y) \in H(S') .$$

Or on a aussitôt $F(x,1)\ F(-1,x) = p_{2r+s}(x^2-x)$. Si $a \in \underline{G}_a(S)$, l'équation $X^2 - X = a$ définit une extension libre et surjective de S (c'est $\underline{\mathrm{Spec}}\ \underline{O}_S\ [X] / (X^2 - X - a)$) ; on a donc $p_{2r+s}(a) \in H(S')$) donc $P_{2r+s} \subset H$, donc aussi $P_{r+s} \subset H$ (car $F(1,a) \in H(S')$) .

Si $q = 3$, on a de même

$$F(x,y) = p_{r+s}(xy)\ p_{2r+s}(x^2y)\ p_{3r+s}(x^3y)\ p_{3r+2s}(x^3y^2) \in H(S') ;$$

mais

$$p_{3r+2s}(\pm x) = F(1,1)^{-1}\ p_s(-x)\ F(1,1)\ p_s(x) \in H(S') ,$$

donc aussi

$$K(x,y) = p_{r+s}(xy)\ p_{2r+s}(x^2y)\ p_{3r+s}(x^3y) \in H(S') .$$

On a donc déjà prouvé $P_{3r+2s} \subset H$. Calculant alors

$$K(x+y,1)\ K(-x,1)\ K(1,y)^{-1}$$

modulo P_{3r+2s} , on trouve

$$p_{2r+s}(2x^2 + y^2 + 2xy - y)\ \ p_{3r+s}(y^3 + 3xy^2 + 3x^2y - y) \in H(S').$$

Si $a \in \underline{G}_a\ (S)$, les "équations"

$$x^2 = -xy - y + 1 - a$$

$$y^2 = 3y - 2 + 3a$$

définissent une extension libre et surjective de S ; l'expression précédente donne alors $p_{3r+s}(a) \in H(S')$. On a donc prouvé

$$P_{3r+s}, P_{3r+2s} \subset H \ , \ p_{r+s}(xy)\, p_{2r+s}(xy^2) \in H(S') \ ,$$

et on est ramené au calcul précédent.

Remarque 6.2.1. La démonstration précédente montre qu'on aurait pu remplacer l'hypothèse " $H \supset P_r, P_s$ " par " $H \supset P_r$ ou P_s et H est invariant sous $\mathrm{int}(P_r)$ et $\mathrm{int}(P_s)$ ".

Théorème 6.3. *Soient S un préschéma, G et G' deux S-groupes semi-simples , B (resp. B') un sous-groupe de Borel de G (resp. G') . Tout isomorphisme $B \xrightarrow{\sim} B'$ est induit par un unique isomorphisme $G \xrightarrow{\sim} G'$.*

L'assertion est locale pour la topologie étale et on peut supposer G déployé : $G = (G,T,M,R)$, B étant défini par le système de racines positives R_+ de R . L'isomorphisme donné $u : B \xrightarrow{\sim} B'$ induit un isomorphisme de T sur un tore maximal T' de B' , donc de G' . L'isomorphisme donné $T \simeq D_S(M)$ donne un isomorphisme $T' \simeq D_S(M)$ dans lequel les éléments de R_+ deviennent les racines constantes de B' par rapport à T' , donc les éléments de R les racines constantes de G' par rapport à T' . Comme G et G' sont semi-simples, les coracines sont déterminées par dualité (Exp. XXI, 1.2.5) , ce qui prouve que (T',M,R) est un déploiement de G' tel que $\mathscr{R}(G) = \mathscr{R}(G')$.

Appliquant Exp. XXIII , 5.1 (Théorème d'unicité), on en déduit qu'il existe un unique isomorphisme $G \xrightarrow{\sim} G'$ coïncidant avec u sur T et les P_r , $r \in R_o$. Par 5.1 , la restriction de cet isomorphisme à B est u , cqfd.

Remarques 6.3.1. (i) Utilisant Exp. XXII, 4.1.9 et raisonnant comme dans loc. cit. 4.2.12 , on peut dans l'énoncé du théorème remplacer "isomorphisme" par "isogénie" (resp. isogénie centrale)".

(ii) Le théorème est faux pour les groupes réductifs. Prendre par exemple $G = G' = SL_2 \times \underline{G}_m$ identifié au groupe des matrices

$$\begin{pmatrix} a & b & o \\ c & d & o \\ o & o & h \end{pmatrix} \quad , \quad ad - bc = 1 \ , \ h \text{ inversible} \ ;$$

prendre pour $B = B'$ le groupe de Borel défini par $c = 0$ et pour u l'automorphisme de B : $u(a,b,d,h) = (a,b,d,ah)$.

Corollaire 6.4. Le foncteur $(G,B) \longmapsto B$ de la catégorie des couples : (S-groupes semi-simples, groupe de Borel) dans la catégorie des S-préschémas en groupes (les morphismes sont les isomorphismes) est pleinement fidèle.

Corollaire 6.5. Soient S un préschéma , G un S-groupe semi-simple, B un groupe de Borel de G , B' un S-groupe localement isomorphe à B pour (fpqc). Alors B' est localement isomorphe à B pour la topologie étale finie locale, et il existe un S-groupe semi-simple G' dont B' soit un groupe de Borel ; G' est unique à un unique isomorphisme près induisant l'identité sur B' .

Corollaire 6.6. Soient S un préschéma , G un S-groupe semi-simple, B un groupe de Borel de G . Alors $\underline{Aut}_{S\text{-}gr}(B)$ est représentable par un S-préschéma affine et lisse , $\underline{Autext}(B)$ est représentable par un S-préschéma étale et fini, et les morphismes évidents induisent un isomorphisme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} e & \longrightarrow & B_{ad} & \longrightarrow & \underline{Aut}_{S\text{-}gr}(G,B) & \longrightarrow & \underline{Autext}(G) & \longrightarrow & e \\ & & \wr\downarrow & & \wr\downarrow & & \downarrow\wr & & \\ e & \longrightarrow & B_{ad} & \longrightarrow & \underline{Aut}_{S\text{-}gr}(G) & \longrightarrow & \underline{Autext}(B) & \longrightarrow & e \ . \end{array}$$

Cela résulte aussitôt de 2.1 et des résultats précédents. On laisse au lecteur le soin de développer les analogues des résultats des N° 1,2,3,4 dans le cadre ci-dessus.

Remarque 6.7. Si S est un préschéma et B un S-groupe, B ne peut donc être groupe de Borel que d'un unique groupe semi-simple, bien déterminé par B . Il reste donc à caractériser les S-groupes B qui sont bien groupes de Borel de groupes semi-simples. La question ne semble pas comporter de réponse simple. Signalons par exemple qu'il existe des S-groupes lisses, affines, extension d'un tore trivial et de groupes additifs (définissant même un demi-système de racines), dont toutes les fibres sont des groupes de Borel de groupes semi-simples, mais qui ne sont pas groupe de Borel d'un groupe semi-simple. Par exemple, prenons le groupe de Borel canonique d'un groupe de type B_2 déployé sur le schéma des nombres duaux sur un corps k , et modifions la constante 2 de la seconde relation de commutation de Exp. XXIII, 3.3.1 (iii) en la

remplaçant par un scalaire différent, égal à 2 sur la fibre spéciale. La fibre spéciale du groupe obtenu sera bien un groupe de Borel d'un groupe semi-simple, mais le groupe lui-même n'en sera pas un. La traduction cohomologique de ce fait (cf. Exp. III, 3.10) est le suivant :

soient k un corps, G un k-groupe semi-simple de type B_2 , B un groupe de Borel de G ; alors $H^2(B,\underline{Lie}(B/k)) \neq 0$.

7. Représentabilité des foncteurs $\underline{Hom}_{S\text{-}gr}(G,H)$, G réductif .

7.1. Le cas déployé.

7.1.1. Soient S un préschéma, G un S-groupe épinglé, T son tore maximal , R_o l'ensemble des racines simples ,

$$u_r \in P_r^*(S) \quad , \quad w_r \in \underline{Norm}_G(T)(S) \quad , \quad r \in R_o \ ,$$

les éléments définis par l'épinglage.

Soit d'autre part H un S-préschéma en groupes; nous nous intéressons au foncteur $\underline{Hom}_{S\text{-}gr}(G,H)$, et plus précisément au morphisme

$$q : \underline{Hom}_{S\text{-}gr}(G,H) \longrightarrow \underline{Hom}_{S\text{-}gr}(T,H) \ .$$

Soit donc

$$f_T : T \longrightarrow H$$

un S-homomorphisme , considérons $q^{-1}(f_T) = \mathcal{F}$. C'est le foncteur défini par

$$\mathcal{F}(S') = \left\{ f \in \mathrm{Hom}_{S'\text{-}gr}(G_{S'},H_{S'}) \ , \ f = (f_T)_{S'} \text{ sur } T_{S'} \right\} .$$

On a un morphisme de S-foncteur

$$i : \mathcal{F} \longrightarrow H^{2n} ,$$

où $n = \mathrm{Card}(R_o)$, défini ensemblistement par $i(f) = (f(u_r), f(w_r))$.
En vertu de Exp. XXIII , 1.9 , i est d'ailleurs un monomorphisme .

Proposition 7.1.2. Si H est séparé sur S , $\mathcal{F}$ est représentable et i est une immersion fermée.

La technique habituelle de représentabilité relative nous montre qu'il suffit de prouver qu'étant données des sections

$$v_r , h_r \in H(S) , r \in R_o ,$$

les S-préschémas S' tels qu'il existe un S'-homomorphisme

$$f : G_{S'} \longrightarrow H_{S'}$$

prolongeant $(f_T)_{S'}$ et vérifiant $f(u_r) = v_r$, $f(w_r) = h_r$, sont exactement ceux qui se factorisent par un certain sous-préschéma fermé de S . On peut évidemment supposer S affine.

Pour simplifier la suite, disons qu'un morphisme $X \to Y$ de schémas affines vérifie la condition (L) si Y est le spectre d'une $\Gamma(X, \underline{O}_X)$-algèbre qui est un $\Gamma(X, \underline{O}_X)$-module libre. Il est clair que si on se restreint à la catégorie des schémas affines, un produit, ou un composé de morphismes vérifiant (L) vérifie (L) et que (L) est stable par extension de la base.

Lemme 7.1.3. Supposons S affine, et soit $r \in R_o$. Considérons le morphisme

$$a : T \times_S T \longrightarrow \underline{G}_a S$$

défini ensemblistement par $a(t,t') = r(t) + r(t')$.

(i) a est fidèlement plat et de présentation finie.

(ii) Soit R le carré fibré de a . Le morphisme structural $R \longrightarrow S$ vérifie (L) .

Il est d'abord clair que le morphisme a est surjectif , $r : T \longrightarrow \underline{G}_{m\,S}$ l'étant. Il est trivial que a est de présentation finie. Comme r vérifie (L) , il suffit, pour prouver (i) et (ii) de montrer que le morphisme

$$u : \underline{G}_{m\,S}^{2} \longrightarrow \underline{G}_{a\,S}$$

défini ensemblistement par $u(x,y) = x + y$ vérifie (L) . Autrement dit, il suffit de vérifier que pour tout anneau A , l'anneau $A\left[X,Y,X^{-1},Y^{-1}\right]$ est un module libre sur son sous-anneau $A\left[X+Y\right]$. Or les éléments $(XY)^p$, $(XY)^p X$, $p \in \underline{\mathbb{Z}}$ forment une base. En effet, il suffit de vérifier que pour tout $q \in \underline{\mathbb{Z}}$, et toute famille $\left\{ a_{ij} \in A \text{ , } i,j \in \underline{\mathbb{Z}} \right\}$, il existe des éléments $b_{n,p}$, $c_{n,p} \in A$ $\quad 0 \leqslant n \leqslant q$, $p \in \underline{\mathbb{Z}}$, uniques, tels que

$$\sum_{-q \leqslant i-j \leqslant q+1} a_{ij}\ X^i\ Y^j = \sum_{\substack{0 \leqslant n \leqslant q \\ p \in \underline{\mathbb{Z}}}} \left[b_{n,p}\ (X+Y)^n (XY)^p X + c_{n,p}\ (X+Y)^n (XY)^p \right]$$

Démontrons cette assertion par récurrence ascendante sur q . Elle est triviale pour $q \leqslant -1$; supposons $q \geqslant 0$ (et donc $q+1 > -q$) et supposons l'assertion vraie pour $q-1$. Prenant dans les deux membres les termes de la forme $X^a\ Y^b$ avec $a - b = q+1$, puis avec $a - b = -q$, on obtient immédiatement

$$a_{q+i+1,i} = b_{q,i} \quad , \quad a_{i,i+p} = c_{q,i} \quad .$$

Cela démontre d'abord que s'il y a une solution, alors les $b_{q,i}$ et $c_{q,i}$ sont déterminés par les relations précédentes. Soustrayant alors des deux membres $b_{q,i}\,(X+Y)^q(XY)^i\,X + c_{q,i}\,(X+Y)^q\,(XY)^i$, on est ramené aux assertions d'existence et d'unicité déjà prouvées par l'hypothèse de récurrence.

Lemme 7.1.4. Soit $r \in R_o$, et soit $b : T \times_S T \longrightarrow H$ le morphisme défini ensemblistement par

$$b(t,t') = (\mathrm{int}\ f_T(t)\ v_r)(\mathrm{int}\ f_T(t')\ v_r) \quad .$$

Soit $f_r : P_r \longrightarrow H$ un S-morphisme. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f_r est un morphisme de groupes; on a $f_r(u_r) = v_r$; on a

$$f_T(t)\ f_r(x)\ f_T(t)^{-1} = f_r(r(t)\ x)$$

pour tous $t \in T(S')$, $x \in P_r(S')$, $S' \longrightarrow S$.

(ii) On a $f_r(u_r) = v_r$ et la relation

$$f_r(\ a(t,t')\ u_r) = b(t,t')$$

pour tous $t,t' \in T(S')$, $S' \longrightarrow S$.

Si f_r vérifie (i), on a $f_r(r(t)\ u_r) = \mathrm{int}\ f_T(t)\ v_r$, ce qui entraîne aussitôt (ii). Réciproquement, supposons (ii) vérifiée et démontrons les différentes conditions de (i) ; prouvons d'abord la dernière. Comme a est couvrant pour (fpqc), il suffit de prouver que si $t,t',t'' \in T(S')$, on a

$$f_T(t)\ f_r(a(t',t'')\ u_r)\ f_T(t)^{-1} = f_r(\ r(t)\ a(t',t'')\ u_r)\ ;$$

or ceci s'écrit aussi

$$f_T(t)\ \ b(t',t'')\ \ f_T(t)^{-1} \ = \ b(tt',tt'')\ ,$$

propriété évidente sur la définition de b . Reste à prouver que f_r est un morphisme de groupes. Or la propriété précédente donne aussitôt

$$f_r(r(t)\ u_r)\ f_r\ (r(t')\ u_r) \ = \ \text{int}\ f_T(t)\ f_r(u_r)\ .\ \text{int}\ f_T(t')\ f_r\ (u_r)$$

$$= \ b(t,t') = f_r\ (r(t)\ u_r + r(t)\ v_r)\ .$$

On a donc $f_r(x+x') \ = \ f_r(x)\ f_r(x')$, chaque fois que x et x' sont des sections de l'ouvert P_r^* de P_r , qui est schématiquement dense; on conclut alors par Exp. XVIII, 1.4.

7.1.5. Fixons nous provisoirement un $r \in R_o$. Le morphisme a est fidèlement plat quasi-compact, donc $\underline{G}_a\ S$ s'identifie au quotient de $T\ x_S\ T$ par la relation d'équivalence R définie par a . Soit

$$i_1, i_2 \ : \ R \ \rightrightarrows \ T\ x_S\ T$$

cette relation d'équivalence.

Pour que le morphisme b se factorise par a , il faut et il suffit que $b \circ i_1 = b \circ i_2$; autrement dit, si on note K le noyau du couple de morphismes

$$b \circ i_1\ ,\ b \circ i_2 \ : R \ \rightrightarrows \ H\ ,$$

il faut et il suffit que $K = R$.

Or H est supposé séparé sur S , donc K est un sous-préschéma fermé de R . D'autre part, R est essentiellement libre (7.1.3) .

7.1.6. Si S' est un S-préschéma, pour qu'il existe sur S' un f_r vérifiant les conditions de (i) (et alors nécessairement unique), il faut et il suffit que $K_{S'} = R_{S'}$, et que le morphisme f_r obtenu vérifie $f_r(u_r) = v_r$.

La première condition est équivalente au fait que $S' \longrightarrow S$ se factorise par un certain sous-préschéma fermé de S (Exp. VIII, 6.4); si on remplace S par ce sous-préschéma fermé, la seconde condition définit à nouveau un sous-préschéma fermé de S (égalité de deux sections de H - or H est supposé séparé).

Quitte à remplacer S par ce sous-préschéma fermé, on peut donc supposer qu'il existe un morphisme $f_r : P_r \longrightarrow H$ vérifiant les conditions de 7.1.4 (i). Prenant l'intersection des sous-préschémas de S obtenus pour chaque $r \in R_o$, on peut supposer cette condition vérifiée pour tout $r \in R_o$.

7.1.7. De même, considérons pour chaque $r \in R_o$ les deux homomorphismes

$$T \longrightarrow H ,$$

$f_T \circ \mathrm{int}(w_r)$ et $\mathrm{int}(h_r) \circ f_T$. Comme H est séparé sur S et T essentiellement libre sur S, le même raisonnement que précédemment montre que, quitte à remplacer S par un sous-préschéma fermé, on peut supposer que pour tout $r \in R_o$ on a

$$f_T \circ \mathrm{int}(w_r) = \mathrm{int}(h_r) \circ f_T .$$

7.1.8. Utilisant maintenant le théorème de générateurs et relations (Exp. XXIII, 3.5), on voit qu'il existe un homomorphisme de groupes

$f : G \longrightarrow H$ vérifiant les conditions exigées si et seulement si un certain ensemble fini de relations algébriques

$$R_i((h_r),(v_r),(f_T(r^*(-1))) = e$$

(entre les sections h_r , v_r , $f_T(r^*(-1))$ ($r \in R_o$,) de H) est vérifié. Comme H est séparé sur S , cela définit encore un sous-préschéma fermé de S , et on a terminé.

Corollaire 7.1.9. Soient S un préschéma , G un S-groupe réductif déployé, T son tore maximal, H un S-préschéma en groupes séparé sur S . Soit d'autre part $\underline{P}$ une propriété de morphismes telle que

(i) Une immersion fermée vérifie $\underline{P}$.

(ii) Le composé de deux morphismes vérifiant $\underline{P}$ vérifie aussi $\underline{P}$.

(iii) $\underline{P}$ est stable par changement de base.

(iv) Le morphisme structural $H \longrightarrow S$ vérifie $\underline{P}$.

Alors le morphisme canonique

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-}gr}(G,H) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-}gr}(T,H)$$

est représentable par des morphismes séparés vérifiant $\underline{P}$.

En effet, on peut supposer G épinglé ; le morphisme structural $H^{2n} \longrightarrow S$ vérifie $\underline{P}$, et on conclut par 7.1.2.

Corollaire 7.1.10. Soient S un préschéma , G un S-groupe réductif déployé, H un S-préschéma en groupes lisse et quasi-séparé sur S à fibres affines. Alors le foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-}gr}(G,H)$ est représentable par un S-préschéma localement de présentation finie et séparé sur S .

En effet, comme H est lisse et quasi-séparé sur S, on peut considérer sa composante neutre H°, qui est séparée, de présentation finie et à fibres affines (Exp. VI). Comme G est à fibres connexes, on peut remplacer H par H°. Comme G et H sont alors de présentation finie, on peut supposer S noethérien, et on applique 7.1.9 en prenant pour $\underline{P}$ la propriété "de type fini". Mais, par Exp. XV, 8.9, on sait que $\underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-}gr}(T,H)$ est représentable par un S-préschéma séparé et localement de type fini.

Remarque 7.1.11. Si H est affine sur S, on peut remplacer la référence à Exp. XV par Exp. IX, 4.2.

7.2. Cas général.

Proposition 7.2.1. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, T un tore maximal de G. Soit d'autre part H un S-préschéma en groupes, tel que le morphisme structural $H \longrightarrow S$ vérifie la condition suivante :

(+) Chaque point $s \in S$ possède un voisinage ouvert U tel que le morphisme $H_U \longrightarrow U$ soit quasi-projectif.

Alors le morphisme canonique

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-}gr}(G,H) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-}gr}(T,H)$$

est représentable par des morphismes vérifiant (+).

Lorsque G est déployable relativement à T, on applique 7.1.9 en prenant pour $\underline{P}$ la propriété (+) ci-dessus. Lorsque G est localement

isotrivial, par exemple semi-simple (4.2.2) , on remarque que l'assertion du théorème est locale pour la topologie étale finie locale (en effet, la propriété d'être quasi-projectif est locale pour la topologie étale finie globale et assure l'effectivité de la descente pour cette topologie, SGA VIII, 7.7). Enfin, dans le cas général, on utilise le lemme suivant :

Lemme 7.2.2. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, T un tore maximal de G , G' le groupe dérivé de G (Exp. XXII, 6.2), $T' = T \cap G$ le tore maximal de G' correspondant à T (Exp. XXII, 6.2.8). Alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G & \longleftarrow & G' \\ \uparrow & & \uparrow \\ T & \longleftarrow & T' \end{array}$$

est une somme amalgamée dans la catégorie des S-faisceaux en groupes : pour tout S-faisceau en groupe H , le carré suivant est cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{S\text{-}gr}(G,H) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{S\text{-}gr}(T,H) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_{S\text{-}gr}(G',H) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{S\text{-}gr}(T',H) \end{array} .$$

En effet, si $\mathrm{rad}(G)$ est le radical de G , $\mathrm{rad}(G) \subset T$, donc $\mathrm{rad}(G) \cap G' = \mathrm{rad}(G) \cap T' = K$, et le produit dans G induit des isogénies (Exp. XXII, 6.2)

$$i : G' \times_S \mathrm{rad}(G) \longrightarrow G$$

$$j : T' \times_S \mathrm{rad}(G) \longrightarrow T \quad .$$

Soient $f_{G'} : G' \longrightarrow H$, $f_T : T \longrightarrow H$, $f_{T'} : T' \longrightarrow H$ des homomorphismes tels que $f_{G'} \mid T' = f_T \mid T' = f_{T'}$. Montrons qu'il existe un unique homomorphisme $f : G \longrightarrow H$ induisant $f_{G'}$ et f_T . Soit $f_r = f_T \mid \mathrm{rad}(G)$; soit

$$f_1 = f_{G'} \cdot f_r : G' \times_S \mathrm{rad}(G) \longrightarrow H \ .$$

Pour que f existe (et il sera évidemment unique), il faut et il suffit que f_1 induise l'identité sur le noyau de i , c'est-à-dire que $f_{G'}$ et f_r coïncident sur K ; mais l'existence de f_T montre par le même raisonnement que $f_{T'}$ et f_r coïncident sur K . Il n'y a plus qu'à remarquer que $f_{G'}$ et $f_{T'}$ coïncident évidemment sur $K \subset T'$.

Raisonnant maintenant comme en 7.1.10 , on déduit de 7.2.1:

Corollaire 7.2.3. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, H un S-préschéma en groupes, lisse et quasi-projectif sur S à fibres affines. Alors $\underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr}}(G,H)$ est représentable par un S-préschéma localement de présentation finie et séparé sur S .

7.3. Phénomènes particuliers à la caractéristique 0 .

Si G et H sont deux S-groupes lisses , $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ leurs Algèbres de Lie , on a un morphisme canonique

$$\underline{\mathrm{Lie}} : \underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr}}(G,H) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_S\text{-Alg.de Lie}}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \ ,$$

où le second membre a une définition évidente.

Proposition 7.3.1. Soient S un préschéma de caractéristique 0 (i.e. un $\mathbb{Q}$-préschéma), G un S-groupe réductif, H un S-préschéma en groupes lisse et quasi-projectif sur S à fibres affines.

(i) $\underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr}}(G,H)$ est représentable par un S-préschéma lisse et séparé sur S .

(ii) Si G est semi-simple, ce préschéma est affine et de présentation finie sur S .

(iii) Si G est simplement connexe (Exp. XXII, 4.3.3), le morphisme canonique

$$\mathrm{Lie} : \underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr}}(G,H) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_S\text{-Alg. de Lie}}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$$

est un isomorphisme.

Lemme 7.3.2. Soient k un corps de caractéristique 0 , G un k-groupe réductif, V un k-espace vectoriel de dimension finie , $G \longrightarrow \underline{GL}(V)$ une représentation linéaire de G dans V . On a

$$H^0(G,V) = H^0(\mathfrak{g},V) \quad ,$$

$$H^i(G,V) = 0 \quad , \quad i > 0 \quad .$$

La première relation est vraie en général pour un groupe lisse et connexe (Exp. VI) ; dans le cas d'un groupe réductif, on peut la démontrer comme suit : on peut supposer k algébriquement clos, donc G déployable, donc G engendré par des sous-groupes isomorphes à $\underline{G}_{m\,k}$, et il suffit de vérifier l'assertion pour ce groupe, ce qui est facile. De cette première relation résulte que $H^0(G,V)$ est un foncteur exact en V lorsque G est semi-simple ; $\mathfrak{g}$ est en effet alors une Algèbre de Lie

semi-simple et on applique Bourbaki, Lie, chapitre I, § 6 , exercice 1 , b). L'assertion reste vraie lorsque G est réductif; en effet, si on introduit le radical R de G et le quotient G/R qui est semi-simple, on a $H^0(G,V) = H^0(G/R, H^0(R,V))$, et $H^0(G, .)$ est composé de deux foncteurs exacts. Appliquant alors Exp. I , 5.3.1 , on en déduit $H^i(G,V) = 0$ pour $i > 0$.

Remarque 7.3.3. Sous les conditions précédentes, si G est semi-simple, on a $H^1(\mathfrak{g}, V) = H^2(\mathfrak{g},V) = 0$, cf. Bourbaki, loc. cit. b) et d) .

7.3.4. Démontrons maintenant la proposition. On sait déjà, par 7.2.3 que $\underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr}}(G,H)$ est représentable par un S-préschéma localement de présentation finie et séparé sur S ; pour montrer qu'il est lisse, il suffit de prouver qu'il est infinitésimalement lisse (Exp. XI, 1.8), ce qui résulte de Exp. III , 2.8 (i) par 7.3.2 On a donc prouvé (i). Montrons que (ii) résulte de (iii) . Il suffit d'abord de prouver que $\underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr}}(G,H)$ est affine sur S , il sera alors de présentation finie sur S , car il est lisse sur S par (i) ; de toutes façons $\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_S\text{-Alg. de Lie}}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ est représentable par un sous-préschéma fermé de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_S\text{-Mod.}}(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \simeq W(\check{\mathfrak{g}} \otimes_{\underline{O}_S} \mathfrak{h})$ qui est un S-préschéma affine, et la conclusion voulue apparaît lorsque G est simplement connexe. Dans le cas général, on peut supposer G déployé, donc $G \simeq \underline{\mathrm{Ep}}_S(\mathcal{R})$; introduisant la donnée radicielle simplement connexe $\mathrm{scon}(\mathcal{R})$ (Exp. XXI, 6.5.5), et utilisant le théorème d'existence (Exp. XXV, 1.1) , on construit un S-groupe simplement connexe $\overline{G}$ et une isogénie centrale $\overline{G} \longrightarrow G$. Le noyau K de cette isogénie est un S-groupe diagonalisable fini

(donc un S-groupe constant tordu, S étant de caractéristique 0) et $\underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr}}(K,H)$ est (trivialement) représentable par un S-préschéma séparé (si $K \simeq (\underline{\mathbb{Z}}/n\underline{\mathbb{Z}})_S$, $\underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr}}(K,H)$ est isomorphe à $\mathrm{Ker}(H \xrightarrow{n} H)$).

On a une suite exacte de "S-préschémas pointés" :

$$e \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr}}(G,H) \xrightarrow{u} \underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr}}(\overline{G},H) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr}}(K,H) ,$$

donc u est une immersion fermée, donc $\underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr}}(G,H)$ est affine sur S .

7.3.5. Démontrons enfin (iii) . Raisonnant comme dans la démonstration de (i) et utilisant 7.3.3 , on peut montrer que le S-préschéma $\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_S\text{-Alg. de Lie}}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ est lisse sur S . Pour démontrer (iii) , on peut donc supposer que $S = \mathrm{Spec}(k)$, où k est un corps algébriquement clos de caractéristique 0 ; il suffit même de prouver que $\underline{\mathrm{Lie}}$ est bijectif sur les points à valeurs dans k et qu'il induit une bijection sur les espaces tangents en deux points correspondants. Montrons d'abord que

$$\mathrm{Hom}_{k\text{-gr}}(G,H) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{k\text{-alg.de Lie}}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$$

est bijectif.

Si u est un homomorphisme de G dans H , le graphe de u est un sous-groupe connexe de $G \times_k H$ qui est déterminé par son algèbre de Lie qui est le graphe de $\underline{\mathrm{Lie}}(u)$; l'application est donc injective. Réciproquement, si $v : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ est un homomorphisme d'Algèbres de Lie, le graphe $\mathfrak{k}$ de v est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$; comme $\mathfrak{g}$ est sa propre algèbre dérivée, $\mathfrak{k}$ est sa propre algèbre dérivée, donc (CHEVALLEY, Théorie des groupes de Lie, Tome 2, § 14, Th. 15) est algébrique.

Elle est donc l'algèbre de Lie d'un sous-groupe connexe K de $G \times_k H$. Comme $\dim(K) = \dim(\mathfrak{k}) = \dim(\mathfrak{g}) = \dim(G)$ et comme $K \cap H$ est fini (car son algèbre de Lie est nulle), le morphisme canonique $pr_1 : K \longrightarrow G$ est fini et dominant; comme G est connexe, il est surjectif; c'est donc une isogénie. Comme G est simplement connexe, c'est un isomorphisme (cf. Exp. XXI, 6.2.7) et K est le graphe d'un homomorphisme de groupes $u : G \longrightarrow H$ tel que $\mathrm{Lie}(u) = v$.

Enfin, soit $u : G \longrightarrow H$ un homomorphisme. L'espace tangent à $\underline{\mathrm{Hom}}_{k\text{-gr}}(G,H)$ en u s'identifie à $Z^1(G,\mathfrak{h})$ (cf. Exp. II, 4.2 ; G opère sur $\mathfrak{h}$ par $\mathrm{Ad}_H \circ u$); de la même manière, on peut prouver que l'espace tangent à $\underline{\mathrm{Hom}}_{k\text{-alg.de Lie}}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ en $\underline{\mathrm{Lie}}(u)$ s'identifie à $Z^1(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$. Il nous faut donc prouver que l'application canonique $Z^1(G,\mathfrak{h}) \longrightarrow Z^1(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ est bijective. Mais $H^1(G,\mathfrak{h}) = H^1(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = 0$ (7.3.2 et 7.3.3) et cette application s'identifie à l'application évidente

$$\mathfrak{h} / H^0(G,\mathfrak{h}) \longrightarrow \mathfrak{h} / H^0(\mathfrak{g},\mathfrak{h}),$$

et on conclut par 7.3.2.

Remarque 7.3.6. Il est vraisemblable que si S est un préschéma localement noethérien , G un S-groupe semi-simple simplement connexe , H un S-préschéma en groupes lisse , $\hat{G}$ et $\hat{H}$ leurs complétés formels le long de la section unité, tout homomorphisme de $\hat{G}$ dans $\hat{H}$ provient d'un unique homomorphisme de G dans H , ce qui généraliserait 7.3.1 (iii) . Lorsque S est le spectre d'un corps et H est affine et de type fini, cela résulte d'un théorème de Dieudonné (Lie groups and Lie hyperalgebras ..., VI, Am. J. of Maths, 1957, p. 369, th. 4) . On notera cependant que,

si S n'est pas de caractéristique nulle, la conjecture précédente devient fausse si on abandonne l'hypothèse que S est localement noethérien (car autrement on en déduirait que $\underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr}}(G,H)$ serait toujours affine sur S, ce qui n'est pas le cas, comme nous le verrons dans 7.4 ci-dessous).

7.4. Un exemple.

A titre d'exemple, nous allons déterminer

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr}}(\underline{\underline{SL}}_{2\ S}, \underline{\underline{SL}}_{2\ S}) .$$

7.4.1. On rappelle (Exp. XX, n° 5), que $\underline{\underline{SL}}_{2\ S}$ est le S-schéma en groupes formé des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sur S vérifiant $ad-bc = 1$.
Un tore maximal T est défini par le monomorphisme $r^*: \underline{G}_{m\ S} \longrightarrow \underline{\underline{SL}}_{2\ S}$

$$r^*(z) = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} .$$

Une racine de G par rapport à T est définie par $r(r^*(z)) = z^2$, un monomorphisme

$$p : \underline{G}_{a\ S} \longrightarrow \underline{\underline{SL}}_{2\ S}$$

correspondant étant défini par

$$p(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Enfin, le représentant du groupe de Weyl correspondant à $u = p(1)$ est

$$w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Rappelons d'autre part (Exp. XX, 6.2) que $\underline{\underline{SL}}_{2\ S}$ est engendré par T, $p(\underline{G}_{a\ S})$ et w, soumis aux relations

$$r^*(z)\ p(x)\ r^*(z^{-1}) = p(z^2\ x)\ ,$$

$$w\ r^*(z)\ w^{-1} = r^*(z^{-1})\ ,$$

$$w^2 = r^*(-1)\ ,$$

$$(w\ u)^3 = 1\ .$$

7.4.2. Soit f un endomorphisme de $\underline{\underline{SL}}_{2\ S}$. Il définit d'abord un homomorphisme $f \circ r^* : \underline{G}_{m\ S} \longrightarrow \underline{\underline{SL}}_{2\ S}$. Le noyau $\mathrm{Ker}(f\ r^*)$ est un sous-groupe fermé de $\underline{G}_{m\ S}$, donc est localement sur S égal à un $\underline{\mu}_{n\ S}$ ($n \geqslant 0$) ou à $\underline{G}_{m\ S}$. Quitte à restreindre S, on peut donc supposer qu'il existe un $n \in \underline{\underline{N}}$ et un monomorphisme

$$f' : \underline{G}_{m\ S} \longrightarrow \underline{\underline{SL}}_{2\ S}$$

tels que $f \circ r^*(z) = f'(z^n)$.

En vertu de la conjugaison des monomorphismes $\underline{G}_{m\ S} \longrightarrow \underline{\underline{SL}}_{2\ S}$, on peut, après extension couvrante pour (ét) de la base, trouver une section g de G telle que $f \circ r^*(z) = \mathrm{int}(g) \circ r^*(z^n)$.

Transformant f par $\mathrm{int}(g)$, on est donc ramené au cas où il existe un $n \in \underline{\underline{N}}$ tel que $f \circ r^*(z) = r^*(z^n)$.

7.4.3. Considérons maintenant le morphisme

$$f \circ p : \underline{G}_{a\ S} \longrightarrow \underline{\underline{SL}}_{2\ S}\ .$$

Il vérifie la condition

$$r^*(z^n)\ f \circ p(x)\ r^*(s^n)^{-1} = f \circ p\ (z^2 x)\ .$$

Si $n = 0$, il s'ensuit aussitôt que $f \circ p$ est invariant sous les homothéties de $\underline{G}_{a\ S}$, donc constant. Si $n \neq 0$, on peut appliquer Exp. XXII,

4.1.9 ; $x \longrightarrow x^n$ est un endomorphisme de $\underline{G}_{a\ S}$, il existe un $k \in \underline{G}_{m\ S}$ tel que

$$f \circ p\ (x) = p\ (k\ x^n)\ ;$$

cette relation est d'ailleurs valable pour $n = 0$, en prenant $k = 1$. Quitte à de nouveau étendre S, on peut trouver un $z \in \underline{G}_{m\ S}$ avec $z^2 = k$. Remplaçant f par $\mathrm{int}(r^*(z)) \circ f$, on est donc ramené au cas où on a

$$f \circ r^*(z) = r^*(z^n)\ ,\quad f \circ p(x) = p(x^n)\ .$$

7.4.4. Enfin, on doit avoir

$$f(w)\ r^*(z^n)\ f(w)^{-1} = r^*(z^n)^{-1}\ ,$$

$$(f(w)\ u\ )^3 = 1\ .$$

En vertu de Exp. XX, 3.8, cela entraîne $f(w) = w^n$.

Comme G est engendré par T, $p(\underline{G}_{a\ S})$ et w cela entraîne que pour tout $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G(S')$, $S' \longrightarrow S$, on a

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n & b^n \\ c^n & d^n \end{pmatrix}\ .$$

7.4.5. Résumant la discussion précédente, on voit que <u>localement</u> sur S pour la topologie étale, on peut trouver pour tout endomorphisme f de $\underline{SL}_{2\ S}$ un automorphisme (intérieur) u de $\underline{SL}_{2\ S}$, et un entier $n \geqslant 0$ tel que

$$f = u \circ F_n \qquad \text{où}$$

$$F_n\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n & b^n \\ c^n & d^n \end{pmatrix}\ .$$

Remarquons que si $f = u \circ F_n$, l'entier n est bien déterminé par une fibre f_s de f, par exemple par $\mathrm{Ker}\ f_s$. Il s'ensuit que n est une fonction localement constante sur S.

7.4.6. On en déduit aussitôt que si f est un endomorphisme de $\underline{\underline{SL}}_2\ S$, S se décompose canoniquement en somme de sous-préschémas ouverts et fermés S_o, S_1, S_{p^n} (où p^n décrit l'ensemble des puissances > 0 des nombres premiers) tels que :

(i) f_{S_o} est le morphisme nul,

(ii) f_{S_1} est un isomorphisme (= un automorphisme intérieur)

(iii) S_{p^n} est de caractéristique p, $f_{S_{p^n}}$ se décompose de manière unique sous la forme $u \circ F_p^n$, où u est un automorphisme intérieur et F_p l'endomorphisme de Frobénius de $\underline{\underline{SL}}_2\ \underline{\underline{F}}_p$.

7.4.7. En d'autres termes, $\underline{\underline{Hom}}_{\underline{\underline{Z}}\text{-gr}}(\underline{\underline{SL}}_2\ \underline{\underline{Z}}, \underline{\underline{SL}}_2\ \underline{\underline{Z}})$ est le préschéma somme :

(i) d'un schéma isomorphe à $\mathrm{Spec}(\underline{\underline{Z}})$,

(ii) d'un schéma isomorphe à $\underline{\underline{Aut}}_{\underline{\underline{Z}}\text{-gr}}(\underline{\underline{SL}}_2\ \underline{\underline{Z}}) \simeq \mathrm{ad}(\underline{\underline{SL}}_2\ \underline{\underline{Z}})$,

(iii) pour chaque nombre p et chaque entier > 0 d'un schéma isomorphe à $\underline{\underline{Aut}}_{\underline{\underline{F}}_p\text{-gr}}(\underline{\underline{SL}}_2\ \underline{\underline{F}}_p) \simeq \mathrm{ad}(\underline{\underline{SL}}_2\ \underline{\underline{F}}_p)$.

7.4.8. Il s'ensuit en particulier que

(i) $\underline{\underline{Hom}}_{\underline{\underline{F}}_p\text{-gr}}(\underline{\underline{SL}}_2\ \underline{\underline{F}}_p ; \underline{\underline{SL}}_2\ \underline{\underline{F}}_p)$ a un nombre infini de composantes connexes, et donc n'est pas quasi-compact.

(ii) Si S est un schéma d'inégales caractéristiques, $\underline{\underline{Hom}}_{S\text{-gr}}(\underline{\underline{SL}}_2\ S, \underline{\underline{SL}}_2\ S)$ n'est pas plat sur S.

8. Appendice : Cohomologie d'un groupe lisse sur un anneau hensélien. Cohomologie et foncteur Π .

Proposition 8.1. Soient S un schéma local hensélien , s son point fermé , G un S-schéma en groupes lisse tel que tout sous-ensemble fini de G soit contenu dans un ouvert affine (1). Alors

(i) Si P est un fibré principal homogène sous G , il existe un $S' \longrightarrow S$ étale fini et surjectif qui trivialise P . On a $\mathrm{Fib}(S,H) \simeq H^1_{ét}(S,H)$.

(ii) Pour tout morphisme $S' \to S$ étale fini et surjectif, l'application canonique

$$H^1(S'/S,G) \longrightarrow H^1(S' \otimes_S k(s)/k(s), G_s)$$

est bijective.

(iii) L'application canonique

$$\mathrm{Fib}(S,G) \longrightarrow \mathrm{Fib}(k(s),G_s)$$

est bijective.

8.1.2. Si K est une extension séparable finie de $k(s)$, il existe un $S' \longrightarrow S$ étale fini surjectif tel que $K \simeq S' \otimes_S k(s)$. Si P est un fibré principal homogène sous G , P est lisse sur S , donc P_s lisse sur $k(s)$; il existe donc une extension séparable finie K de $k(s)$ tel que P_K possède une section. Représentant K comme il a été dit ci-dessus, on voit que $P_{S'}$ possède une section par le "lemme de Hensel", ce qui prouve la première partie de (i) .

(1) Cette dernière condition est en fait inutile (cf. Grothendieck, Groupe de Brauer III, in Dix Exposés sur la cohomologie des schémas, North Holland, 1968, théorème 11.7 et remarques 11.8.3).

Réciproquement, si P est un faisceau principal homogène sous G pour la topologie étale, il existe un $S' \longrightarrow S$ étale fini surjectif qui trivialise P (en effet toute famille couvrante d'un schéma local hensélien pour la topologie étale est majorée par une famille réduite à un morphisme $S' \longrightarrow S$ de la forme voulue).

En vertu de l'hypothèse de descente faite sur G, P est représentable (SGA 1 VIII, 7.6), ce qui achève de prouver (i), et montre que (ii) entraîne (iii). Il ne nous reste donc qu'à prouver (ii).

8.1.3. L'application de (ii) est injective : soient P et Q deux fibrés principaux homogènes sous G trivialisés par S'. Considérons le S-faisceau en groupes $H = \underline{\mathrm{Isom}}_{G\text{-fibrés}}(P,Q)$; comme $H_{S'}$ est isomorphe à $G_{S'}$, H est représentable, en vertu de la deuxième hypothèse sur G cf. ci-dessus. Si $H(k(s)) \neq \emptyset$, $H(S) \neq \emptyset$ par le lemme de Hensel, donc P et Q sont isomorphes.

8.1.4. Prouvons enfin que l'application de (ii) est surjective, ou encore que l'application canonique

$$Z^1(S'/S,G) \longrightarrow Z^1(S' \times_S k(s)/k(s),G_s)$$

est surjective. Soit $\underline{Z}^1$ le S-foncteur défini par

$$\underline{Z}^1(T) = Z^1(S' \times_S T'/T,G_T) ;$$

l'application précédente s'identifie à l'application

$$\underline{Z}^1(S') \longrightarrow \underline{Z}^1(S' \times_S k(s)) ;$$

par une nouvelle application du lemme de Hensel, il suffit de prouver que $\underline{Z}^1$ est représentable par un S-préschéma lisse.

8.1.5. Prouvons que $\underline{Z}^1$ est représentable par un S-préschéma localement de présentation finie. Soit $\underline{C}^i$, i = 0,1,... , le S-foncteur défini par

$$\underline{C}^i(T) = C^i(S' \times_S T/T, G_T) ,$$

c'est-à-dire

$$\underline{C}^i(T) = G((S' \times_S T/T)^{i+1}) = G((S'/S)^{i+1} \times_S T) ,$$

ou encore

$$\underline{C}^i = \underline{\mathrm{Hom}}_S((S'/S)^{i+1}, G) .$$

Comme $\underline{Z}^1$ est obtenu à partir de $\underline{C}^1$ et $\underline{C}^2$ par produits fibrés, il suffit de prouver que $\underline{C}^i$, i = 1,2 , est représentable par un S-préschéma localement de présentation finie.

8.1.6. Si $T \longrightarrow S$ est un morphisme étale fini surjectif qui décompose S' , $\underline{C}^i \times_S T = \underline{\mathrm{Hom}}_T((S' \times_S T/T)^{i+1}, G_T)$ est représentable par un produit de n copies de G_T , où n est le degré de $(S'/S)^{i+1}$. Appliquant une nouvelle fois l'hypothèse sur G , on en déduit que $\underline{C}^i$ est bien représentable par un S-préschéma localement de présentation finie (SGA 1 VIII loc.cit).

8.1.7. Pour prouver que $\underline{Z}^1$ est lisse, il nous faut maintenant, par définition, prouver que si T est un S-schéma <u>affine</u> , T_o le sous-préschéma fermé défini par l'Idéal $\underline{J}$ de carré nul , l'application canonique

$$\underline{Z}^1(T) \longrightarrow \underline{Z}^1(T_o)$$

est surjective. Comme G est lisse, l'application canonique $G(T) \longrightarrow G(T_o)$

est surjective, et il suffit de prouver que l'application canonique

$$H^1(S' \times_S T/T, G_T) \longrightarrow H^1(S' \times_S T_o/T_o, G_{T_o})$$

est bijective.

Changeant légèrement de notations et généralisant les hypothèses, il nous suffit maintenant de prouver :

Lemme 8.1.8. Soient S et S' deux schémas affines, $S' \longrightarrow S$ un morphisme fidèlement plat, J un Idéal de carré nul sur S, S_o le sous-préschéma fermé qu'il définit, G un S-groupe lisse. Posons $S'_o = S' \times_S S_o$, $G_o = G \times_S S_o$. L'application canonique

$$H^1(S'/S, G) \longrightarrow H^1(S'_o/S_o, G_o)$$

est bijective.

Remarque 8.1.9. Si on suppose G commutatif, la même assertion est valable pour tous les H^i, $i > 0$, avec une démonstration analogue.

Soit $\underline{M}_o$ le $\underline{O}_{S_o}$-Module quasi-cohérent

$$\underline{M}_o = \underline{\mathrm{Lie}}(G_o/S_o) \otimes_{\underline{O}_{S_o}} \underline{J} .$$

Pour chaque S_o-préschéma T_o (resp. chaque S-préschéma T), posons

$$M_o(T_o) = H^o(T_o, \underline{M}_o \otimes_{\underline{O}_{S_o}} \underline{O}_{T_o}) ,$$

(resp. $M(T) = M_o(T_o)$). Soit d'autre part $\overline{G} = \prod_{S/S_o} G_o$ le S-foncteur en groupes défini par $\overline{G}(T) = G_o(T_o)$.

On sait (Exp. III, n° 0), qu'il existe pour tout S-schéma affine T

une suite exacte, fonctorielle en T :

$$e \longrightarrow M(T) \longrightarrow G(T) \longrightarrow \overline{G}(T) \longrightarrow e \quad .$$

Nous avons à étudier l'application

$$H^1(S'/S,G) \longrightarrow H^1(S'_o/S_o,G_o) = H^1(S'/S,\overline{G}) \quad .$$

Supposons d'abord G commutatif. On a alors une suite exacte de cohomologie

$$H^1(S'/S,M) \longrightarrow H^1(S'/S,G) \longrightarrow H^1(S'/S,\overline{G}) \longrightarrow H^2(S'/S,M) \ ;$$

mais

$$H^i(S'/S,M) = H^i(S'_o/S_o,M_o) = H^i(S'_o/S_o,\underline{M}_o) \ ,$$

et on sait (TDTE II , B , Lemme 1.1), que $H^i(S'_o/S_o,\underline{M}_o) = 0$ pour $i \neq 0$.

Si maintenant G n'est pas commutatif, il nous faut utiliser la suite exacte de cohomologie non abélienne. Si $u \in Z^1(S'/S,G)$, on sait que les éléments de $H^1(S'/S,G)$ qui ont même image dans $H^1(S'/S,\overline{G})$ que la classe de u sont dans l'image de l'application cobord correspondante :

$$H^1(S'/S,M_u) \longrightarrow H^1(S'/S,G) \ ,$$

où M_u est le S-foncteur M "tordu par u" . De même, si v est un élément de $Z^1(S'/S,\overline{G})$, il existe un "cobord"

$$\Delta(v) \in H^2(S'/S,M_v) \ ,$$

où M_v est le S-foncteur M "tordu par v" , tel que $\Delta(v) = 0$ si et seulement si la classe de v est dans l'image de $H^1(S'/S,G)$.
Il nous suffit de prouver que l'on a $H^1(S'/S,M_u) = H^2(S'/S,M_v) = 0$.

Or rappelons (Exp III , n° 0) , que l'opération de $\overline{G}$ sur M

définie par la suite exacte n'est autre que celle qui se déduit fonctoriellement de la représentation adjointe de G_o

$$ad : G_o \longrightarrow \underline{Aut}_{\underline{O}_{S_o}} (\underline{Lie}(G_o/S_o)) \quad .$$

L'élément u (resp. v) opère donc dans $M_{S' x_S S'}$ par l'intermédiaire d'un $S'_o x_{S_o} S'_o$-automorphisme de $\underline{Lie}(G_o/S_o)$. Comme u (resp. v) est un cocycle, cet automorphisme est une donnée de descente ; notons $\underline{L}_u$ (resp. $\underline{L}_v$) le $\underline{O}_{S_o}$-Module quasi-cohérent obtenu. On vérifie aussitôt que pour $T \longrightarrow S$, on a

$$M_u(T) = H^o(T_o , \underline{L}_u \otimes_{\underline{O}_{S_o}} \underline{J} \otimes_{\underline{O}_{S_o}} \underline{O}_{T_o})$$

et la même relation en remplaçant u par v . On a donc

$$H^1(S'/S,M_u) = H^1(S'_o/S_o, \underline{L}_u \otimes \underline{J})$$

$$H^2(S'/S,M_v) = H^2(S'_o/S_o , \underline{L}_v \otimes \underline{J}) ,$$

et les deux sont bien nuls en vertu du résultat déjà utilisé.

Proposition 8.2. Soient $\underline{C}$ une catégorie possédant des produits fibrés, munie d'une topologie moins fine que la topologie canonique, $S' \longrightarrow S$ un morphisme de $\underline{C}$, G' un S'-faisceau en groupes, G le S-faisceau en groupes $\prod_{S'/S} G'$. Soit $H^1_S(S',G') \subset H^1(S',G')$ l'ensemble des classes de faisceaux principaux homogènes sous G' qui sont trivialisés par un crible de S' obtenu par changement de base à partir d'un crible couvrant convenable de S . L'application canonique $H^1(S,G) \longrightarrow H^1(S',G')$ définie par le foncteur

$$P \longmapsto P x_S S'$$

induit une bijection

$$H^1(S,G) \xrightarrow{\sim} H^1_S(S',G') \ ;$$

la bijection réciproque est définie par le foncteur $P' \longmapsto \prod_{S'/S} P'$.

Pour tout objet X de $\underline{C}_{/S}$, on a par définition un isomorphisme fonctoriel en X

$$\mathrm{Hom}_S(X,G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{S'}(X \times_S S',G') \ .$$

On a donc pour chaque S-objet T une bijection fonctorielle en T

$$H^1(T/S,G) \xrightarrow{\sim} H^1(T'/S',G') \ .$$

Remplaçant maintenant l'unique morphisme $T \longrightarrow S$ par une famille couvrante quelconque de S et passant à la limite inductive, on en déduit la première partie de l'énoncé. La seconde partie s'en déduit sans difficultés.

Lemme 8.3. Sous les conditions de 8.2 , l'assertion $H^1_S(S',G') = H^1(S',G')$ est locale sur S : supposons qu'il existe une famille couvrante $\{S_i \longrightarrow S\}$ telle que pour tout i , on ait $H^1_{S_i}(S' \times_S S_i, G') = H^1(S' \times_S S_i, G')$; Alors $H^1_S(S',G') = H^1(S',G')$.

En effet, soit P' un faisceau principal homogène sous G' . Posons $P'_i = P \times_{S'} (S' \times_S S_i)$; en vertu de l'hypothèse, il existe une famille couvrante $\{S_{ij} \longrightarrow S_i\}$ telle que pour chaque j , $P' \times_{S'} (S' \times_S S_{ij})$ possède une section. Mais $\{S_{ij} \longrightarrow S\}$ est une famille couvrante de S , et P' est bien trivialisé par la famille couvrante de S' obtenue à partir de celle-là par changement de base.

Proposition 8.4. Soit $S' \longrightarrow S$ un morphisme étale fini de préschémas. Soient G' un S'-faisceau en groupes, G le S-faisceau en groupes $\prod_{S'/S} G'$. Pour la topologie étale (resp. étale finie locale, resp. (fpqc)), les foncteurs

$$P \longmapsto P \times_S S'$$

$$\prod_{S'/S} P' \longleftarrow\!\shortmid\; P'$$

induisent des bijections réciproques l'une de l'autre

$$H^1(S,G) \xrightarrow{\sim} H^1(S',G') .$$

Par 8.2, il suffit de montrer que $H^1_S(S',G') = H^1(S',G')$. Par 8.3, il suffit de le faire localement pour la topologie étale finie locale ; on peut donc supposer que S' est une somme directe finie de copies de S, soit I_S, où I est un ensemble fini convenable. Alors G' est donné par une famille $(G_i)_{i \in I}$ de faisceaux sur S et

$$H^1(S',G') \simeq \prod_{i \in I} H^1(S,G_i)$$

D'autre part

$$H^1(S,G) \simeq \prod_{i \in I} H^1(S,G_i) ,$$

d'où, en vertu de 8.2, $H^1_S(S',G') = H^1(S',G')$, cqfd.

Remarques 8.5. On peut interpréter 8.2 et 8.3 par la suite exacte suivante (f est le morphisme $S' \longrightarrow S$ donné)

$$1 \longrightarrow H^1(S,f_*(G')) \longrightarrow H^1(S',G') \longrightarrow H^0(S, R^1f_*(G')) .$$

Dans le cas commutatif, cette suite exacte résulte de la suite spectrale de Leray ; elle est encore valable dans le cas non commutatif (cf. Thèse de Giraud).

Sous cette forme, on voit que le résultat est encore valable si f est seulement supposé <u>fini</u>, ou simplement <u>entier</u>, la topologie étant la topologie <u>étale</u>, car pour tout G', on a

$$R^1 f_*(G') = \text{faisceau final},$$

en vertu de SGA 4 VIII, 5.3.

D'autre part, ce résultat devient faux si on prend une topologie telle que (fpqc) ou (fppf), même si $S = \mathrm{Spec}(k)$, k corps algébriquement clos de caractéristique $p \neq 0$, $S' = \mathrm{Spec}(k[t]/t^2)$, $G' = \mu_p$ ou α_p.

De même, 8.2. devient faux, même pour la topologie étale, si on y supprime l'hypothèse que f est fini, comme on le voit en prenant pour f une immersion ouverte; par exemple si $S = \mathrm{Spec}(V)$, V anneau de valuation discrète complet à corps résiduel algébriquement clos, S' étant l'ouvert induit au point générique, et G' le groupe constant $(\underline{\mathbb{Z}}/n\underline{\mathbb{Z}})_{S'}$, avec n premier à la caractéristique résiduelle de V, on a $H^1(S,G) = 0$, $H^1(S',G') \neq 0$. Remplaçant d'ailleurs S' par $S \coprod S'$, on en déduit un exemple analogue, avec $S' \longrightarrow S$ étale surjectif, donc couvrant pour la topologie envisagée.

Exposé XXV

LE THEOREME d'EXISTENCE

par M. DEMAZURE

Pour être complet, nous donnons dans cet exposé une démonstration du théorème d'existence des groupes déployés. Comme la démonstration originale de CHEVALLEY ("Sur certains schémas de groupes semi-simples", Séminaire Bourbaki, Mai 1961, n° 219), elle s'appuie sur l'existence de groupes algébriques semi-simples complexes de tous les types possibles. Le principe d'une démonstration plus satisfaisante, prouvant directement l'existence d'un $\underline{\underline{Z}}$-groupe semi-simple déployé simplement connexe correspondant à une matrice de Cartan donnée a été donné par CARTIER (non publié). Signalons cependant que la difficulté n'est pas de donner une construction explicite d'un schéma en groupes, mais de vérifier que le groupe ainsi construit répond bien aux conditions exigées, c'est-à-dire essentiellement que ses fibres sont bien lisses et réductives.

1. Enoncé du théorème.

Théorème 1.1. Soit S un préschéma non vide. Le foncteur

$$G \longmapsto \mathcal{R}(G)$$

est une équivalence de la catégorie des S-préschémas en groupes réductifs épinglés avec la catégorie des données radicielles réduites épinglées.

En vertu du théorème d'unicité (Exp. XXIII, 4.1), l'énoncé précédent

est équivalent à :

Corollaire 1.2. (Existence de groupes déployés). Pour toute donnée radicielle réduite $\mathcal{R}$, il existe un $\underline{\underline{Z}}$-groupe réductif déployé G tel que $\mathcal{R}(G) \simeq \mathcal{R}$.

En particulier :

Corollaire 1.3. Soit k un corps. Pour tout k-groupe réductif déployable G_k, il existe un $\underline{\underline{Z}}$-groupe réductif G tel que $G \otimes_{\underline{\underline{Z}}} k \simeq G_k$.

Réciproquement, remarquons d'abord que pour prouver 1.2, il suffit par Exp. XXII, 4.3.1, Exp. XXI, 6.5.10, et le théorème d'unicité, de considérer le cas où la donnée radicielle $\mathcal{R}$ est simplement connexe (et même irréductible si on y tient, par Exp. XXI, 7.1.6). D'autre part, sous les conditions de 1.3, le schéma en groupes G est de type constant (car Spec $\underline{\underline{Z}}$ est connexe) donc de type $\mathcal{R}(G_k)$; par Exp. XXIII, 5.9, il s'ensuit que la validité de 1.3 pour un groupe G_k donné entraîne l'existence d'un $\underline{\underline{Z}}$-groupe déployé de type $\mathcal{R}(G_k)$. Pour démontrer 1.2 et donc 1.1, il suffit donc de prouver 1.3 lorsque k est de caractéristique nulle (par exemple $k = \underline{\underline{C}}$) et G_k simplement connexe (et en particulier semi-simple), ainsi que :

Proposition 1.4. Pour toute donnée radicielle réduite simplement connexe $\mathcal{R}$, il existe un $\underline{\underline{C}}$-groupe algébrique semi-simple de type $\mathcal{R}$.

On peut prouver 1.4 de la manière suivante. On sait d'abord (cf. par exemple JACOBSON, Lie Algebras, ch. VII, Theorem 5) qu'il existe une algèbre de Lie semi-simple complexe de type $\mathcal{R}$. Prenant la composante neutre du groupe des automorphismes de cette algèbre, on obtient un $\underline{\underline{C}}$-groupe algébrique semi-simple de type $\mathrm{ad}(\mathcal{R})$. Par BIBLE 23-01, prop. 1, on en déduit l'existence d'un groupe de type $\mathcal{R}$.

Le reste de cet exposé est consacré à la démonstration de 1.3 pour k de caractéristique nulle et G_k semi-simple. Celle-ci se fera en deux temps : construction d'un "morceau de $\underline{\underline{Z}}$-préschéma en groupes" (n° 2), étude du groupe obtenu par application du "théorème de Weil" (n° 3).

Pour éviter des confusions, nous n'utiliserons pas dans le numéro 2 la notation abrégée X_k pour désigner le k-préschéma $X \times_{\underline{\underline{Z}}} k$, où X est un $\underline{\underline{Z}}$-préschéma.

2. Théorème d'existence : construction d'un morceau de groupe.

2.1. Choisissons une fois pour toutes un déploiement de G_k, noté

$$(G_k, T_k, M, R)$$

(Exp. XXII, 1.13), un système de racines simples R_o de R (définissant le système de racines positives R_+), un système de Chevalley $(X_{r,k})_{r \in R}$ de G_k (Exp. XXIII, 6.1 et 6.2) vérifiant la condition supplémentaire suivante : si $r \in R$, on a $X_{r,k}\, X_{-r,k} = 1$. Choisissons enfin sur le sous-groupe de M engendré par R une relation d'ordre totale compatible avec la structure de groupe, telle que les racines > 0 soient les éléments de R_+. On notera alors les racines

$$-r_n < -r_{n-1} < \cdots < -r_1 < r_1 < r_2 < \cdots < r_n \quad .$$

Pour $r \in R$, on notera $P_{r,k}$ le groupe vectoriel correspondant à la racine r et

$$p_{r,k} : \underline{\underline{G}}_{a\,k} \xrightarrow{\sim} P_{r,k}$$

l'isomorphisme de groupes vectoriels défini par $X_{r,k}$.

2.2. Le déploiement de G comporte en particulier un isomorphisme de k-groupes

$$T_k \simeq D_k(M) \quad .$$

Posons $T = D(M)$; c'est un $\underline{\underline{Z}}$-tore, et on peut considérer l'isomorphisme

précédent comme un isomorphisme

$$T_k \xrightarrow{\sim} T \otimes_{\underline{\underline{Z}}} k \ .$$

On a

$$\mathrm{Hom}_{\underline{\underline{Z}}\text{-gr}}(T, \underline{G}_m S) = M \ ,$$

et on considérera les éléments de $R \subset M$ comme des caractères de T .
On considérera de même les éléments de R^* comme des morphismes de $\underline{\underline{Z}}$-groupes $\underline{G}_m \longrightarrow T$.

2.3. Pour chaque $r \in R_+$, soit $\underline{G}_a(r)$ une copie du groupe $\underline{G}_a$; considérons le $\underline{\underline{Z}}$-préschéma

$$U = \underline{G}_a(r_1) \times \ldots \times \underline{G}_a(r_n) \ .$$

Si U_k désigne la partie unipotente du groupe de Borel B_k de G_k défini par R_+ , notons

$$a : U \otimes_{\underline{\underline{Z}}} k \xrightarrow{\sim} U_k$$

l'isomorphisme de k-préschémas défini par

$$a((x_i)) = p_{r_1,k}(x_1) \ldots p_{r_n,k}(x_n) \ .$$

2.4. La loi de groupe de U_k se traduit par des relations de la forme

$$a((x_i)) \cdot a((y_j)) = a((z_h)) \ ,$$

où chaque z_h s'exprime comme un polynôme

$$z_h = x_h + y_h + Q_h(x_1, \ldots, x_{h-1}, y_1, \ldots, y_{h-1}) \ ,$$

les coefficients de Q_h étant <u>entiers</u> (Exp. XXII, 5.5.8 et Exp. XXIII, 6.4).
De plus $Q_h(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0) = 0$.

Munissons U de la loi de composition définie par les formules précédentes (qui sont bien "définies sur $\underline{\underline{Z}}$"). Comme cette loi induit sur U_k sa loi de groupe, elle est associative, et (0) en est un élément unité (en effet, les deux assertions précédentes s'expriment par des relations entre les polynomes Q_n, et $\underline{\underline{Z}} \longrightarrow k$ est injectif). Montrons que c'est une loi de groupe : si (x_i) est une section de U (sur un S quelconque), on calcule l'inverse (y_i) de (x_i) par les formules récurrentes

$$y_i = - x_i - Q_i(x_1,\ldots,x_{i-1},y_1,\ldots,y_{i-1})$$

qui sont encore "définies sur $\underline{\underline{Z}}$" .

En résumé, nous avons construit sur U une loi de groupe telle que l'isomorphisme a précédent soit un isomorphisme de groupes.

Pour chaque $r \in R_+$, considérons le morphisme

$$p_r : \underline{G}_a \longrightarrow U$$

défini par $p_r(x) = (x_i)$ où $\begin{cases} x_i = x & \text{si } r_i = r \\ x_i = 0 & \text{si } r_i \neq r \end{cases}$.

C'est une immersion fermée et un homomorphisme de groupes; on notera P_r son image. On a $(x_i) = p_{r_1}(x_1) \ldots p_{r_n}(x_n)$, ce qui prouve que U s'identifie au produit

$$U = P_{r_1} \cdot P_{r_2} \ldots P_{r_n} .$$

2.5. Faisons opérer $T = D(M)$ sur chaque P_r par l'intermédiaire du caractère r ; on vérifie aussitôt que cela définit une opération de T sur le groupe U et on peut construire le produit semi-direct $B = T \cdot U$. On a un isomorphisme canonique de k-groupes

$$B \otimes_{\underline{\underline{Z}}} k \xrightarrow{\sim} B_k .$$

Si nous prenons maintenant un ordre quelconque sur R_+, le morphisme

$$\prod_{r \in R_+} P_r \longrightarrow U$$

défini par le produit dans U est encore un isomorphisme. En effet, comme les deux membres sont des $\underline{\underline{Z}}$-préschémas plats et de présentation finie, on peut se contenter de vérifier l'assertion sur les fibres géométriques; on est alors ramené à la théorie de Lazard (BIBLE, 13-02, prop. 1) : on considère U comme groupe à opérateurs T, et on utilise le fait que les P_r sont deux à deux non isomorphes comme groupes à opérateurs (car les caractères $r \in R_+$ de T sont deux à deux distincts sur chaque fibre).

2.6. Remplaçant R_+ par $R_- = -R_+$, on construit de même des groupes U^-, B^-, P_r ($r \in R_-$) et des isomorphismes

$$p_r : \underline{G}_a \xrightarrow{\sim} P_r \quad , \quad r \in R_- \ .$$

Introduisons enfin le préschéma produit

$$\Omega = U^- \times T \times U \ ;$$

on a un isomorphisme canonique de k-préschémas

$$\Omega \times_{\underline{\underline{Z}}} k \xrightarrow{\sim} U_k^- \times_k T_k \times_k U_k \simeq \Omega_k \ ,$$

où Ω_k est la "grosse cellule" de G_k (Exp. XXII, 4.1.2).

A partir de maintenant, nous identifierons $\Omega \times_{\underline{\underline{Z}}} k$ à Ω_k par l'isomorphisme précédent; nous considérerons U^-, T, U comme des sous-préschémas de Ω, par l'intermédiaire des sections unités. On notera $\underline{e} = ((0), e, (0))$ la "section unité" de Ω.

Notre but est maintenant de mettre une loi de morceau de groupe sur Ω.

Lemme 2.7. Soit $r \in R_o$, et soit $w_{r,k}$ l'élément de $\mathrm{Norm}_{G_k}(T_k)(k)$ défini par $X_{r,k}$ (rappelons que l'on a par définition

$$w_{r,k} = p_{-r,k}(-1)\, p_{r,k}(1)\, p_{-r,k}(-1) \quad) .$$

Il existe un ouvert V_r de Ω, contenant la section e, et un morphisme

$$h_r : V_r \longrightarrow \Omega ,$$

vérifiant les conditions suivantes :

(i) $h_r(e) = e$,

(ii) $(h_r) \otimes_{\underline{Z}} k$ coïncide avec la restriction de $\mathrm{int}(w_{r,k})$ à $(V_r) \otimes_{\underline{Z}} k \subset G_k$.

(iii) On a $T \subset V_r$ et h_r envoie T dans T . Pour tout $s \in R$, on a $P_s \subset V_r$ et h_r envoie P_s dans $P_{s_r(s)}$.

En vertu de la définition d'un système de Chevalley (Exp. XXIII, 6.1), il existe pour chaque $s \in R$ un entier $e_s = \pm 1$ tel que

$$\mathrm{int}(w_{r,k})\, p_{s,k}(x) = p_{s_r(s),k}(e_s\, x)$$

pour tout $x \in \underline{G}_a(S)$, $S \longrightarrow \mathrm{Spec}\ k$.

Soit S un préschéma quelconque, écrivons un élément quelconque de $\Omega(S)$ sous la forme

$$n = \left(\prod_{\substack{s \in R \\ s \neq -r}} p_s(x_s) \right) p_{-r}(x_{-r})\, t\, p_r(x_r) \cdot \left(\prod_{\substack{s \in R_+ \\ s \neq r}} p_s(x_s) \right) ,$$

où on a choisi un ordre (quelconque) sur $R_- - \{-r\}$ et $R_+ - \{r\}$ (cf. 2.5) .

On définit un morphisme $d : \Omega \longrightarrow \mathrm{Spec}(\underline{\underline{Z}})$ par

$$d(u) = r(t) + x_r x_{-r} .$$

Soit V_r l'ouvert Ω_d (c'est-à-dire l'ouvert de Ω défini par " $d(u)$ inversible "); il contient $\underline{e}$, T , et chaque P_s , $s \in R$. Soit

$$h_r : V_r \longrightarrow \Omega$$

le morphisme défini par $h_r(u) = (a(u),b(u),c(u))$ où

$$a(u) = \left(\prod_{\substack{s \in R_- \\ s \neq -r}} p_{s_r(s)}(e_s x_s) \right) \cdot p_{-r}(- x_r d(u)^{-1}) ,$$

$$b(u) = t \cdot r^*(d(u)) ,$$

$$c(u) = p_r(- x_{-r} d(u)^{-1}) \cdot \left(\prod_{\substack{s \in R_+ \\ s \neq r}} p_{s_r(s)}(e_s x_s) \right) .$$

Comme s_r permute les racines positives (resp. négatives) distinctes de r (resp. $-r$) , $c(u)$ (resp. $a(u)$) est une section de U (resp. U^-) et le morphisme précédent est bien défini. Il vérifie trivialement (i) et (iii) . Quant à (ii), cela résulte aussitôt de la définition des e_s , $s \in R$, et de Exp. XX, 3.12.

Lemme 2.8. Il existe des ouverts V et V' de Ω et des morphismes

$$h : V \longrightarrow \Omega ,$$

$$h' : V' \longrightarrow \Omega ,$$

vérifiant les conditions suivantes :

(i) V et V' contiennent $\underline{e}$, $h(\underline{e}) = h'(\underline{e}) = \underline{e}$.

(ii) Le morphisme induit par $h' \circ h : h^{-1}(V') \longrightarrow \Omega$ est la restriction du morphisme identique.

(iii) Les k-morphismes $h \otimes_{\underline{Z}} k$ et $h' \otimes_{\underline{Z}} k$ sont la restriction à $V \otimes_{\underline{Z}} k$ et $V' \otimes_{\underline{Z}} k$ d'automorphismes du groupe G_k.

(iv) V et V' contiennent U, T et U^- ; h et h' envoient U dans U^-, U^- dans U, et T dans T.

Soit $\bar{w}_o$ l'élément du groupe de Weyl de G_k qui transforme R_+ en R_-. Ecrivons

$$\bar{w}_o = s_{r_n} \cdots s_{r_1} \quad , \quad r_i \in R_o$$

(aucun rapport avec la numérotation de 2.1). Posons

$$w_o = w_{r_n,k} \cdots w_{r_1,k} \in \underline{\mathrm{Norm}}_{G_k}(T_k)(k) .$$

Définissons par récurrence sur $i \leq n$ un ouvert V_i de Ω et un morphisme $h_i : V_i \longrightarrow \Omega$ par

$$V_o = \Omega \quad , \quad h_o = \mathrm{id.} ,$$

$$V_{i+1} = h_i^{-1}(V_{r_{i+1}}) \quad , \quad h_{i+1} = h_{r_{i+1}} \circ h_i \quad , \quad 0 \leq i < n$$

(les notations V_r , h_r sont celles de 2.7).

Prenons $V = V_n$, $h = h_n$. Les conditions de (i), (iii) et (iv) portant sur V et h sont bien vérifiées; pour (i) et (iii) cela résulte aussitôt de 2.8 , pour (iv), de ce que $h \otimes_{\underline{Z}} k$ est la restriction de $\mathrm{int}(w_o)$ à $V \otimes_{\underline{Z}} k$.

Comme $(\bar{w}_o)^2 = 1$, on a aussi

$$\bar{w}_o = s_{r_1} \cdots s_{r_n} = (s_{r_1}^3) \cdots (s_{r_n}^3) .$$

Posant

$$w'_o = (w_{r_1,k})^3 \dots (w_{r_n,k})^3 \quad ,$$

et effectuant la même construction que ci-dessus, on en déduit un ouvert V' et un morphisme h' vérifiant également (i),(iii),(iv) . De plus, $h' \times_{\underline{\underline{Z}}} k$ est la restriction de $\mathrm{int}(w'_o)$ à $V' \times_{\underline{\underline{Z}}} k$. Mais pour chaque racine simple $r \in R_o$, on a $(w_{r,k})^4 = e$ (cf. Exp. XX, 3.1), donc $w'_o \cdot w_o = e$, ce qui montre que $h' \circ h$ induit le morphisme identique dans un ouvert non vide de $\Omega \times_{\underline{\underline{Z}}} k$. Mais Ω étant lisse et de présentation finie sur $\underline{\underline{Z}}$, $\Omega \times_{\underline{\underline{Z}}} k$ est schématiquement dense dans Ω, ce qui prouve (ii) .

Proposition 2.9. *Il existe un ouvert V_1 de $\Omega \times \Omega$, un ouvert V_2 de Ω, des morphismes*

$$\pi : V_1 \longrightarrow \Omega ,$$

$$\sigma : V_2 \longrightarrow \Omega ,$$

possédant les propriétés suivantes :

(i) *Si $x \in \Omega(S)$, alors $(\underline{e},x)$ (resp. $(x,\underline{e})$) est une section de V_1 et $\pi(\underline{e},x) = \pi(x,\underline{e}) = x$.*

(ii) *V_2 contient $\underline{e}$ et $\sigma(\underline{e}) = \underline{e}$.*

(iii) *π_k et σ_k sont la restriction des morphismes $G_k \times_k G_k \longrightarrow G_k$ et $G_k \longrightarrow G_k$ définis par le produit* (resp. *l'inverse*).

Démonstration. Soient (v,t,u) et (v',t',u') deux sections de Ω. Alors $h(u)$ est une section de U^- , $h(v')$ est une section de U par 2.8 (iv) et on peut donc considérer $(h(u),e,h(v'))$ comme une section de Ω . Soit V_1 l'ouvert de $\Omega \times \Omega$ défini par la condition :

$$((v,t,u),(v',t',u')) \in V_1(S) \Longleftrightarrow (h(u),e,h(v')) \in V'(S)$$

(notations de 2.8). Si $((v,t,u),(v',t',u'))$ est une section de V_1 ,

$h'((h(u),e,h(v'))$ est défini, c'est une section de Ω que l'on peut décomposer :

$$h'((h(u),e,h(v')) = (v'',t'',u'') \quad .$$

On posera alors

$$\pi((v,t,u),(v',t',u')) = (v\ .tv''t^{-1}, t\ t''\ t', t'^{-1}\ u''t'\ .u') \quad .$$

vérification de (i) est immédiate (par 2.8 (ii)). Pour vérifier la condition de (iii) portant sur π , on voit que

$$h'((h(u),e,h(v')) = uv' = v''t''u''$$

lorsque $u \in U(S)$, $v \in U^-(S)$, $S \longrightarrow k$, en vertu de 2.8 (iii) et (ii). On construit σ de manière semblable : si (v,t,u) est une section de Ω , $h(u^{-1})$ est une section de $U^-, h(v^{-1})$ une section de U , $h(t^{-1})$ une section de T , donc $(h(u^{-1}),h(t^{-1}),h(v^{-1}))$ est une section de Ω et on peut définir un ouvert V_2 de Ω par

$$(v,t,u) \in V_2(S) \Longleftrightarrow (h(u^{-1}),h(t^{-1}),h(v^{-1})) \in V'(S)$$

et un morphisme $\sigma : V_2 \longrightarrow \Omega$ par

$$\sigma(v,t,u) = h'((h(u^{-1}),h(t^{-1}),h(v^{-1}))) \quad .$$

On vérifie les conditions sur σ comme ci-dessus.

Corollaire 2.10. π est "génériquement associatif" et σ est un "inverse générique" : si $x,y,z \in \Omega(S)$ et si les expressions ci-dessous sont définies (ce qui se produit toujours au-dessus d'un ouvert de Ω contenant la section unité), on a :

$$\pi(x, \pi(y,z)) = \pi(\pi(x,y),z) \quad ,$$

$$\pi(x,\sigma(x)) = \underline{e}$$

$$\pi(\sigma(x),x) = \underline{e} \quad .$$

En effet, les deux membres de chacune de ces formules définissent des morphismes entre $\underline{\underline{Z}}$-préschémas lisses et de présentation finie, qui coïncident sur les fibres génériques, par 2.10 (iii).

Corollaire 2.11. Soit $r \in R$. Pour tout S et tous $x,y \in \underline{G}_a(S)$ tels que $(p_r(x),p_{-r}(y)) \in V_1(S)$ et $1 + xy \in \underline{G}_m(S)$ (ce qui définit un ouvert de $\underline{G}_a^2 S$ contenant la section $(0,0)$), on a

$$\pi(p_r(x),p_{-r}(y)) = \Big(p_{-r}\Big(\frac{y}{1+xy}\Big),\ r^*(1+xy),\ p_r\Big(\frac{x}{1+xy}\Big)\Big)$$

La démonstration est la même que précédemment, par Exp. XX, 2.1.

3. Théorème d'existence : fin de la démonstration.

Posons pour simplifier le langage la définition suivante.

Définition 3.1. Soient S un préschéma et G un S-préschéma en groupes. On dit que G est admissible s'il existe une immersion ouverte de S-préschémas $i : \Omega_S = \Omega \times S \longrightarrow G$ vérifiant les conditions suivantes :

(i) Le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} (V_1)_S & \longrightarrow & \Omega_S \times_S \Omega_S & \xrightarrow{i \times_S i} & G \times_S G \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & & & \downarrow{\scriptstyle \pi_G} \\ \Omega_S & & \xrightarrow{\quad i_S \quad} & & G \end{array} ,$$

où l'on note π_G le morphisme de multiplication dans G, est commutatif.

(ii) Il existe un ensemble fini de sections $a_j \in \Omega(S)$ tel que les $i(a_j).i(\Omega_S)$ recouvrent G.

Par le "théorème de Weil" (Exp. XVIII, 3.13 (iii) et (iv)), on a :

Lemme 3.2. Si pour tout préschéma S étale et de type fini sur $\underline{\underline{Z}}$, tout S-groupe admissible est affine, il existe un $\underline{\underline{Z}}$-groupe admissible et affine.

Or on a :

Lemme 3.3. Soient S un préschéma et G un S-groupe admissible. Alors G est lisse et de présentation finie sur S, à fibres affines connexes et semi-simples.

Comme Ω_S est lisse et de présentation finie sur S, à fibres connexes, il en est de même pour G, en vertu de la condition (ii) . Pour vérifier 3.3, on peut donc supposer que S est le spectre d'un corps K. Identifions Ω_K à son image dans G. Il est clair que Ω_K est le produit

$$\prod_{r \in R_-} P_{r,K} \cdot T_K \cdot \prod_{r \in R_+} P_{r,K}$$

des sous-groupes T_K et $P_{r,K}$ ($r \in R$) de G. L'algèbre de Lie de G s'identifie donc à la somme directe

$$\mathrm{Lie}(T_K) \oplus \coprod_{r \in R} \mathrm{Lie}(P_{r,K}) \ .$$

Comme l'automorphisme intérieur défini par une section de T_K opère dans $P_{r,K}$, et donc dans $\mathrm{Lie}(P_{r,K})$, par l'intermédiaire du caractère $r \in R \subset M \simeq \mathrm{Hom}_{K\text{-}gr}(T_K, \underline{G}_{m\,K})$, la décomposition précédente de $\mathrm{Lie}(G)$ est exactement la décomposition sous l'opération adjointe de T. Les racines de G_K par rapport à T_K sont donc les $r \in R$. Appliquons Exp. XIX, 1.13. Soit T_r le tore maximal de $\mathrm{Ker}\ r \subset T_K$ et soit $Z_r = \underline{\mathrm{Cent}}_G(T_r)$; il nous suffit de prouver que chaque Z_r est réductif. Or $Z_r \cap \Omega_K$ n'est autre que

$$\prod_{\substack{s \in R_- \\ s \mid T_r = e}} P_{s,K} \cdot T_K \cdot \prod_{\substack{s \in R_+ \\ s \mid T_r = e}} P_{s,K} \ ;$$

mais les racines nulles sur T_r sont les multiples rationnels de r, donc r et $-r$; ce qui prouve

$$Z_r \cap \mathcal{Q}_K = P_{-r,K} \cdot T_K \cdot P_{r,K} \quad .$$

Pour prouver que Z_r est réductif il suffit, en vertu de Exp. XX, 3.4, de prouver que $P_{r,K}$ et $P_{-r,K}$ ne commutent pas, ce qui résulte aussitôt de 2.11.

Il résulte de 3.2 et 3.3 que la démonstration sera achevée si nous prouvons :

Lemme 3.4. Si S est un préschéma localement noethérien de dimension ≤ 1, et si G est un S-groupe lisse et de type fini, à fibres affines connexes et semi-simples, alors G est affine (et donc semi-simple).

Nota. Dans Exp. XVI, on a vu que 3.4 est vrai sans hypothèse sur S, mais la démonstration est relativement délicate; comme ici nous n'avons besoin que du cas particulier 3.4, nous en donnerons une démonstration directe.

Considérons l'Algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G, qui est un $\underline{O}_S$-Module localement libre, et la représentation adjointe de G

$$\mathrm{Ad} : G \longrightarrow \underline{GL}_{\underline{O}_S}(\mathfrak{g}) \quad .$$

Pour prouver que G est affine sur S, il suffit de prouver que le morphisme Ad est affine. Comme G est lisse et à fibres connexes, il est séparé sur S (Exp. VI), donc le morphisme Ad est séparé. Utilisant un résultat démontré en appendice (4.1), il suffit de prouver que le morphisme Ad est quasi-fini. On est donc ramené au cas où S est le spectre d'un corps; en ce cas G est affine, donc semi-simple, et on est ramené à Exp. XXII 5.7.14.

4. Appendice

Nous avons utilisé en cours de démonstration la proposition suivante :

Proposition 4.1. Soient S un préschéma localement noethérien de dimension ≤ 1, G et H deux S-préschémas en groupes de type fini, $f : G \longrightarrow H$ un morphisme de groupes quasi-fini et séparé. Alors f est affine.

Nous ne ferons la démonstration que dans le cas où G est lisse sur S, hypothèse qui est bien vérifiée dans l'application que nous avons faite de la proposition.

4.2. Par EGA II, 1.6.4, on peut supposer S réduit. Par les techniques habituelles de passage à la limite, on peut supposer S local. Si $\dim(S) = 0$, l'assertion est triviale, supposons $\dim(S) = 1$. Par descente fidèlement plate, on peut même prendre S complet à corps résiduel algébriquement clos. Quitte à normaliser S, on peut (EGA II, 6.7.1 et EGA 0_{IV} 23.1.5) supposer S normal. On est donc ramené au cas où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète complet A à corps résiduel algébriquement clos.

4.3. Soit η le point générique de S. Considérons l'image $f_\eta(G_\eta)$ de G_η dans H_η. C'est un sous-préschéma en groupes fermé de H_η. Soit H' l'adhérence schématique dans H de $f_\eta(G_\eta)$. Comme $H' \longrightarrow H$ est affine (c'est une immersion fermée), on peut remplacer H par H' et donc supposer H plat sur S et f_η surjectif. Comme f_η est fini, G et H plats, on a

$$\dim(G_o) = \dim(G_\eta) = \dim(H_\eta) = \dim(H_o)$$

(où on note par un indice "o" les fibres spéciales).

4.4. Soient $H_o^{(o)}, \ldots H_o^{(n)}$ les composantes irréductibles de H_o, $H_o^{(o)}$ désignant la composante neutre et z_i leurs points génériques. Comme chaque

anneau local $\underline{O}_{H,z_i}$ est de dimension $\leqslant 1$, le morphisme $G \times_H \underline{O}_{H,z_i} \longrightarrow \underline{O}_{H,z_i}$ est affine car quasi-fini et séparé (cf. lemme ..., Exp. XVI) , donc G est affine sur H au voisinage de z_i . Notant V le plus grand ouvert de H tel que $G|V$ soit affine sur V , il en résulte que V contient tous les z_i .

D'autre part, V est évidemment stable par la translation définie par un élément quelconque $g \in G(S)$. Mais on a $\dim(G_o) = \dim(H_o)$ et f_o est fini, donc

$$f_o : G_o^{(o)}(s_o) \longrightarrow H_o^{(o)}(s_o)$$

est surjectif. Comme A est complet et G lisse sur S , l'application canonique $G^{(o)}(S) \longrightarrow G_o^{(o)}(s_o)$ est surjective; on en déduit que pour tout $h_o \in H_o^{(o)}(s_o)$, il existe un $g \in G(S)$ tel que $f(g_o) = h_o$. Comme $H_o^{(o)}(s_o)$ opère transitivement dans chaque $H_o^{(i)}(s_o)$, il en résulte que $V \supset H_o(s_o)$, donc ($k(s_o)$ étant algébriquement clos) $V \supset H_o$.

Comme on a évidemment $V \supset H_\eta$, f_η étant fini, on a $V = H$, cqfd.

Exposé XXVI

SOUS-GROUPES PARABOLIQUES DES GROUPES REDUCTIFS

par M. DEMAZURE

Cet exposé étudie les sous-groupes paraboliques des groupe réductifs. Le résultat essentiel en est le théorème de conjugaison (5.14). L'outil essentiel est la notion de position transversale de deux sous-groupes paraboliques, notion qui est étudiée systématiquement dans le n° 4. Un autre fait joue un rôle important : la décomposition du radical unipotent d'un sous-groupe parabolique en extensions successives de groupes vectoriels (2.1).

Différents schémas associés à un groupe réductif sont étudiés dans le n° 3; le n° 6 traite des sous-tores triviaux d'un groupe réductif et de leurs relations avec les sous-groupes paraboliques.

Enfin, dans le n° 7, nous exposons brièvement comment se formule, sur une base semi-locale, la "théorie relative" des groupes réductifs telle qu'elle est exposée dans le cas des corps dans l'article de A. BOREL et J. TITS, Groupes Réductifs, Publications Mathématiques de l'IHES, n° 27. Dans cet article cité [BT] dans la suite, le lecteur trouvera d'ailleurs, dans le cas d'un corps de base, d'autres résultats qui n'ont pas été effleurés ici.

1. Rappels. Sous-groupes de Levi.

Définition 1.1. Soient S un préschéma, G un S-groupe réduct P un sous-S-préschéma en groupes de G . On dit que P est un sous-groupe parabolique de G si

(i) P est lisse sur S,

(ii) pour chaque $s \in S$, le $\bar{s}$-préschéma quotient $G_{\bar{s}}/P_{\bar{s}}$ est propre (i.e. BIBLE, 6-09, th. 4, $P_{\bar{s}}$ contient un groupe de Borel de $G_{\bar{s}}$).

Proposition 1.2. (Exp. XXII, 5.8.5). Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, P un sous-groupe parabolique de G. Alors P est fermé dans G, à fibres connexes, on a

$$P = \underline{\mathrm{Norm}}_G(P) .$$

De plus, le faisceau-quotient G/P est représentable par un S-préschéma lisse et projectif sur S.

Proposition 1.3. (Exp.XXII, 5.3.9 et 5.3.11). Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, P et P' deux sous-groupes paraboliques de G. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) P et P' sont conjugués dans G, localement pour la topologie étale (resp. (fpqc)).

(ii) Pour chaque $s \in S$, $P_{\bar{s}}$ et $P'_{\bar{s}}$ sont conjugués par un élément de $G(\bar{s})$.

(iii) Le transporteur strict $\underline{\mathrm{Transt}}_G(P,P')$ de P dans P'

$$\left(\underline{\mathrm{Transt}}_G(P,P')(S') = \left\{ g \in G(S'),\ \mathrm{int}(g)\, P_{S'} = P'_{S'} \right\} \right)$$

est un sous-préschéma fermé de G, lisse et de présentation finie sur S, qui est un fibré principal homogène sous P (à droite) et sous P' (à gauche).

Proposition 1.4. Soient S un préschéma non vide, (G,T,M,R) un S-groupe réductif déployé, R' une partie de R. Les conditions suivantes sur R' sont équivalentes :

(i) $\mathfrak{g}_{R'} = \mathfrak{t} \oplus \coprod_{r \in R'} \mathfrak{g}^r$ est l'Algèbre de Lie d'un sous-groupe parabolique de G contenant T (nécessairement unique, Exp. XXII, 5.3.5).

(ii) R' est de type (R) (Exp. XXII, 5.4.2) et contient un système de racines positives.

(iii) R' est une partie close de R et $r \in R, -r \notin R' \Longrightarrow r \in R'$.

(iv) Il existe un système de racines simples R_o , et une partie A de R_o tels que R' soit la réunion de l'ensemble des racines positives et de l'ensemble des racines négatives combinaisons linéaires des éléments de A .

(v) R' contient un système de racines simples de R; de plus, si $R_o \subset R'$ est un système de racines simples de R et si on pose

$$A = (-R') \cap R_o ,$$

R' est la réunion de l'ensemble des racines positives et de l'ensemble des racines négatives combinaisons linéaires des éléments de A.

On a (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) par Exp. XXII, 5.4.5 (ii). On a (iii) $\Longrightarrow$ (ii) par Exp. XXI, 3.3.6 et Exp. XXII, 5.4.7. On a évidemment (v) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (iii). On a (iii) $\Longrightarrow$ (v) par Exp. XXI, 3.3.6 et 3.3.10. Il reste donc à prouver que (i) entraîne que R' est une partie close de R . Or cette dernière assertion peut se vérifier sur une fibre géométrique quelconque; on peut donc supposer que S est le spectre d'un corps algébriquement clos. Soit P le groupe parabolique de G contenant T dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{g}_{R'}$. Comme les groupes de Borel de P sont les groupes de Borel de G contenus dans P , il résulte de BIBLE, 12-07, th. 1 et de Exp. XXII, 5.4.5 (i), que si on note U

le radical unipotent de P , T . U est le sous-groupe de G contenant T d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{R''} = \mathfrak{t} \oplus \coprod_{r \in R''} \mathfrak{g}^r$, où R'' est l'intersection des systèmes de racines positives de R contenus dans R' . Il en résulte en particulier que R'' est <u>close</u> et que $R'' \cap (-R'') = \emptyset$. D'autre part, le groupe $H = P/U$ est réductif, l'image canonique $\overline{T}$ de T en est un tore maximal ($T \to \overline{T}$ est un isomorphisme), et on a un isomorphisme de T-Modules, i.e. d'espaces vectoriels gradués de type M

$$\underline{\mathrm{Lie}}(H) \simeq \mathfrak{t} \oplus \coprod_{r \in R_s} \mathfrak{g}^r \quad ,$$

où R_s est le complémentaire de R'' dans R'. Il s'ensuit que R_s s'identifie naturellement à l'ensemble des racines de H relativement à $\overline{T}$, et en particulier vérifie $R_s = -R_s$.
Il s'ensuit aussitôt que l'on a

$$R'' = \left\{ r \in R' \ , \ -r \notin R' \right\} \quad ,$$

$$R_s = \left\{ r \in R' \ , \ -r \in R' \right\} \quad .$$

Montrons maintenant que R' est clos. Soient $r,s \in R'$, $r+s \in R$, prouvons que $r+s \in R'$. Si $r,s \in R''$, $r+s \in R''$ car R'' est clos. Si $r \in R_s$, $s \in R''$, et si $r+s \notin R'$, alors $r+s \in -R''$, et on a $-r = s + (-(r+s)) \in R''$ car R'' est clos, ce qui entraîne $-r \in R'$, donc $-r \in R_s$, et contredit le fait que $R_s \cap R'' = \emptyset$. Il reste donc à étudier le cas où $r,s \in R_s$. Si $r+s \notin R'$, alors $r+s \in -R''$. Mais, comme $r+s \neq 0$, il existe un système de racines positives du système de racines R_s contenant r et s , donc un groupe de Borel de $H = P/U$ contenant l'image canonique de P_r et P_s . Son image inverse dans P est un groupe de Borel contenant P_r , P_s et U , donc P_r , P_s et $P_{-(r+s)}$, ce qui est impossible.

Corollaire 1.5. Un sous-groupe parabolique d'un groupe réductif est de type (RC) (Exp. XXII, 5.11.1).

Proposition 1.6. (Exp. XXII, 5.11.4). Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, P un sous-groupe parabolique de G .

(i) P possède un plus grand sous-préschéma en groupes invariant, lisse et de présentation finie sur S , à fibres géométriques connexes et unipotentes. C'est un sous-groupe caractéristique de P , appelé le radical unipotent de P , noté $\mathrm{rad}^u(P)$. Le faisceau-quotient $P/\mathrm{rad}^u(P)$ est représentable par un S-groupe réductif.

(ii) Si T est un tore maximal de P , P possède un sous-groupe réductif L contenant T , tel que :

(a) Tout sous-groupe réductif de P contenant T est contenu dans L .

(b) P est le produit semi-direct L . $\mathrm{rad}^u(P)$, i.e. le morphisme canonique $L \longrightarrow P/\mathrm{rad}^u(P)$ est un isomorphisme . De plus, L est l'unique sous-groupe (resp. sous-groupe réductif) de P , contenant T et vérifiant (b) (resp. (a)). Enfin, on a

$$\mathrm{Norm}_P(L) = L \ , \quad \mathrm{Norm}_P(T) = \mathrm{Norm}_L(T) \ .$$

1.7. Un sous-groupe L de P vérifiant la condition (b) ci-dessus est appelé un sous-groupe de Levi de P . C'est un sous-groupe réductif maximal de P ; en effet, il est réductif, car isomorphe à $P/\mathrm{rad}^u(P)$, montrons qu'il est maximal pour cette propriété; soit L' un sous-groupe réductif de P contenant L ; pour prouver que $L' = L$, on peut raisonner localement pour la topologie (fpqc), et donc supposer que L possède un tore maximal T , et on est ramené à 1.6 (ii) .

Si L et L' sont deux sous-groupes de Levi de P , L et

L' sont conjugués dans P, localement pour la topologie (fpqc). En effet, localement pour cette topologie, on peut supposer que L (resp. L') possède un tore maximal T (resp. T'); comme T et T' sont conjugués dans P localement pour la topologie (fpqc), on peut supposer $T = T'$, et on a alors $L = L'$, par 1.6 (ii). Mais comme $P = L \cdot \mathrm{rad}^u(P)$ et $\underline{\mathrm{Norm}}_P(L) = L$, on en déduit aussitôt:

Corollaire 1.8. *Si L et L' sont deux sous-groupes de Levi du sous-groupe parabolique G du groupe réductif G, il existe un unique $u \in \mathrm{rad}^u(P)(S)$ tel que $\mathrm{int}(u)\, L = L'$.*

Notons $\underline{\mathrm{Lev}}(P)$ le foncteur des sous-groupes de Levi de P: pour $S' \to S$, $\underline{\mathrm{Lev}}(P)(S')$ est l'ensemble des sous-groupes de Levi de $P_{S'}$. On déduit de 1.8 :

Corollaire 1.9. *Soit P un sous-groupe parabolique du S-groupe réductif G. Alors $\underline{\mathrm{Lev}}(P)$ est un fibré principal homogène sous le S-groupe $\mathrm{rad}^u(P)$, et en particulier est représentable par un S-préschéma lisse et affine sur S, à fibres géométriques intègres.*

Il résulte immédiatement de 1.6 :

Corollaire 1.10. *Soit P un sous-groupe parabolique du S-groupe réductif G. Le foncteur $\underline{\mathrm{Tor}}(P)$ des tores maximaux de P est représentable par un S-préschéma lisse et affine, la "relation $L \supset T$" définit un morphisme*

$$\underline{\mathrm{Tor}}(P) \longrightarrow \underline{\mathrm{Lev}}(P) \ ,$$

la fibre de ce morphisme au-dessus de $L \in \underline{\mathrm{Lev}}(P)(S)$ s'identifie à $\underline{\mathrm{Tor}}(L)$ (Exp. XXII, 5.8.3).

La première assertion de 1.10 est conséquence des deux autres et de Exp. XXII, 5.8.3.

Définition 1.11. Soient S un préschéma non vide, G un S-groupe réductif, P un sous-groupe parabolique de G , $E = (T,M,R,R_o,(X_r)_{r \in R_o})$ un épinglage de G . On dit que E est adapté à P , ou que E est un épinglage du couple (G,P) si $P \supset T$ et si l'Algèbre de Lie de P est de la forme $\mathfrak{t} \oplus \coprod_{r \in R'} \mathfrak{g}^r$, où R' est une partie de R contenant R_o .

En particulier, si $T \subset B$ est le couple de Killing défini par l'épinglage, on a $T \subset B \subset P$.

Sous les conditions précédentes, on note $R_o(P) = R_o \cap (-R')$. On a $(r \in R_o(P)) \Longleftrightarrow (r \in R_o$ et $P_{-r} \subset P) \Longleftrightarrow (r \in R_o$ et $P_{-r} \cap P \neq e)$, par Exp. XXII, 5.4.3.
Il résulte aussitôt de 1.4 (v) et Exp. XXII, 5.11.3 :

Proposition 1.12. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, P un sous-groupe parabolique de G , $(T,M,R_o,(X_r)_{r \in R_o})$ un épinglage de E adapté à P , $R_o(P)$ la partie de R_o définie ci-dessus.

(i) Le radical unipotent $\mathrm{rad}^u(P)$ de P n'est autre que

$$U_{R''} = \coprod_{r \in R''} P_r \ ,$$

où R'' est l'ensemble des racines positives qui dans leur décomposition sur R_o , contiennent au moins un élément de $R_o(P)$ avec un coefficient non nul.

(ii) L'unique sous-groupe de Levi L de P contenant T n'est autre que

$$Z_{R_o(P)} = \mathrm{Cent}_G(T_{R_o(P)}) \ ,$$

où $T_{R_o(P)}$ est le tore maximal du noyau commun des $r \in R_o(P)$.

Corollaire 1.13. Tout sous-groupe de Levi L du sous-groupe parabolique P du groupe réductif G est un sous-groupe critique de G , i.e. vérifie (Exp. XXII, 5.10.4) :

$$L = \underline{Cent}_G(rad(L)) .$$

Cela résulte aussitôt de 1.12 , Exp. XXII, 5.10.6 , et du lemme suivant, contenu dans 1.4 et Exp. XXII, 5.4.1 :

Lemme 1.14. Localement pour la topologie étale, tout couple (G,P), où P est un sous-groupe parabolique du groupe réductif G , peut être épinglé (1.11).

Notons :

Proposition 1.15. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, P un sous-groupe parabolique de G , E et E' deux épinglages de G adaptés à P . L'unique automorphisme intérieur de G sur S qui transforme E en E' (Exp. XXIV, 1.5) provient de P (par le morphisme

$$P \longrightarrow P/\underline{Cent}(P) = P/\underline{Cent}(G) \longrightarrow G/\underline{Cent}(G)) .$$

En effet, il suffit de raisonner comme dans Exp. XXIV, 1.5 , en utilisant :

Lemme 1.16. (Exp. XXII, 5.3.14 et 5.2.6) Les tores maximaux (resp. groupes de Borel, resp. couples de Killing) d'un sous-groupe parabolique P du S-groupe réductif G sont conjugués dans P , localement pour la topologie étale.

Proposition 1.17. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, P et P' deux sous-groupes paraboliques de G , B un groupe de Borel contenu dans P et P' . Si P et P' sont conjugués dans G , localement pour la topologie étale, alors P = P' .

En effet, on peut supposer qu'il existe $g \in G(S)$ tel que $\mathrm{int}(g)\ P = P'$. Alors B et $\mathrm{int}(g)^{-1}\ B$ sont deux groupes de Borel de P . Quitte à étendre S , on peut par 1.16 , supposer qu'il existe $p \in P(S)$ avec $\mathrm{int}(p)\ \mathrm{int}(g^{-1})\ B = B$. Alors

$$p\, g^{-1} \in \underline{\mathrm{Norm}}_G(B)(S) = B(S) ,$$

et $g \in B(S) \cdot p \subset P(S)$, donc $P' = \mathrm{int}(g)\ P = P$.

Remarque 1.18. Si P et P' sont deux sous-groupes paraboliques de G contenant un même groupe de Borel, alors $P \cap P'$ est encore un sous-groupe parabolique de G . En effet, il est lisse le long de la section unité (Exp. XXII, 5.4.5), et il contient un groupe de Borel.

Proposition 1.19. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, G' son groupe dérivé (Exp. XXII, 6.2.1).

(i) Les applications $\quad P \longmapsto P' = P \cap G'$

et $\quad P' \longmapsto P'.\mathrm{rad}(G) = \underline{\mathrm{Norm}}_G(P')$

sont des bijections réciproques l'une de l'autre entre l'ensemble des sous-groupes paraboliques de G et l'ensemble des sous-groupes paraboliques de G' . On a $\mathrm{rad}^u(P) = \mathrm{rad}^u(P')$.

(ii) Soient P un sous-groupe parabolique de G et $P' = P \cap G'$. Les applications

$$L \longmapsto L' = L \cap G' = L \cap P'$$

$$L' \longmapsto L'.\mathrm{rad}(G) = \underline{\mathrm{Cent}}_G(\mathrm{rad}(L'))$$

sont des bijections réciproques l'une de l'autre entre l'ensemble des sous-groupes de Levi de P et l'ensemble des sous-groupes de Levi de P' . De plus, on a $\mathrm{rad}(L') = (\mathrm{rad}(L) \cap G')^0$.

La démonstration (par réduction au cas déployé, par exemple) se fait sans difficulté et est laissée au lecteur, ainsi que celle, immédiate de :

Proposition 1.20. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, P un sous-groupe parabolique de G, L un sous-groupe de Levi de P. Les applications

$$Q \longmapsto Q \cap L = Q'$$

$$Q' \longmapsto Q' \cdot \mathrm{rad}^u(P)$$

sont des bijections réciproques l'une de l'autre entre l'ensemble des sous-groupes paraboliques de G contenus dans P et l'ensemble des sous-groupes paraboliques de L. De plus, les sous-groupes de Levi de Q' sont les sous-groupes de Levi de Q contenus dans L.

On peut compléter 1.6 de la manière suivante :

Proposition 1.21. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, P un sous-groupe parabolique de G.

(i) P possède un plus grand sous-groupe invariant, lisse et de présentation finie sur S, à fibres géométriques connexes et résolubles. C'est un sous-groupe caractéristique de P, appelé le radical de P, et noté rad(P). Le faisceau-quotient P/rad(P) est représentable par un S-groupe semi-simple.

(ii) Si L est un sous-groupe de Levi de P, rad(P) est le produit semi-direct de $\mathrm{rad}^u(P)$ et de rad(L), on a $\mathrm{rad}(L) = L \cap \mathrm{rad}(P)$, donc $L = \mathrm{Cent}_G(L \cap \mathrm{rad}(P))$, et $P/\mathrm{rad}(P) \simeq L/\mathrm{rad}(L)$.

En effet, l'assertion (i) étant locale, on peut supposer que G possède un sous-groupe de Levi L, et on est ramené à prouver que $R = \mathrm{rad}^u(P).\mathrm{rad}(L)$ possède les propriétés annoncées dans (i),

ce qui est immédiat. Pour (ii), il ne reste plus qu'à démontrer que $\mathrm{rad}(L) = L \cap \mathrm{rad}(P)$, ce qui résulte aussitôt du fait que $L \cap \mathrm{rad}(P)$ est lisse et à fibres connexes, L étant le centralisateur d'un tore.

2. Structure du radical unipotent d'un sous-groupe parabolique.

Proposition 2.1. *Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, P un sous-groupe parabolique de G, $\mathrm{rad}^u(P)$ son radical unipotent. Il existe une suite de sous-préschémas en groupes de $\mathrm{rad}^u(P)$*

$$U_o = \mathrm{rad}^u(P) \supset U_1 \supset U_2 \supset \ldots \supset U_n \supset \ldots$$

possédant les propriétés suivantes :

(i) *Chaque U_i est lisse, à fibres connexes, caractéristique et fermé dans P. Le commutateur d'une section de U_i et d'une section de U_j est une section de U_{i+j+1} (sur un $S' \longrightarrow S$ variable).*

(ii) *Pour chaque $i \geqslant 0$, il existe un $\mathcal{O}_S$-Module localement libre $\underline{E}_i$ et un isomorphisme de S-faisceaux en groupes*

$$U_i/U_{i+1} \xrightarrow{\sim} W(\underline{E}_i) .$$

De plus, les automorphismes de P (sur un $S' \longrightarrow S$ variable) opèrent linéairement sur $W(\underline{E}_i)$.

(iii) *Pour tout $s \in S$, on a $U_{n\,s} = e$ pour $n > \dim(\mathrm{rad}^u(P)_s)$.*

2.1.1 . Supposons d'abord le couple (G,P) épinglable. Soit $(T,M,R,R_o,\ldots)$ un épinglage de G adapté à P ; soit $R_o(P)$

la partie de R_o définie par P . Soient $r_1,\dots,r_p$ les éléments de $R_o(P)$, $s_1,\dots,s_q$ les éléments de $R_o - R_o(P)$. Toute racine $r \in R$ s'écrit de manière unique

$$r = a_1 r_1 + \dots + a_p r_p + b_1 s_1 + \dots b_q s_q \quad .$$

Posons

$$a(r) = a_1 + \dots + a_p \quad .$$

Il résulte aussitôt des définitions les propriétés suivantes (cf. 1.12) :

(i) $(P_r \subset P) \Longleftrightarrow (a(r) \geq 0)$.

(ii) $(P_r \subset \mathrm{rad}^u(P)) \Longleftrightarrow (a(r) > 0)$.

(iii) $a(n r + m s) = n\, a(r) + m\, a(s) \qquad n,m \in \underline{\underline{Z}}$.

Soit R_i l'ensemble des racines $r \in R$ telles que $a(r) > i$. Chaque R_i est un ensemble clos de racines vérifiant $R_i \cap (-R_i) = \emptyset$. Considérons (Exp. XXII, 5.6.5) le S-groupe

$$U_i = U_{R_i} = \prod_{r \in R_i} P_r \quad .$$

C'est un sous-préschéma en groupes fermé de G , lisse sur S , à fibres connexes.

Soient $r,s \in R$, considérons la relation de commutation de Exp. XXII, 5.5.2

$$p_r(x)\, p_s(y)\, p_r(-x) = p_s(y) \prod_{\substack{n,m \in \underline{\underline{N}} \\ n,m \neq 0}} p_{nr+ms}(C_{n,m,r,s}\, x^n\, y^m) \quad ,$$

où chaque p_t est un isomorphisme de groupes vectoriels $\underline{G}_{a\,S} \xrightarrow{\sim} P_t$.

Remarquons d'abord que si $a(r) > i$ et $a(s) > j$, on a $a(nr + ms) = n\,a(r) + m\,a(s) \geq N(i+1) + m(j+1) > i+j+1$ si n et m sont > 0. Il s'ensuit que le commutateur d'une section de P_r et d'une section de P_s est une section de U_{i+j+1} (sur un $S' \longrightarrow S$ variable), ce qui entraîne bien $(U_i, U_j) \subset U_{i+j+1}$. Pour chaque $i \geq 0$, le quotient U_i/U_{i+1} est donc commutatif, il s'identifie naturellement à

$$U_i/U_{i+1} \simeq \prod_{a(r) = i+1} P_r \simeq W(\underline{E}_i) ,$$

où $\underline{E}_i$ est la somme directe des $\mathcal{O}_S^r$ pour $a(r) = i+1$.

Revenons maintenant à la formule de commutation ci-dessus, et supposons $a(r) \geq 0$, $a(s) > i$. Si $n,m \in \underline{N}$, $n,m \neq 0$,

-ou bien $a(nr + ms) > i+1$

-ou bien $a(nr + ms) = i+1$, auquel cas on a nécessairement $m = 1$.

Cela prouve d'abord que $\mathrm{int}(p_r(x))$ respecte U_i (donc aussi U_{i+1}), puis que dans l'expression de $\mathrm{int}(p_r(x))\,p_s(y)$ n'interviennent modulo U_{i+1} que des termes de la forme $p_{nr+s}(C_{n,1,r,s}\,x^n\,y)$ qui sont donc <u>linéaires</u> en y. Il s'ensuit que les automorphismes intérieurs de P_r opèrent linéairement dans le quotient U_i/U_{i+1} identifié à $W(\underline{E}_i)$. Comme c'est également trivialement vrai pour les automorphismes intérieurs définis par des sections de T, et que P est engendré par T et les P_r, $a(r) \geq 0$, on en déduit :

(i) que chaque U_i est invariant dans P,

(ii) que les automorphismes intérieurs définis par des sections de P opèrent linéairement dans $U_i/U_{i+1} \simeq W(\underline{E}_i)$.

2.1.2. Soit maintenant $(T',M',R',R'_o,\ldots)$ un nouvel épinglage de G adapté à P. En vertu de 1.15, il existe un automorphisme

intérieur de G provenant de P transformant l'ancien épinglage en le nouveau. Quitte à étendre S, on peut supposer que cet automorphisme intérieur est de la forme $\mathrm{int}(p)$, $p \in P(S)$. Si l'on reprend les constructions précédentes à l'aide du nouvel épinglage, il est clair que les groupes U_i' et les isomorphismes $U_i'/U_{i+1}' \simeq W(\underline{E}_i')$ obtenus se déduisent de U_i et $U_i/U_{i+1} \simeq W(\underline{E}_i)$ par transport de structure à l'aide de $\mathrm{int}(p)$. Il résulte des remarques (i) et (ii) ci-dessus que l'on aura donc $U_i' = U_i$, et que les deux structures vectorielles construites sur $U_i/U_{i+1} = U_i'/U_{i+1}'$ coïncident.

Cela nous montre que les groupes U_i et les structures vectorielles sur les quotients U_i/U_{i+1} sont indépendants de l'épinglage considéré (et en particulier invariants par tout automorphisme de P, comme on le voit aisément).

On a donc démontré la proposition lorsque le couple (G,P) est épinglable (la partie (iii) est triviale, car l'ensemble des ordres des éléments de R est un intervalle de $\underline{Z}$, donc on ne peut avoir $\dim(U_{i\,s}) = \dim(U_{i+1\,s})$ que si $U_{i\,s} = e$).

2.1.3. Dans le cas général, il existe une famille couvrante pour la topologie (fpqc), $\{ S_j \longrightarrow S \}$, telle que chaque couple (G_{S_j}, P_{S_j}) soit épinglable (1.14). En vertu de ce qui précède, on a des données de descente sur les $\mathrm{rad}^u(P_{S_j})_i$, compatibles avec les structures vectorielles des quotients, et on conclut par descente des sous-préschémas fermés (resp. des Modules localement libres).

Corollaire 2.2. *Soient S un schéma affine, G un S-groupe réductif, P un groupe parabolique de G. On a*

$$H^1(S, \mathrm{rad}^u(P)) = 0 ,$$

i.e. tout fibré principal homogène sous $\mathrm{rad}^u(P)$ est trivial.

En effet, S se décompose en somme de sous-préschémas sur chacun desquels $\mathrm{rad}^u(P)$ est de dimension relative constante. On peut donc par (iii) supposer qu'il existe un n tel que $U_n = e$. Comme $H^1(S, U_i/U_{i+1}) = H^1(S, W(\underline{E}_i)) = 0$ par TDTE I, B, 1.1 (ou SGA 1 XI, 5.1), on conclut aussitôt.

Corollaire 2.3. Sous les conditions précédentes, P possède un sous-groupe de Levi L . Si L est un sous-groupe de Levi de P, l'application canonique

$$H^1(S, L) \longrightarrow H^1(S, P)$$

est bijective (cf. Exp. XXIV, introduction pour la définition de $H^1(S, \ )$).

La première assertion résulte de 2.2 et 1.9. L'application canonique $H^1(S,L) \longrightarrow H^1(S,P)$ est surjective, car P est le produit semi-direct $L \cdot \mathrm{rad}^u(P)$. Pour prouver qu'elle est injective, il suffit de voir que pour tout fibré principal homogène Q sous L , on a $H^1(S, \mathrm{rad}^u(P)_Q) = 0$, où l'indice Q désigne l'opération de torsion par le L-fibré Q . Ceci peut se prouver de deux manières : on peut reprendre la démonstration de 2.2 , en utilisant le fait que les structures vectorielles sur les U_i/U_{i+1} sont invariantes par L ; on peut aussi remarquer que $\mathrm{rad}^u(P)_Q$ s'identifie au radical unipotent du sous-groupe parabolique P_Q de G_Q , et appliquer 2.2 à P_Q .

Corollaire 2.4. Soient S un schéma semi-local , G un S-groupe réductif, P un sous-groupe parabolique de G . Il existe un tore maximal T de G contenu dans P .

En effet, vu 2.3 , P possède un sous-groupe de Levi L , et il suffit de prouver que L possède un tore maximal, ce qui résulte de Exp. XIV, 3.20.

Corollaire 2.5. Soient S un schéma affine, G un S-groupe réductif, P un sous-groupe parabolique de G . Il existe un O_S-Module localement libre $\underline{E}$ tel que $\mathrm{rad}^u(P)$ soit isomorphe comme S-schéma à $W(\underline{E})$.

En effet, prouvons par récurrence sur i , que l'on a un isomorphisme de S-préschéma

$$\mathrm{rad}^u(P)/U_i \simeq W(\underline{E}_o \oplus \underline{E}_1 \oplus \dots \oplus E_{i-1}) .$$

C'est clair pour $i = 0$. Supposons $i > 0$, alors $\mathrm{rad}^u(P)/U_i$ est un fibré principal homogène de base $\mathrm{rad}^u(P)/U_{i-1}$, sous le groupe $(U_{i-1}/U_i)_{\mathrm{rad}^u(P)/U_{i-1}} \simeq W(\underline{E}_{i-1} \otimes \underline{O}_{\mathrm{rad}^u(P)/U_{i-1}})$. Or la base est affine (par exemple par l'hypothèse de récurrence), donc ce fibré est trivial (TDTE ou SGA1 XI, loc. cit.), et il existe un isomorphisme de S-préschémas $\mathrm{rad}^u(P)/U_i \simeq (\mathrm{rad}^u(P)/U_{i-1}) \times_S U_{i-1}/U_i$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire 2.6. Soient S un schéma semi-local, $\{ s_i \}$ l'ensemble de ses points fermés, G un S-groupe réductif, P un sous-groupe parabolique de G . L'application canonique

$$\mathrm{rad}^u(P)(S) \longrightarrow \prod_i \mathrm{rad}^u(P)(\mathrm{Spec}\ k(s_i))$$

est surjective.

En effet, si $S = \mathrm{Spec}(A)$, $k(s_i) = A/p_i$, et si $\underline{E}$ est donné par le module projectif (donc plat) E , il nous faut prouver que l'application

$$E \longrightarrow \prod E \otimes_A A/p_i$$

est surjective. Il suffit de le faire lorsque $E = A$, auquel cas c'est bien connu (cf. Bourbaki, Alg. Comm. Chap. II, § 1, n° 2, proposition 5).

Corollaire 2.7. Soient k un corps infini, G un k-groupe réductif, P un sous-groupe parabolique de G ; alors $\mathrm{rad}^u(P)(k)$ est dense dans $\mathrm{rad}^u(P)$.

Corollaire 2.8. Soient S un schéma semi-local, $\{s_i\}$ l'ensemble de ses points fermés, G un S-groupe réductif, P un sous-groupe parabolique de G, L_i un sous-groupe de Levi de P_{s_i} pour chaque i. Il existe un sous-groupe de Levi L de P induisant L_i pour chaque i.

Soit en effet L_o un sous-groupe de Levi de P (2.3). Soit, pour chaque i, $u_i \in \mathrm{rad}^u(P)(\mathrm{Spec}(k(s_i)))$ tel que $\mathrm{int}(u_i)\ L_{o\,s_i} = L_i$ (1.8) ; si $u \in \mathrm{rad}^u(P)(S)$ induit u_i pour chaque i (2.6), $L = \mathrm{int}(u)\ L_o$ répond à la question.

Corollaire 2.9. Dans la situation de 2.1, soit de plus H un sous-préschéma en groupes de G, lisse et de présentation finie sur S, à fibres connexes, tel que $P \cap H$ contienne localement pour la topologie (fpqc) un tore maximal de G. Alors pour chaque $i \geqslant 0$, il existe un sous-Module localement facteur direct F_i de E_i tel que l'isomorphisme $U_i/U_{i+1} \xrightarrow{\sim} W(E_i)$ induise un isomorphisme de groupes $(U_i \cap H)/(U_{i+1} \cap H) \xrightarrow{\sim} W(F_i)$.

En effet, H est un sous-groupe de type (R) de G (Exp. XXII, 5.2.1). D'autre part, l'assertion à démontrer est locale pour la topologie (fpqc), et on peut supposer G déployé relativement à un tore maximal de $P \cap H$; on peut même se ramener dans la situation de 2.1.1, H étant défini par une partie R' de R. Reprenant les notations de loc. cit., on voit par Exp. XXII, 5.6.7 (ii) que $U_i \cap H = \overline{\prod_{r \in R_i \cap R'}} P_r$, donc que $U_i \cap H/U_{i+1} \cap H$ s'identifie à $\overline{\prod_{r \in R',\ a(r) = i+1}} P_r$, ce qui entraîne le résultat.

Corollaire 2.10. Dans la situation de 2.9 , les énoncés 2.2 , 2.5 , 2.6 , 2.7 sont également valables pour le groupe $\mathrm{rad}^u(P) \cap H$.

3. Schéma des sous-groupes paraboliques d'un groupe réductif.

3.1. Soit E un S-préschéma constant tordu fini (Exp. X, 5.1). Considérons le S-foncteur $\mathcal{B}(E)$, où $\mathcal{B}(E)(S')$ est l'ensemble des sous-préschémas ouverts et fermés de $E_{S'}$ (ou, ce qui revient au même, l'ensemble des parties ouvertes et fermées de $E_{S'}$) ; alors $\mathcal{B}(E)$ est représentable par un S-préschéma constant tordu fini. En effet, si $E = A_S$, où A est un ensemble fini, on a aussitôt $\mathcal{B}(E) \simeq \mathcal{B}(A)_S$, et on conclut par descente des sous-préschémas ouverts et fermés. On a évidemment :

$$\mathcal{B}(E_{S'}) = \mathcal{B}(E)_{S'} \quad , \quad \mathcal{B}(E \times_S E') = \mathcal{B}(E) \times_S \mathcal{B}(E') \ .$$

3.2. Soient S un préschéma , G un S-groupe réductif. Le foncteur $\underline{\mathrm{Par}}(G)$ des sous-groupes paraboliques de G est défini par

$\underline{\mathrm{Par}}(G)(S')$ = ensemble des sous-groupes paraboliques de $G_{S'}$.

. En particulier $G \in \underline{\mathrm{Par}}(G)(S)$, $\underline{\mathrm{Bor}}(G) \subset \underline{\mathrm{Par}}(G)$.

Nous nous proposons de définir un morphisme

$$\underline{t} : \underline{\mathrm{Par}}(G) \longrightarrow \mathcal{B}(\underline{\mathrm{Dyn}}(G))$$

possédant les propriétés suivantes :

(i) $\underline{t}$ est fonctoriel en G (par rapport aux isomorphismes) et commute à l'extension de la base.

(ii) Si $(T,M,R,R_o,\ldots)$ est un épinglage de G adapté au sous-groupe parabolique P (1.11), l'isomorphisme canonique $\underline{\mathrm{Dyn}}(G) \simeq R_{o\,S}$ (Exp. XXIV, 3.4 (iii) transforme $\underline{t}(P)$ en $R_o(P)_S$ (notations de 1.11 , 1.12).

Soit d'abord P un sous-groupe parabolique de G et $(T,M,R,R_o...)$ un épinglage de G adapté à P. On définit $\underline{t}(P)$ par (ii) ; le sous-préschéma $\underline{t}(P)$ de $\underline{Dyn}(G)$ ainsi construit est indépendant de l'épinglage choisi. En effet, si $(T',M',R',R'_o,...)$ est un autre épinglage de G adapté à P, l'unique automorphisme intérieur de G transformant le premier épinglage en le second provient de P (1.15); l'isomorphisme canonique $R_o \xrightarrow{\sim} R'_o$ transforme donc $R_o(P)$ en $R'_o(P)$, ce qui entraîne le résultat annoncé.

Si maintenant, on ne suppose plus nécessairement (G,P) épinglable il résulte aussitôt de 1.14 et de la définition de $\underline{Dyn}(G)$ (Exp. XXIV, 3.3) que l'on peut définir par descente un sous-préschéma ouvert et fermé $\underline{t}(P)$ de $\underline{Dyn}(G)$, unique, tel que pour tout $S' \longrightarrow S$ tel que $(G,P)_{S'}$ soit épinglable, on ait $\underline{t}(P)_{S'} = \underline{t}(P_{S'})$.

Théorème 3.3. *Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif,*

$$\underline{t} : \underline{Par}(G) \longrightarrow \mathcal{B}(\underline{Dyn}(G))$$

le morphisme défini ci-dessus.

(i) *Pour que deux sous-groupes paraboliques P et P' de G soient conjugués localement pour la topologie* (fpqc) (cf. 1.3), *il faut et il suffit que* $\underline{t}(P) = \underline{t}(P')$.

(ii) *$\underline{Par}(G)$ est représentable, et le morphisme $\underline{t}$ est* lisse, projectif, à fibres géométriques intègres.

En vertu de 3.2 (i), et du fait que les automorphismes intérieurs de G opèrent trivialement sur $\underline{Dyn}(G)$ (Exp. XXIV, 3.4 (iv), on a bien $\underline{t}(P) = \underline{t}(P')$ lorsque P et P' sont conjugués. Réciproquement, soient P et P' deux sous-groupes paraboliques de G tels que $\underline{t}(P) = \underline{t}(P')$; prouvons que P et P' sont conjugués dans G, localement pour la topologie (fpqc); on peut

d'abord supposer les couples (G,P) et (G,P') épinglables (1.14); par conjugaison des épinglages dans G (Exp. XXIV, 1.5), on peut supposer qu'il existe un épinglage (T,M,R,R_o) de G adapté à P et P'. Alors $\underline{t}(P) = \underline{t}(P')$ implique $R_o(P) = R_o(P')$, donc $P = P'$ (cf. 1.4 (v)). On a donc prouvé (i) . Pour démontrer (ii) , reprenons les notations de Exp. XXII, 5.11.5.
On a un morphisme canonique $\underline{Par}(G) \longrightarrow \mathscr{H}_c$, et il est clair (par exemple par réduction au cas épinglé) qu'il se place dans un carré cartésien (où les flèches verticales sont des monomorphismes)

$$\begin{array}{ccc} \underline{Par}(G) & \xrightarrow{\underline{t}} & \mathcal{P}(\underline{Dyn}(G)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathscr{H}_c & \xrightarrow{cl} & \underline{Cl}_c \end{array} .$$

Or (loc. cit.) $\mathscr{H}_c$ est représentable et le morphisme cl est lisse, quasi-projectif, de présentation finie, à fibres géométriques intègres, donc aussi $\underline{t}$. Il reste à prouver que $\underline{t}$ est propre; mais c'est maintenant une assertion locale pour la topologie (fpqc), et on peut se ramener au cas épinglé $G = (G,T,M,R,R_o,\ldots)$. On a alors $\underline{Dyn}(G) \simeq R_{o\,S}$, et il suffit de prouver que pour toute partie R_1 de R_o , le S-préschéma $\underline{t}^{-1}(R_{1\,S})$ est propre sur S. Or si P_1 est le sous-groupe parabolique de G contenant T tel que $R_o(P_1) = R_1$, il résulte de (i) que le morphisme $G \longrightarrow \underline{Par}(G)$ défini ensemblistement par $g \longmapsto \mathrm{int}(g)\,P_1$ induit un isomorphisme de $G/\underline{Norm}_G(P_1)$ sur $\underline{t}^{-1}(R_{1\,S})$. Or (1.2), $G/\underline{Norm}_G(P_1) = G/P_1$ est projectif sur S .

Définition 3.4. $\mathcal{P}(\underline{Dyn}(G))$ est appelé le schéma des types de paraboliques de G ; $\underline{t}(P)$ est appelé le type de P .

Corollaire 3.5. Le S-foncteur $\underline{Par}(G)$ est représentable par un S-préschéma lisse et projectif sur S . La décomposition

$$\underline{\mathrm{Par}}(G) \longrightarrow \mathcal{P}(\underline{\mathrm{Dyn}}(G)) \longrightarrow S$$

est la factorisation de Stein (EGA III, 4.3.3) du morphisme structural $\underline{\mathrm{Par}}(G) \longrightarrow S$.

Corollaire 3.6. Pour chaque $t \in \mathcal{P}(\underline{\mathrm{Dyn}}(G))(S)$, le S-préschéma

$$\underline{\mathrm{Par}}_t(G) = \underline{t}^{-1}(t)$$

des sous-groupes paraboliques de G de type t est lisse et projectif sur S , homogène sous G . Si P est un sous-groupe parabolique de G , on a un isomorphisme canonique $G/P \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Par}}_{\underline{t}(P)}(G)$.

On a $\underline{\mathrm{Par}}_{\emptyset}(G) = \underline{\mathrm{Bor}}(G)$, $\underline{\mathrm{Par}}_{\underline{\mathrm{Dyn}}(G)}(G) \xrightarrow{\sim} S$.

Remarque 3.7. Le S-schéma $\mathcal{P}(\underline{\mathrm{Dyn}}(G))$ est muni d'une structure d'ordre naturelle (relation de domination, ici d'inclusion ensembliste, entre sous-préschémas). Cette structure d'ordre est réticulée, en particulier la borne inférieure de deux sous-préschémas ouverts et fermés de $\underline{\mathrm{Dyn}}(G)_{S'}$ est évidemment leur intersection. Remarquons d'ailleurs que si B est un sous-groupe de Borel de G , on peut définir le foncteur X des sous-groupes paraboliques de G contenant B . Le morphisme $X \longrightarrow \mathcal{P}(\underline{\mathrm{Dyn}}(G))$ induit par $\underline{t}$ est un isomorphisme (pour la structure de "schéma ordonné"), en vertu de l'assertion $P \subset Q \Longrightarrow \underline{t}(P) \subset \underline{t}(Q)$ et de :

Lemme 3.8. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, P un sous-groupe parabolique de G , t' une section de $\mathcal{P}(\underline{\mathrm{Dyn}}(G))$ sur S , telle que $\underline{t}(P) \subset t'$. Il existe un unique sous-groupe parabolique P' de G , contenant P , et tel que $\underline{t}(P') = t'$.

Quitte à étendre la base, on peut supposer que P contient un sous-groupe de Borel B de G . L'unicité de P' résulte alors de 1.17. Pour démontrer l'existence, on peut se placer dans le cas déployé, auquel cas l'assertion est évidente, cf. n° 1.

Remarques (i) L'assertion analogue à 3.8 obtenue en renversant les inclusions est évidemment fausse. Elle entraînerait par exemple que tout groupe de type A_1 possède un groupe de Borel, ce qui n'est pas, cf. Exp. XX, n° 5.

(ii) Il résulte aussitôt de ce qui précède que $\underline{t}(P) \subset \underline{t}(Q)$ signifie que localement pour (fpqc) où (et), P est conjugué à un sous-groupe de Q (il suffit d'ailleurs de vérifier l'assertion sur les fibres géométriques). De plus, on verra au n° 5 que l'on peut remplacer la topologie étale par la topologie de Zariski.

3.9. Les discussions précédentes peuvent se reprendre dans le cas des sous-groupes critiques. Rappelons (Exp. XXII, 5.10.4 et 5.10.5) qu'un sous-groupe réductif H du groupe réductif G est critique si $H = \underline{Cent}_G(rad(H))$, qu'un sous-tore Q de G est un tore critique si $Q = rad(\underline{Cent}_G(Q))$ et que sous-groupes critiques et tores critiques sont en correspondance biunivoque (par $H \longmapsto rad(H)$ et $Q \longmapsto \underline{Cent}_G(Q)$) . Si (G,T,M,R) est un S-groupe déployé, le sous-groupe de G contenant T correspondant à la partie R' de R (Exp. XXII, 5.4.2) est critique si et seulement si R' est "vectorielle" (c'est-à-dire intersection de R avec un sous-espace vectoriel de $M \otimes \underline{Q}$) , cf. Exp. XXII, 5.10.6. Si G est un S-groupe réductif quelconque, on définira comme dans Exp. XXII, 5.11.5. un S-préschéma étale fini $\underline{Cl}_{crit.}$, qui dans le cas déployé sera le schéma constant associé à l'ensemble des parties vectorielles de R modulo l'action du groupe de Weyl. Si $\underline{Crit}(G)$ désigne le "foncteur des sous-groupes critiques" de G , on aura un morphisme canonique $\underline{Crit}(G) \xrightarrow{cl} \underline{Cl}_{crit}$, qui se placera dans un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} \underline{Crit}(G) & \longrightarrow & \underline{Cl}_{crit} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathscr{H}_c & \longrightarrow & \underline{Cl}_c \end{array}$$

Proposition 3.10. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, Crit(G) le foncteur de ses sous-groupes critiques, Cl_{crit} le S-schéma étale fini défini ci-dessus,

$$cl : Crit(G) \longrightarrow Cl_{crit}$$

le morphisme défini ci-dessus.

(i) Pour que les sous-groupes critiques H et H' de G soient conjugués (localement pour la topologie (fpqc), il faut et il suffit que cl(H) = cl(H').

(ii) Crit(G) est représentable et le morphisme cl est lisse. affine, à fibres géométriques intègres.

Cela se démontre comme 3.3 excepté l'assertion "cl est affine". Il suffit de prouver que Crit(G) est affine sur S . Or Crit(G) s'identifie naturellement au S-foncteur des tores critiques de G , et on a donc un monomorphisme canonique

$$Crit(G) \longrightarrow M$$

où M est le préschéma des sous-groupes de type multiplicatif de G (Exp. XI, 4.1). Pour prouver que Crit(G) est affine sur S , il suffit, en vertu de Exp. XII 5.3 de montrer que ce morphisme est une immersion ouverte et fermée, où encore en faisant le changement de base $M \longrightarrow S$, de prouver l'assertion suivante : si Q est un sous-groupe de type multiplicatif du groupe réductif G , les $S' \longrightarrow S$ tels que $Q_{S'}$ soit un tore critique de $G_{S'}$ sont ceux qui se factorisent par un certain sous-préschéma ouvert et fermé de S . Or dire que Q est un tore critique, c'est dire 1) que Q est un tore, 2) Q étant un tore, que $rad(Cent_G(Q))$, qui est aussi un tore, est de même dimension relative que Q . Or ces deux conditions sont bien du type envisagé.

Corollaire 3.11. Le S-foncteur $\underline{Crit}(G)$ est représentable par un S-préschéma lisse et affine sur S .

Corollaire 3.12. Soit H un sous-groupe critique du S-groupe réductif G . Alors $G/\underline{Norm}_G(H)$ et G/H sont représentables par des S-préschémas affines et lisses sur S .

La première assertion résulte de 3.11 , la seconde de la première et de Exp. XXII, 5.10.2.

Corollaire 3.13. Soit Q un sous-tore du S-groupe réductif G . Alors $G/\underline{Cent}_G(Q)$ est représentable par un S-préschéma lisse et affine sur S . Il en est de même de $G/\underline{Norm}_G(Q)$ si Q est un sous-tore critique de G .

En effet, $H = \underline{Cent}_G(Q)$ est critique (Exp. XXII, 5.10.5), et on a $\underline{Norm}_G(H) = \underline{Norm}_G(Q)$ si Q est critique (loc. cit. 5.10.8).

3.14. En vertu de la conjugaison des sous-groupes de Levi des sous-groupes paraboliques de G , il existe un morphisme unique

$$u : \mathcal{B}(\underline{Dyn}(G)) \longrightarrow \underline{Cl}_{crit.} ,$$

tel que pour tout sous-groupe parabolique P de G , et tout sous-groupe de Levi L de P , on ait $cl(L) = u(\underline{t}(P))$, et que ceci soit vrai après tout changement de base.

3.15. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif. Considérons les S-foncteurs suivants :

$\underline{PL}(S') = \{$ couples $P \supset L$, P parabolique de $G_{S'}$, L sous-groupe de Levi de P $\}$.

$\underline{PT}(S') = \{$ couples $P \supset T$, P parabolique de $G_{S'}$, T tore maximal de P $\}$.

$\underline{LT}\ (S') =$ { couples $L \supset T$, L sous-groupe critique de $G_{S'}$, T tore maximal de L } .

$\underline{PLT}\ (S') =$ { triplets $P \supset L \supset T$, P parabolique de $G_{S'}$, L sous-groupe de Levi de P , T tore maximal de L }.

On a des morphismes évidents entre ces foncteurs et les foncteurs $\underline{Par}(G)$, $\underline{Crit}(G)$, $\underline{Tor}(G)$ déjà introduits, et on a un diagramme commutatif en forme de cube tronqué (voir figure).

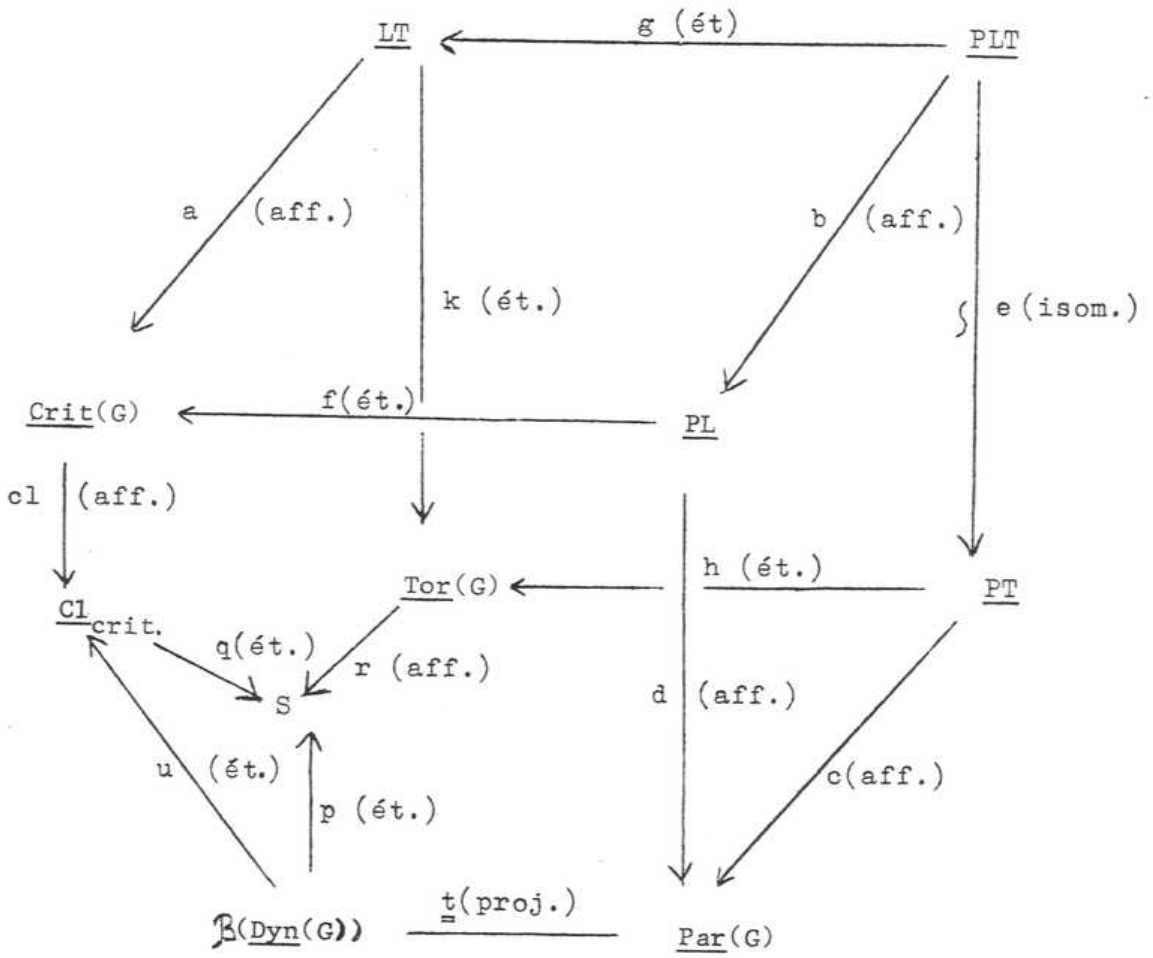


Figure 3.15.1

Théorème 3.16. (cf. figure 3.15.1).

(i) Tous les morphismes du diagramme sont lisses, surjectifs, et de présentation finie.

(ii) Tous les morphismes du diagramme, à l'exception de $\underline{t}$, sont affines ; le morphisme $\underline{t}$ est projectif.

(iii) Tous les morphismes du diagramme sont soit étales finis, soit à fibres géométriques intègres : les morphismes f,g,h,k,p,q et u sont étales finis, les morphismes a,b,c,d,r et cl sont à fibres géométriques intègres, le morphisme e est un isomorphisme.

(iv) Le carré (a,b,f,g) est cartésien.

Démonstration. Il est d'abord clair que e est un isomorphisme, par 1.6 (ii). D'autre part, (iv) est évident. Le morphisme a est lisse, affine, à fibres géométriques intègres : en effet, par changement de base $\underline{Crit}(G) \longrightarrow S$, il suffit de vérifier que le morphisme $\underline{Tor}(L_o) \longrightarrow S$, où L_o est le sous-groupe critique universel, possède ces propriétés; or L_o est réductif (par définition), et on est ramené à Exp. XXII, 5.8.3. Le morphisme b possède donc les mêmes propriétés, en vertu de (iv) . Le morphisme d est également lisse, affine, à fibres géométriques intègres, en vertu de 1.9 ; il en est donc de même de $c = d\ b\ e^{-1}$. Le morphisme r possède ces mêmes propriétés (Exp. XXII, 5.8.3), de même que le morphisme cl (3.10). D'autre part, on a déjà prouvé que les morphismes p et q sont étales finis surjectifs (3.1 et 3.9). Si nous prouvons que f et k sont étales finis surjectifs, les mêmes propriétés seront vraies pour g (par (iv)) et pour h (par $h = k\ g\ e^{-1}$); comme les propriétés énoncées de $\underline{t}$ ont été démontrées en 3.3 (ii) , il ne nous reste donc plus qu'à prouver que f (resp. k) est étale fini surjectif; faisons la démonstration pour k , celle pour f étant analogue. Il nous suffit de prouver

que si T est un tore maximal de G, le foncteur C des sous-groupes critiques de G contenant T est représentable par un S-schéma étale fini à fibres non vides; on peut supposer G déployé par rapport à T ; soit alors E l'ensemble des parties vectorielles de R (système de racines du déploiement); C est représentable par E_S (3.9), ce qui achève la démonstration.

Corollaire 3.17. Tous les foncteurs du diagramme sont représentables par des S-préschémas lisses sur S, et ils sont tous affines sur S, à l'exception de $\underline{Par}(G)$.

Remarques 3.18. (i) Le fait que le morphisme $f: \underline{PL} \longrightarrow \underline{Crit}(G)$ soit étale surjectif entraîne qu'un sous-groupe de G est critique si et seulement si il est, localement pour la topologie étale, sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parabolique de G. En revanche, il ne faut pas croire qu'en général l'application $f(S) : \underline{PL}(S) \longrightarrow \underline{Crit}(G)(S)$ soit surjective : il peut très bien arriver qu'un sous-groupe critique L de G ne provienne pas sur S d'un sous-groupe parabolique de G ; par exemple, un tore maximal n'est pas toujours contenu dans un groupe de Borel (exemple : une forme non déployée de $\underline{SL}_2$, cf. Exp. XX, n° 5).

(ii) De même, il peut arriver que le morphisme $u: \mathcal{P}(\underline{Dyn}(G)) \longrightarrow \underline{Cl}_{crit}$ ne soit pas un isomorphisme : deux sous-groupes paraboliques de types distincts peuvent avoir des sous-groupes de Levi de même type; exemple : dans un groupe de type A_2, il y a deux types de sous-groupes paraboliques dont les sous-groupes de Levi sont de rang semi-simple 1 (correspondant aux deux sommets du diagramme), alors qu'il n'y a qu'un seul type de sous-groupes critiques de rang 1 .
L'exemple analogue avec un groupe de type A_3 montre que, même sur un corps algébriquement clos, des sous-groupes paraboliques non isomorphes peuvent avoir des sous-groupes de Levi de même type.

Terminons ce n° par une application à la théorie des fibrés principaux.

Lemme 3.20. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, F un fibré principal homogène sous G , G^F la forme tordue de G correspondante. Identifions Dyn(G) et Dyn(G^F) (Exp. XXIV, 3.5). Soit P un sous-groupe parabolique de G . On a un isomorphisme canonique

$$F/P \xrightarrow{\sim} \underline{Par}_{\underline{t}(P)}(G^F) \quad .$$

En particulier, pour que le groupe structural de F puisse se réduire à P , il faut et il suffit que G^F possède un sous-groupe parabolique de type $\underline{t}(P)$.

La démonstration se fait exactement comme en Exp. XXIV, 4.2.1.

3.21. Si S est un préschéma, G un S-groupe réductif, et si $t \in \mathcal{B}(\underline{Dyn}(G))(S)$, on note $H^1_t(S,G)$ la partie de $H^1(S,G)$ formée des classes de fibrés principaux F sous G tels que le groupe associé G^F possède un sous-groupe parabolique de type t . Si G possède lui-même un sous-groupe parabolique P de type t , $H^1_t(S,G)$ n'est autre que l'image de $H^1(S,P)$ dans $H^1(S,G)$, image qui ne dépend donc pas du P choisi.

4. Position relative de deux groupes paraboliques

4.1. Un résultat préliminaire.

Lemme 4.1.1. Soient k un corps, G un k-groupe réductif, P et P' deux sous-groupes paraboliques de G . Alors $P \cap P'$ est lisse, de même rang réductif que G et contient un tore maximal T de G .

Supposons d'abord k algébriquement clos. Soit B (resp. B') un sous-groupe de Borel de P (resp. P'). On sait qu'il existe

$g \in G(k)$ avec $\mathrm{int}(g)\, B = B'$. D'autre part, si T_o est un tore maximal de B et si on pose $N = \underline{\mathrm{Norm}}_G(T_o)$, on sait (théorème de Bruhat, BIBLE, 13-11, cor. 1 au th. 3) que $G(k) = B(k)\, N(k)\, B(k)$. On voit donc qu'il existe $b, b_1 \in B(k)$ et $n \in N(k)$ tels que $g = b\, n\, b_1$, donc $\mathrm{int}(b)\, \mathrm{int}(n)\, B = B'$. On a alors

$$P \cap P' \supset B \cap B' = \mathrm{int}(b)\,(B \cap \mathrm{int}(n)\, B') \supset \mathrm{int}(b)\, T_o .$$

Supposons maintenant k quelconque. Appliquant le résultat précédent, on voit que $P_{\bar{k}} \cap P'_{\bar{k}}$ contient un tore maximal de $G_{\bar{k}}$; par Exp. XXII, 5.4.5 , on en déduit que $(P \cap P')_{\bar{k}}$ est lisse "le long de la section unité", donc lisse puisque l'on est sur un corps (Exp. VI_B) , donc que $P \cap P'$ est lisse. Par Exp. VI_B, la composante neutre $(P \cap P')^o$ de $P \cap P'$ est donc un sous-groupe ouvert de $P \cap P'$ lisse sur S . On peut alors lui appliquer Exp. XIV, 1.1.

Remarque 4.1.2. On peut prouver ([BT], 4.5) que $P \cap P'$ est connexe. Nous n'utiliserons pas ce fait.

Remarque 4.1.3. Le lemme précédent n'est pas vrai sur un préschéma quelconque.
En effet, soit par exemple G un groupe réductif sur un corps k algébriquement clos, et soit B un groupe de Borel de G . Prenons $G = X$ comme base et considérons les sous-groupes de Borel B_1 et B_2 de G_X , où $B_1 = B_X$ et $B_2 = \mathrm{int}(g_o)\, B_1$, g_o étant la section canonique (diagonale) de G_X . Pour chaque $g \in X(k)$, la fibre de $B_1 \cap B_2$ en g n'est autre que $B \cap \mathrm{int}(g)\, B$. Si on suppose $B \neq G$, la dimension de cette fibre varie avec g , donc $B_1 \cap B_2$ ne peut être lisse sur X .

4.2. Position transversale.

Théorème 4.2.1. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, P et Q deux sous-groupes paraboliques de G . Les conditions suivantes sur le couple (P,Q) sont équivalentes :

(i) $\underline{\text{Lie}}(P/S) + \underline{\text{Lie}}(Q/S) = \underline{\text{Lie}}(G/S)$.

(ii) Le morphisme canonique $P \times_S Q \longrightarrow G$ est lisse .

(ii') Le morphisme canonique $P \longrightarrow G/Q$ est lisse .

(iii) Le morphisme canonique $P \times_S Q \longrightarrow G$ est ouvert .

(iii') Le morphisme canonique $P \longrightarrow G/Q$ est ouvert .

(iv) Le morphisme canonique $P \times_S Q \longrightarrow G$ est dominant fibre par fibre.

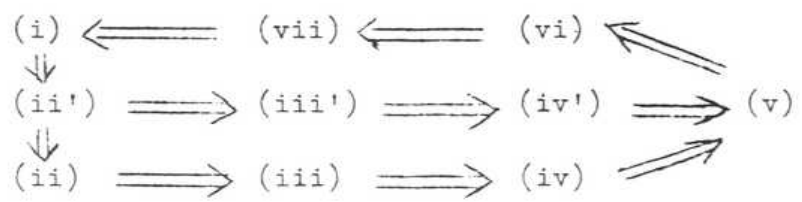
(iv') Le morphisme canonique $P \longrightarrow G/Q$ est dominant fibre par fibre.

(v) Pour tout $s \in S$, " $P_{\bar{s}} \cap Q_{\bar{s}}$ est de dimension minimum" i.e. on a $\dim P_{\bar{s}} \cap Q_{\bar{s}} = \dim P_{\bar{s}} + \dim Q_{\bar{s}} - \dim G_{\bar{s}}$.

(vi) Il existe une famille couvrante pour la topologie étale $\{S_i \longrightarrow S\}$, et pour chaque i un groupe de Borel B_i de P_{S_i} et un groupe de Borel B_i' de Q_{S_i}, tels que $B_i \cap B_i'$ soit un tore maximal de G_{S_i} .

(vii) Il existe une famille couvrante pour la topologie étale $\{S_i \longrightarrow S\}$, et pour chaque i un déploiement $(T_i, \ldots, R_i)$ de G_{S_i} et un système de racines positives R_{+i} de R_i, tels que P_{S_i} (resp. Q_{S_i}) soit le sous-groupe de type (R) de G_{S_i} contenant T_i et défini par une partie $R_i^{(1)}$ (resp. $R_i^{(2)}$) de R contenant R_{+i} (resp. $-R_{+i}$) (voir Exp. XXII, 5.4.2 et 5.2.1 pour les définitions).

Démonstration. Nous allons démontrer le théorème suivant le diagramme logique



.

On a trivialement (ii) $\Longrightarrow$ (iii) et (ii') $\Longrightarrow$ (iii'). Si (iii) est vérifié, l'image ensembliste du morphisme $P \times_S Q \Longrightarrow G$ est un ouvert de G qui contient la section unité; comme les fibres de G sont connexes, cette image est dense sur chaque fibre, ce qui prouve (iv) . On a de même (iii') $\Longrightarrow$ (iv').

On a (ii') $\Longrightarrow$ (ii) , en vertu du diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} P \times_S Q & \longrightarrow & G \\ {\scriptstyle pr_1}\downarrow & & \downarrow \\ P & \longrightarrow & G/Q \end{array} ,$$

D'autre part (iv) ou (iv') entraîne (v), en vertu de la théorie de la dimension (cf. EGA IV 5.6.6). On notera que l'on peut en effet supposer $S = \mathrm{Spec}(k)$, k corps algébriquement clos, et que toute fibre non vide du morphisme (iv) resp. (iv'), en un point de $G(k)$ resp. $(G/Q)(k)$, est isomorphe à $P \cap Q$, (comme le montre un calcul immédiat).

On a (vi) $\Longrightarrow$ (vii) , par Exp. XXII, 5.5.1 (iv) et 5.9.2.

On a (vii) $\Longrightarrow$ (i) , car pour vérifier que $\underline{Lie}(P) + \underline{Lie}(Q) = \underline{Lie}(G)$, on peut raisonner localement pour (fpqc), donc si (vii) est vérifié supposer G déployé, $P \supset B_{R_+}$ et $Q \supset B_{-R_+}$ (notations habituelles), auquel cas on a déjà $\underline{Lie}(B_{R_+}) + \underline{Lie}(B_{-R_+}) = \underline{Lie}(G)$.

Prouvons que (i) implique (ii').

Soit $u : P \longrightarrow G/Q$ le morphisme canonique; pour prouver que u est lisse, on peut se contenter de le faire pour les fibres géométriques de u , car P et G/Q sont lisses sur S , et on peut donc supposer que S est le spectre d'un corps algébriquement clos. Comme le morphisme u est compatible avec l'action évidente de P (on a $u(p\,p') = p\,u(p')$) et comme P est connexe, il suffit (Exp. VI_B) de vérifier que u est lisse en $e \in G(k)$, i.e. (SGA, Exp. II, 4.7) que l'application tangente à u en e est

surjective; mais celle-ci s'identifie naturellement à l'application canonique $\underline{Lie}(P) \longrightarrow \underline{Lie}(G)/\underline{Lie}(Q)$, qui est surjective si (i) est vérifié.

Il ne nous reste plus donc qu'à vérifier la dernière assertion, c'est-à-dire (v) $\Longrightarrow$ (vi) . Supposons d'abord que S soit le spectre d'un corps algébriquement clos. Par 4.1.1 , il existe un tore maximal T contenu dans P et Q ; soit R (resp. R_1, resp. R_2) l'ensemble des racines de G (resp. P , resp. Q) relativement à T .

On a $\dim(G) = \dim(T) + \mathrm{Card}(R)$, $\dim(P) = \dim(T) + \mathrm{Card}(R_1)$, $\dim(Q) = \dim(T) + \mathrm{Card}(R_2)$, $\dim(P \cap Q) = \dim(T) + \mathrm{Card}(R_1 \cap R_2)$, par Exp. XXII, 5.4.4 et 5.4.5 par exemple. La condition de (v) est donc équivalente à

$$\mathrm{Card}(R_1 \cap R_2) = \mathrm{Card}(R_1) + \mathrm{Card}(R_2) - \mathrm{Card}(R) ,$$

c'est-à-dire $R_1 \cup R_2 = R$. Pour démontrer (vi) , il suffit, en vertu de Exp. XXII, 5.9.2 et 5.4.5 , de prouver que $R_1 \cap -R_2$ contient un système de racines positives de R . On est donc ramené à prouver :

Lemme 4.2.2. Soit R un "système de racines" (par exemple l'ensemble des racines d'une donnée radicielle au sens de l'exposé XXI). Soient R_1 et R_2 deux parties closes de R contenant chacune un système de racines positives. Si $R_1 \cup R_2 = R$, alors $R_1 \cap -R_2$ contient un système de racines positives.

En effet, comme $R_1 \cap -R_2 = R_3$ est évidemment clos, et en vertu de Exp. XXI, 3.3.6 , il suffit de montrer que $R_3 \cup -R_3 = R$. Or on sait que $R_1 \cup -R_1 = R = R_2 \cup -R_2$, et on conclut grâce au fait élémentaire suivant : si A,A',B,B' sont quatre parties d'un ensemble E , et si $A \cup A' = B \cup B' = A \cup B = A' \cup B' = E$, on a $(A \cap B') \cup (A' \cap B) = E$.

Ceci achève la démonstration de (v) $\Longrightarrow$ (vi) dans le cas où la base est le spectre d'un corps algébriquement clos. Revenons maintenant au cas général et supposons (v) vérifié. Soit $s \in S$; en vertu de ce qui précède, on peut trouver un sous-groupe de Borel $\overline{B}$ (resp. $\overline{B}'$) de $P_{\overline{s}}$ (resp. $Q_{\overline{s}}$) tel que $\overline{B} \cap \overline{B}'$ soit un tore maximal de $G_{\overline{s}}$.

Comme le S-préschéma $\underline{\mathrm{Bor}}(P) \simeq \underline{\mathrm{Bor}}(P/\mathrm{rad}^u(P))$ des sous-groupes de Borel de P est lisse, on peut, appliquant Exp. XI, 1.10 et raisonnant localement pour la topologie étale (i.e. remplaçant S par un $S' \longrightarrow S$ étale et couvrant s, et s par un point de sa fibre dans S') supposer qu'il existe un sous-groupe de Borel B de P se projetant sur $\overline{B}$; on peut de même supposer qu'il existe un sous-groupe de Borel B' de Q se projetant sur $\overline{B}'$. Comme $\overline{B} \cap \overline{B}'$ est un tore maximal de G , il existe un ouvert U de S contenant s et tel que $B_U \cap B'_U$ soit un tore maximal de G_U (Exp. XXII, 5.9.4), ce qui démontre (vi) .

C.Q.F.D.

Définition 4.2.3. Un couple (P,Q) vérifiant les conditions équivalentes (i) à (vii) du théorème 4.2.1 est dit en position transversale. On dit aussi que P est en position transversale relativement à Q , ou, par abus de langage, que P et Q sont en position transversale (mutuelle).

Vu (vi), cette définition coïncide dans le cas des groupes de Borel avec celle de Exp. XXII, 5.9.1.

Corollaire 4.2.4. Soient S un préschéma , G un S-groupe réductif, P et Q deux sous-groupes paraboliques de G .

(i) Pour que (P,Q) soit en position transversale, il faut et il suffit que pour chaque point s de S , le couple $(P_{\overline{s}}, Q_{\overline{s}})$ soit en position transversale; si $S' \longrightarrow S$ est un morphisme surjectif, et si $(P_{S'}, Q_{S'})$ est en position transversale, alors (P,Q) est en position transversale.

(ii) Il existe un sous-préschéma ouvert U de S vérifiant la propriété suivante : pour qu'un morphisme $S' \to S$ se factorise par U , il faut et il suffit que $(P_{S'}, Q_{S'})$ soit en position transversale.

(iii) Considérons les sous-foncteurs

$$\underline{\mathrm{Gen}}\ (G) \quad \subset \quad \underline{\mathrm{Par}}(G) \times_S \underline{\mathrm{Par}}(G)$$

$$\underline{\mathrm{Gen}}\ (/Q) \quad \subset \quad \underline{\mathrm{Par}}(G)$$

$$\underline{\mathrm{Gen}}(P/Q) \quad \subset \quad G$$

définis comme suit : pour $S' \to S$, $\underline{\mathrm{Gen}}(G)(S')$ est l'ensemble des couples de sous-groupes paraboliques de $G_{S'}$ en position transversale, $\underline{\mathrm{Gen}}(/Q)(S')$ est l'ensemble des sous-groupes paraboliques de $G_{S'}$ en position transversale relativement à $Q_{S'}$, $\underline{\mathrm{Gen}}(P/Q)(S')$ est l'ensemble des $g \in G(S')$ tels que $\mathrm{int}(g)P_{S'}$ soit en position transversale relativement à $Q_{S'}$. Chacun de ces foncteurs est représentable par un sous-préschéma ouvert relativement dense (Exp. XVIII) du S-préschéma correspondant $\underline{\mathrm{Par}}(G) \times_S \underline{\mathrm{Par}}(G)$, resp. $\underline{\mathrm{Par}}(G)$, resp. G.

Les assertions (i) résultent aussitôt de la description (i) du terme "position transversale". Pour démontrer (ii), on prend $U = S - \mathrm{Supp}(\mathrm{Coker}\ u)$ où u est le morphisme canonique $\underline{\mathrm{Lie}}(P) \oplus \underline{\mathrm{Lie}}(G) \to \underline{\mathrm{Lie}}(G)$.

Comme on a des diagrammes cartésiens

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & \underline{\mathrm{Par}}(G) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \underline{\mathrm{Gen}}(P/Q) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Gen}}(/Q) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{Par}}(G) & \xrightarrow{f'} & \underline{\mathrm{Par}}(G) \times_S \underline{\mathrm{Par}}(G) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \underline{\mathrm{Gen}}(/Q) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Gen}}(G) \end{array}$$

(où $f(g) = \mathrm{int}(g)\,P$ et $f'(R) = (R,Q)$), il suffit de vérifier (iii) dans le cas de $\underline{\mathrm{Gen}}(G)$. Soit alors P_o le sous-groupe parabolique canonique de $G_{\underline{\mathrm{Par}}(G)}$; posons $X = \underline{\mathrm{Par}}(G) \times_S \underline{\mathrm{Par}}(G)$,

$P = pr_1^*(P_o)$ et $Q = pr_2^*(P_o)$; appliquant aux sous-groupes paraboliques P et Q de G_X l'assertion (ii), on construit un sous-préschéma ouvert U de X, qui comme on le vérifie aussitôt s'identifie bien à $\underline{Gen}(G)$. Il reste à vérifier l'assertion de densité, ce qui peut se faire sur les fibres géométriques; on peut donc supposer $S = Spec(k)$, k corps algébriquement clos; comme $\underline{Par}(G)$ est lisse, il suffit de vérifier que $\underline{Gen}(G)$ coupe chaque composante irréductible de $\underline{Par}(G)\ x_S\ \underline{Par}(G)$; autrement dit, par 3.3, il suffit de voir que si $t,t' \in \mathcal{B}(\underline{Dyn}(G))(S)$, il existe un couple (P,P') en position transversale, avec $\underline{t}(P) = t$, $\underline{t}(P') = t'$. Or cela est immédiat : on choisit un couple (B,B') de groupes de Borel de G tel que $B \cap B'$ soit un tore maximal (on déploie G et on applique Exp. XXII, 5.9.2) puis on applique 3.8 pour construire $P \supset B$ et $P' \supset B'$, avec $\underline{t}(P) = t$, $\underline{t}(P') = t'$; P et P' sont des types voulus et sont en position transversale par 4.2.1 (vi).

Corollaire 4.2.5. *Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, P et Q deux sous-groupes paraboliques de G, le couple (P,Q) étant en position transversale.*

(i) *Soient P' et Q' deux sous-groupes paraboliques de G, de même type que P et Q respectivement. Pour que le couple (P',Q') soit en position transversale, il faut et il suffit qu'il soit conjugué au couple (P,Q), localement pour la topologie étale.* (N.B. *On verra au § 5 qu'on peut remplacer la topologie étale par la topologie de Zariski*).

(ii) *Le morphisme canonique $P\ x_S\ Q \longrightarrow G$ induit un morphisme lisse et surjectif $P\ x_S\ Q \longrightarrow \underline{Gen}(Q/P)$, et un isomorphisme $P\ x_S\ Q\ /\ P \cap Q \xrightarrow{\sim} \underline{Gen}(Q/P)$ ($P \cap Q = R$ opérant dans $P\ x_S\ Q$ par $(p,q)r = (pr, r^{-1}q)$).*

(iii) *Le morphisme canonique $P \longrightarrow \underline{Par}_{\underline{t}(Q)}(G)$ (défini ensemblistement par $p \longmapsto int(p)\ Q$) induit un morphisme lisse et*

surjectif $P \longrightarrow \underline{Gen}(/P) \cap \underline{Par}_{\underline{t}(Q)}(G)$, et un isomorphisme $P / P \cap Q \simeq \underline{Gen}(/P) \cap \underline{Par}_{\underline{t}(Q)}(G)$.

(iv) Le morphisme canonique $G \longrightarrow \underline{Par}_{\underline{t}(P)}(G) \times_S \underline{Par}_{\underline{t}(Q)}(G)$ (défini ensemblistement par $g \longmapsto (\mathrm{int}(g)\, P\ ,\ \mathrm{int}(g)\, Q)$) induit un morphisme lisse et surjectif $G \longrightarrow \underline{Gen}(G) \cap \underline{Par}_{\underline{t}(P)}(G) \times_S \underline{Par}_{\underline{t}(Q)}(G)$ et un isomorphisme $G/\, P \cap Q \simeq \underline{Gen}(G) \cap \underline{Par}_{\underline{t}(P)}(G) \times_S \underline{Par}_{\underline{t}(Q)}(G)$.

Démontrons (i) . Il est clair que la condition est suffisante; prouvons qu'elle est nécessaire. Soit donc (P',Q') en position transversale. Comme P et P' sont conjugués localement pour la topologie étale, on peut supposer $P = P'$, et il nous suffit de prouver que si Q et Q' sont deux sous-groupes paraboliques de G , en position transversale relativement à P , et de même type, alors ils sont conjugués, localement pour la topologie étale, par une section de P . Utilisant 4.2.1 (vi) , on peut supposer qu'il existe des groupes de Borel B,B',B_1,B'_1 de P,P,Q,Q' respectivement tels que $B \cap B_1 = T$ et $B' \cap B'_1 = T'$ soient des tores maximaux de G . Or les couples de Killing (B,T) et (B',T') de P sont conjugués localement dans P pour la topologie étale (1.16), et on peut supposer $B = B'$, $T = T'$, auquel cas on a $B_1 = B'_1$ par Exp. XXII, 5.9.2 , donc $Q = Q'$ par 3.8.

Les assertions (ii) , (iii) et (iv) se démontrent de façon parallèle. Démontrons par exemple (ii) ; soit $g \in \underline{Gen}(Q/P)(S)$, i.e. soit $g \in G(S)$ tel que $\mathrm{int}(g)\, Q$ soit en position transversale relativement à P . En vertu de la démonstration qui précède, Q et $\mathrm{int}(g)\, Q$ sont conjugués localement pour la topologie étale, par une section de P . Raisonnant localement pour cette topologie, on peut supposer qu'il existe $p \in P(S)$ tel que $\mathrm{int}(g)\, Q = \mathrm{int}(p)\, Q$, donc $p^{-1} g \in \underline{Norm}_G(Q)(S) = Q(S)$; ce qui prouve l'existence d'un $q \in Q(S)$ avec $g = p\, q$. On a donc prouvé que le morphisme envisagé dans (ii) est couvrant pour la topologie étale. Comparant avec 4.2.1 (ii),

on en déduit qu'il est lisse et surjectif. D'autre part, un raisonnement immédiat montre que la relation d'équivalence définie dans $P \times_S Q$ par le morphisme $P \times_S Q \longrightarrow G$ est la relation d'équivalence associée à l'action du groupe $R = P \cap Q$ (opérant comme suit $(p,q)\, r = (p\, r\, ,\ r^{-1}\, q)$), ce qui démontre la dernière assertion de (ii) (car un morphisme lisse et surjectif est un épimorphisme effectif, par exemple).

Remarque 4.2.6. Si P et Q sont en position transversale, on notera souvent $P.Q$ l'ouvert $\underline{Gen}(Q/P)$ de G, notation justifiée par 4.2.5. (ii).

Proposition 4.2.7. *Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, P et Q deux sous-groupes paraboliques de G, le couple (P,Q) étant en position transversale.*

(i) *Le groupe $P \cap Q$ est lisse sur S (et en fait à fibres connexes par 4.1.2); introduisons alors $(P \cap Q)^0$ (Exp. VI_B) ; c'est un sous-groupe de type (RC) de G (Exp. XXII, 5.11.1), dont le radical unipotent (loc. cit. 5.11.4) se décompose en produit direct*

$$\mathrm{rad}^u((P \cap Q)^0) = (\mathrm{rad}^u(P) \cap Q) \times_S (P \cap \mathrm{rad}^u(Q)) .$$

(ii) *Si S est affine, $H^1(S, \mathrm{rad}^u(P \cap Q)^0) = 0$. Si S est semi-local, $P \cap Q$ contient un tore maximal de G.*

En effet, $P \cap Q$ est lisse en vertu de 4.2.1 (ii) et du diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} P \times_S Q & \longrightarrow & G \\ \uparrow & & \uparrow \\ P \cap Q & \longrightarrow & S \end{array} .$$

Pour vérifier les assertions annoncées sur $(P \cap Q)^0$, on peut

raisonner localement pour la topologie étale, donc en vertu de 4.2.1 (vii) , supposer avoir choisi un déploiement (G,T,M,R) de G , tel que P et Q contiennent T et soient définis respectivement par des parties R_1 et R_2 de R , R_1 contenant un système de racines positives R_+ , et R_2 contenant le système opposé R_-.
Soit R_o l'ensemble des racines simples de R_+ ; notons

$$A_1 = R_o \cap -R_1 \quad , \quad A_2 = R_o \cap R_1 \quad , \quad A = A_1 \cap A_2 \ .$$

Par 1.4 (v) et 1.12 , on a

$$R_1 = R_+ \cup [R_- \cap (-\underline{\underline{N}})A_1] \quad ,$$

$$R_2 = [R_+ \cap \underline{\underline{N}} A_2] \cup R_- \quad ,$$

$$\mathrm{rad}^u(P) = \prod_{r \in R_1 \ , \ r \notin -R_1} P_r \quad ,$$

$$\mathrm{rad}^u(Q) = \prod_{r \in R_2 \ , \ r \notin -R_2} P_r \ .$$

Par Exp. XXII, 5.6.7 , on a donc

$$\mathrm{rad}^u(P) \cap Q = \prod_{r \in R_1 \cap R_2 \ , \ r \notin -R_1} P_r = \prod_{r \in K_2} P_r \quad ,$$

$$\mathrm{rad}^u(Q) \cap P = \prod_{r \in R_1 \cap R_2 \ , \ r \in -R_2} P_r = \prod_{r \in K_1} P_r \quad ,$$

où K_2 est l'ensemble des racines positives, combinaisons linéaires des éléments de A_2 , mais non combinaisons linéaires des éléments de A , et K_1 l'ensemble des racines négatives, combinaisons linéaires des éléments de A_1 , mais non combinaisons linéaires des éléments de A . Il est clair que si $r \in K_2$, $s \in K_1$, $r+s$ n'est jamais une racine, ni nul, ce qui entraîne que les deux groupes ci-dessus commutent.

D'autre part, on sait par Exp. XXII, 5.4.5 , que $H = (P \cap Q)^0$ est défini par l'ensemble de racines $R_1 \cap R_2$, soit

$$R_1 \cap R_2 = [R_+ \cap \underline{\underline{N}} A_2] \cup [R_- \cap (-\underline{\underline{N}})A_1] \quad .$$

Comme $R_1 \cap R_2$ est clos, H est de type (RC) par définition, par Exp. XXII, 5.11.3 et 5.11.4 , on a

$$\mathrm{rad}^u(H) = \prod_{r \in K} P_r \quad ,$$

où K est l'ensemble des $r \in R_1 \cap R_2$, avec $r \notin -(R_1 \cap R_2)$. Comme la partie symétrique de $R_1 \cap R_2$ est évidemment $R \cap \underline{\underline{Z}} A$, on voit aussitôt que $K = K_1 \cup K_2$, ce qui termine la démonstration de (i) . La première assertion de (ii) résulte alors de (i) et de 2.10 ; démontrons la seconde. Comme $(P \cap Q)^0/\mathrm{rad}^u((P \cap Q)^0)$ est réductif, il possède un tore maximal T si la base est semi-locale. L'image réciproque de T dans $(P \cap Q)^0$ est un sous-groupe H de type (R) de G à fibres résolubles , et on a $H^u = \mathrm{rad}^u((P \cap Q)^0)$ (Exp. XXII, 5.6.9). Le schéma des tores maximaux de H est un fibré principal homogène sous H^u (loc. cit. 5.6.13), donc possède une section, car $H^1(S,H^u) = 0$.

4.3. Sous-groupes paraboliques opposés

4.3.1. Si G est un S-groupe réductif, on a défini en Exp. XXIV, 3.16.6 , un "automorphisme extérieur" canonique d'ordre 2 de G , donc un automorphisme canonique s_G d'ordre 2 de $\underline{\mathrm{Dyn}}(G)$, donc également un automorphisme d'ordre 2 de $\mathcal{B}(\underline{\mathrm{Dyn}}(G))$, que nous noterons également s_G ou s . Deux types de sous-groupes paraboliques $t , t' \in \mathcal{B}(\underline{\mathrm{Dyn}}(G))(S)$ seront dits opposés lorsque $t = s_G(t')$.

Théorème 4.3.2. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, P un sous-groupe parabolique de G . Si L est un sous-groupe de

evi de P, il existe un unique sous-groupe parabolique P' de G el que $P \cap P' = L$. Pour tout sous-groupe parabolique Q de G, les onditions suivantes sont équivalentes :

(i) Pour tout $s \in S$, $((P \cap Q)_{\overline{s}})^{\circ}$ (qui est lisse par .1.1.) est réductif.

(ii) $P \cap Q$ est un sous-groupe de Levi de P et de Q.

(iii) P et Q sont de types opposés, le couple (P,Q) est en position transversale (4.2.1).

(iv) P et Q sont de types opposés, $\mathrm{rad}^u(P) \cap Q = e$.

(v) $\mathrm{rad}^u(P) \cap Q = \mathrm{rad}^u(Q) \cap P = e$

(vi) Le morphisme canonique

$$\mathrm{rad}^u(P) \times_S Q \longrightarrow G$$

est une immersion ouverte.

(vi') Le morphisme canonique $\mathrm{rad}^u(P) \longrightarrow G/Q$ est une immersion ouverte.

(vii) Il existe une famille couvrante pour la topologie étale $\{S_i \longrightarrow S\}$, et pour chaque i un déploiement (T_i, M_i, R_i) de G_{S_i}, et une partie $R_i^{(1)}$ de R_i telle que P_{S_i} (resp. Q_{S_i}) soit le sous-groupe de type (R) de G_{S_i} contenant T_i et défini par $R_i^{(1)}$ (resp. $R_i^{(2)} = -R_i^{(1)}$).

Démonstration. Démontrons d'abord la seconde partie du théorème; on voit tout d'abord que (iii) $\Longleftrightarrow$ (vii) en vertu de 4.2.1 (vii) et de la définition de s_G dans le cas déployé (Exp. XXII, 3.16.2 (iv)); on a évidemment (ii) $\Longrightarrow$ (i) ; on a (vi') $\Longrightarrow$ (vi) par changement de base $G \longrightarrow G/Q$.

Supposons maintenant (vii) vérifié, et prouvons toutes les autres conditions; comme elles sont locales pour la topologie étale, on peut supposer $G = (G,T,M,R)$ déployé, P défini par la partie R' de R et Q par la partie $-R'$. Si L est le sous-groupe de type (R) de G contenant T défini par $R' \cap -R'$, il est clair par Exp. XXII, 5.11.3 que L est un sous-groupe de Levi commun à P et Q. Mais $P = L \cdot \mathrm{rad}^u(P)$, $Q = L \cdot \mathrm{rad}^u(Q)$, et par Exp. XXII, 5.6.7, $\mathrm{rad}^u(P) \cap Q = Q \cap \mathrm{rad}^u(P) = e$; donc $P \cap Q = L$, et on a prouvé (ii) et (v). Comme P et Q sont en position transversale, le morphisme canonique $P \longrightarrow G/Q$ induit une immersion ouverte $P / P \cap Q \longrightarrow G/Q$ (4.2.1); mais le morphisme canonique $\mathrm{rad}^u(P) \longrightarrow P/P \cap Q = P/L$ est un isomorphisme, ce qui fait qu'on a prouvé (vi'). Compte tenu de ce qu'on a déjà vu, toutes les assertions sont donc des conséquences de (vii).

Il nous suffit maintenant de prouver que l'une quelconque des assertions (i), (iv), (v), (vi) implique (vii); comme on a déjà prouvé l'équivalence de (vii) et de (iii), il suffit de faire la démonstration sur les fibres géométriques et on peut supposer que S est le spectre d'un corps algébriquement clos. Par 4.1.1, il existe un tore maximal T de G contenu dans $P \cap Q$. Soit R (resp. R_1, resp. R_2) l'ensemble des racines de G (resp. P, resp. Q) relativement à T.

Soit R_1^a la partie asymétrique de R_1 ($R_1^a = \{r \in R_1 , -r \notin R_1\}$). Introduisons de même R_2^a. On doit prouver $R_1' = -R_2$. La condition (i) entraîne que $R_1 \cap R_2$ est symétrique; soit $r \in R_1$; si $r \notin R_2$, $r \in -R_2$; si $r \in R_2$, alors $r \in R_1 \cap R_2 = -(R_1 \cap R_2) \subset -R_2$; on a donc $R_1 \subset -R_2$, donc par symétrie $R_1 = -R_2$. La condition (iv) entraîne $\mathrm{Card}(R_1) = \mathrm{Card}(R_2)$, $R_1^a \cap R_2 = \emptyset$; la deuxième condition est équivalente à $R_2 \subset -R_1$; la première donne alors $R_2 = -R_1$. La condition (v) entraîne $R_1^a \cap R_2 = R_2^a \cap R_1 = \emptyset$, donc $R_2 \subset -R_1$ et $R_1 \subset -R_2$, ce qui donne encore $R_2 = -R_1$. La condition (vi) entraîne $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{rad}^u(P)) \oplus \underline{\mathrm{Lie}}(Q) = \underline{\mathrm{Lie}}(G)$, ce

qui entraîne que R est la réunion disjointe de R_2 et R_1^a donc que $R_2 = -R_1$.

Ceci achève la démonstration de la seconde partie du théorème. Prouvons la première ; remarquons d'abord qu'en vertu de (vii) $\Longrightarrow$ (ii) , on a déjà démontré l'existence localement pour la topologie étale du groupe P' cherché; il reste donc à en prouver l'unicité, et cela peut se faire également localement pour la topologie étale. On peut donc supposer G déployé relativement à un tore maximal T de L , et P (resp. P') défini par une partie R_1 (resp. R_1') du système R des racines.
Par hypothèse $R_1 \cap R_1'$ est symétrique; raisonnant comme plus haut, on en tire $R_1' = -R_1$, ce qui prouve que P' est déterminé par P et L et achève la démonstration.

Définition 4.3.3. Deux sous-groupes paraboliques de G vérifiant les conditions équivalentes (i) à (vii) de 4.3.2 sont dits opposés. Si P est un sous-groupe parabolique de G , et si L est un sous-groupe de Levi de P (resp. et si T est un tore maximal de P) , on appelle sous-groupe parabolique opposé à P relativement à L (resp. T) l'unique sous-groupe parabolique Q de G tel que $P \cap Q = L$ (resp. tel que $P \cap Q$ soit l'unique sous-groupe de Levi de P contenant T , cf. 1.6 , ou encore tel que $P \cap Q \supset T$ et que P et Q soient opposés).

En vertu de 4.3.2 (iii) , on tire aussitôt de 4.2.4 et 4.2.5 des résultats parallèles; donnons-en un échantillon.

Corollaire 4.3.4. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, P et Q deux sous-groupes paraboliques de G .

(i) Pour que P et Q soient opposés, il faut et il suffit que pour tout point $s \in S$, $P_{\bar{s}}$ et $Q_{\bar{s}}$ soient opposés. Si $S' \longrightarrow S$ est un morphisme surjectif, et si $P_{S'}$ et $Q_{S'}$ sont opposés, alors P et Q sont opposés.

(ii) Le foncteur $\underline{Opp}(G)$, tel que pour $S' \longrightarrow S$ $\underline{Opp}(G)(S')$ soit l'ensemble des couples de sous-groupes paraboliques opposés de $G_{S'}$, est représentable par un sous-préschéma ouvert de $\underline{Par}(G)^2$. Le foncteur $\underline{Opp}(/P)$ tel que pour $S' \longrightarrow S$, $\underline{Opp}(/P)(S')$ soit l'ensemble des sous-groupes paraboliques de $G_{S'}$ opposés à $P_{S'}$ est représentable par un sous-préschéma ouvert relativement dense de $\underline{Par}_{s(\underline{t}(P))}(G)$.

(iii) Supposons P et Q opposés; soient P' et Q' deux sous-groupes paraboliques de G , P' étant de même type que P . Pour que P' et Q' soient opposés, il faut et il suffit que localement pour la topologie étale, le couple (P',Q') soit conjugué au couple (P,Q). (N.B. On verra au § 5 qu'on peut remplacer la topologie étale par la topologie de Zariski).

Corollaire 4.3.5. Soient S un préschéma , G un S-groupe réductif, P un sous-groupe parabolique de G .

(i) Le morphisme $\underline{Opp}(/P) \longrightarrow \underline{Lev}(P)$ (cf. 1.9) défini

ensemblistement par $Q \longmapsto P \cap Q$, est un isomorphisme ; $\underline{Opp}(/P)$ est un fibré principal homogène sous $rad^u(P)$ ($rad^u(P)$ opérant par automorphismes intérieurs). Si S est affine, il existe un sous-groupe parabolique de G opposé à P .

(ii) Supposons S semi-local ; soit s_i l'ensemble de ses points fermés; soit, pour chaque i , Q_i un sous-groupe parabolique de G_{s_i} , opposé à P_{s_i} . Il existe un sous-groupe parabolique Q de G , opposé à P , et tel que $Q_{s_i} = Q_i$ pour chaque i .

(iii) Le morphisme $\underline{Opp}(G) \longrightarrow \underline{PL}$ (cf. 3.15) défini ensemblistement par $(P,Q) \longmapsto (P, P \cap Q)$ est un isomorphisme.

Tout cela résulte de la première partie du théorème et de 1.9 , 2.3 et 2.8.

Remarque 4.3.6. Soient P et Q deux sous-groupes paraboliques opposés de G . Le "morphisme produit" $G \times_S G \longrightarrow G$ induit des isomorphismes

$$rad^u(P) \times_S Q \xrightarrow{\sim} P.Q$$

$$P \times_S rad^u(Q) \xrightarrow{\sim} P.Q \quad ,$$

$P.Q$ étant le sous-préschéma ouvert de G , image faisceautique de $P \times_S Q$, introduit en 4.2.6. Cela résulte en effet de 4.3.2 (ou de 4.2.5 (ii)) et du fait que $P \cap Q$ est un sous-groupe de Levi de P et de Q , donc que $P = rad^u(P) . P \cap Q$ et $Q = rad^u(Q) . P \cap Q$.

On a de même un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{rad}^u(P) & \hookrightarrow & G/Q \\ \downarrow\wr & & \downarrow\wr \\ \underline{\mathrm{Opp}}(/P) & \hookrightarrow & \underline{\mathrm{Par}}_{\underline{t}(Q)}(G) \end{array} ,$$

où les flèches verticales sont induites par $g \longmapsto \mathrm{int}(g)\ Q$.

4.4. Position osculatrice

Proposition 4.4.1. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif , P et Q deux sous-groupes paraboliques de G . Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $P \cap Q$ est un sous-groupe parabolique de G .

(ii) $P \cap Q$ contient localement pour la topologie étale un groupe de Borel de G .

(iii) $P \cap Q$ contient localement pour la topologie étale un tore maximal de G . Pour tout $S' \longrightarrow S$ et tout tore maximal T de $G_{S'}$ contenu dans $P_{S'}$ et $Q_{S'}$, l'opposé de $P_{S'}$ relativement à T est en position transversale relativement à $Q_{S'}$.

(iv) Il existe une famille couvrante pour la topologie étale $\{S_i \longrightarrow S\}$, et pour chaque i un tore maximal T_i de G_{S_i} contenu dans P_{S_i} et Q_{S_i} , et tel que l'opposé de P_{S_i} relativement à T_i soit en position transversale relativement à Q_{S_i} .

(v) Il existe une famille couvrante pour la topologie étale $\{S_i \longrightarrow S\}$, et pour chaque i un déploiement (T_i, M_i, R_i) de G_{S_i} tel que P_{S_i} (resp. Q_{S_i}) soit le sous-groupe de type (R) de G_{S_i} contenant T_i et défini par un ensemble de racines $R_i^{(1)}$ (resp. $R_i^{(2)}$), $R_i^{(1)} \cap R_i^{(2)}$ contenant un système de racines positives de R.

De plus, si ces conditions sont vérifiées, on a (avec les notations de 3.2) $\underline{t}(P \cap Q) = \underline{t}(P) \cap \underline{t}(Q)$.

On a (v) $\Longrightarrow$ (ii) et (iii) $\Longrightarrow$ (iv) trivialement. D'autre part, (ii) $\Longrightarrow$ (i) par 1.18. On a (iv) $\Longrightarrow$ (v) : en effet, on peut supposer G déployé, P (resp. Q) défini par l'ensemble de racines R_1 (resp. R_2); l'opposé de P est alors défini par $-R_1$, et on est ramené au lemme 4.2.2. On prouve (i) $\Longrightarrow$ (iii) par déploiement de la même manière. Enfin, la dernière assertion du théorème peut se démontrer localement pour la topologie étale; on peut supposer que $P \cap Q$ contient un groupe de Borel B de G et on est ramené à 3.7.

Définition 4.4.2. Deux sous-groupes paraboliques de G vérifiant les conditions (i) à (v) de 4.4.1 sont dits en position osculatrice.

Corollaire 4.4.3. Soient P et Q deux sous-groupes paraboliques en position osculatrice et soient P' et Q' deux sous-groupes

paraboliques de G , de même type que P et Q respectivement; pour que P' et Q' soient en position osculatrice, il faut et il suffit que le couple (P',Q') soit conjugué au couple (P,Q), localement pour la topologie étale.

Il suffit de prouver que si P et P' sont en position osculatrice de Q , ils sont conjugués, localement pour (ét) , par une section de Q . Or $P \cap Q$ et $P' \cap Q$ sont deux sous-groupes paraboliques de même type contenus dans Q , donc sont conjugués, localement pour (ét) par une section de Q , en vertu de la partie (ii) du lemme ci-dessous. On peut donc supposer $P \cap Q = P' \cap Q$; on a alors $P = P'$, par la partie (i) du même lemme :

Lemme 4.4.4. Soient P , P' et Q trois sous-groupes paraboliques du S-groupe réductif G .

(i) Pour que $P = P'$, il faut et il suffit que P et P' soient en position osculatrice et de même type .

(ii) Si $P \subset Q$, $P' \subset Q$, et si $g \in G(S)$ est tel que $\mathrm{int}(g)\, P$ et P' soient en position osculatrice , alors $g \in Q(S)$.

La partie (i) résulte trivialement de la dernière assertion de 4.4.1. Démontrons (ii) : Q et $\mathrm{int}(g)\, Q$ contiennent $P' \cap \mathrm{int}(g)P$, donc sont en position osculatrice; ils coïncident par (i) , donc $g \in \underline{\mathrm{Norm}}_G(Q)(S) = Q(S)$.

Remarquons que les assertions (iii) et (iv) du théorème

donnent aussitôt :

Corollaire 4.4.5. Soient P, P' et Q trois sous-groupes paraboliques du S-groupe réductif G, contenant le même tore maximal T de G. Supposons P et P' opposés relativement à T. Pour que Q soit en position osculatrice relativement à P, il faut et il suffit qu'il soit en position transversale relativement à P'. Sous ces conditions $P \cap Q$ est aussi en position transversale relativement à P'.

Corollaire 4.4.6. Soient P et Q deux sous-groupes paraboliques de G contenant le même tore maximal T. Pour que P et Q soient en position transversale, il faut et il suffit qu'il existe deux sous-groupes paraboliques P' et Q' de G, opposés relativement à T, et contenus respectivement dans P et Q. On peut même choisir $\underline{t}(P') = \underline{t}(P) \cap s\underline{t}(Q)$.

La condition est évidemment suffisante (4.2.1 (i) et 4.3.2 (iii)). Montrons qu'elle est nécessaire; soit P^- (resp. Q^-) l'opposé de P (resp. Q) relativement à T. Par 4.4.5, $P^- \cap Q$ est en position transversale relativement à P et Q^-, donc aussi à $P \cap Q^-$ par une nouvelle application de 4.4.5, de plus

$$\underline{t}(P^- \cap Q) = \underline{t}(P^-) \cap \underline{t}(Q) = s\underline{t}(P) \cap s\underline{t}(Q^-) = s(\underline{t}(P) \cap \underline{t}(Q^-))$$
$$= s\underline{t}(P \cap Q^-) ,$$

donc $P^- \cap Q = P'$ et $P \cap Q^- = Q'$ sont opposés (4.3.2 (iii)); mais $P' \cap Q' \supset T$, donc ils sont bien opposés relativement à T .

4.5. Position standard

Dans ce n° , nous indiquons brièvement comment certains des résultats précédents se généralisent.

4.5.1. Si P et Q sont deux sous-groupes paraboliques du S-groupe réductif G , les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $P \cap Q$ est lisse.

(ii) $P \cap Q$ est un sous-groupe de type (R) (resp. de type (RC)) de G .

(iii) $P \cap Q$ contient localement pour la topologie (fpqc) un tore maximal de G .

(iv) $P \cap Q$ contient localement pour la topologie de Zariski un tore maximal de G .

Lorsque les conditions précédentes sont réalisées, on dit que P et Q sont en position mutuelle standard ; c'est par exemple le cas si P et Q sont en position transversale, ou en position osculatrice, ou si la base est le spectre d'un corps . C'est une notion stable par extension de la base et locale pour la topologie (fpqc).

4.5.2. Soient (P,Q) et (P',Q') deux couples de sous-groupes paraboliques de G, en position standard, et soit H le sous-foncteur de G défini comme suit; $H(S')$ est l'ensemble des $g \in G(S')$ tels que $\mathrm{int}(g)\, P = P'$, $\mathrm{int}(g)\, Q = Q'$. C'est un sous-préschéma fermé de G, lisse sur S et formellement principal homogène sous $P \cap Q$. On en déduit que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) (P,Q) et (P',Q') sont conjugués localement pour (fpqc),

(ii) (P,Q) et (P',Q') sont conjugués localement pour la topologie étale.

(iii) (P,Q) et (P',Q') sont conjugués sur chaque fibre géométrique.

On dit alors que les couples (P,Q) et (P',Q') ont même <u>type de position mutuelle</u>. C'est une notion stable par changement de base et locale pour la topologie (fpqc).

4.5.3. Soit $\underline{\mathrm{Stand}}(G)$ le sous-foncteur de $\underline{\mathrm{Par}}(G) \times_S \underline{\mathrm{Par}}(G)$ "formé des couples en position mutuelle standard". Alors $\underline{\mathrm{Stand}}(G)$ est représentable, il existe un S-préschéma étale et fini $\underline{\underline{T.St}}$. ("préschéma des types de position mutuelle standard"), et un morphisme lisse, de présentation finie, à fibres géométriques irréductibles (et donc en particulier fidèlement plat)

$$\underline{\underline{t}}_2 : \underline{\mathrm{Stand}}(G) \longrightarrow \underline{\underline{T.St}}$$

qui est un quotient de $\underline{Stand}(G)$ par l'action de G : deux sections de $\underline{Stand}(G)$ (sur un $S' \longrightarrow S$ quelconque), ont même type de position mutuelle si et seulement si elles ont même image par $\underline{t}_2$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \underline{t}_2 : \underline{Stand}(G) & \longrightarrow & \underline{T.St} \\ \downarrow & & \downarrow q \\ \underline{t} \times \underline{t} : \underline{Par}(G) \times_S \underline{Par}(G) & \longrightarrow & \mathcal{B}(\underline{Dyn}(G)) \times_S \mathcal{B}(\underline{Dyn}(G)) \end{array} ,$$

où le morphisme q peut se décrire par descente de la manière suivante : si (P,Q) est un couple de sous-groupes paraboliques de G, en position relative standard, et si T est un tore maximal de $P \cap Q$, alors le morphisme $\underline{Norm}_G(T) \longrightarrow \underline{Stand}(G)$ défini ensemblistement par $n \longmapsto (P, int(n)Q)$ induit un isomorphisme

$$W_P(T) \backslash W_G(T) / W_Q(T) \xrightarrow{\sim} q^{-1}(\underline{t}(P), \underline{t}(Q)) .$$

(Le premier membre désigne le faisceau des doubles classes,...). Toutes ces assertions se démontrent sans difficulté [remarquer en particulier que $\underline{t}_2^{-1}(\underline{t}_2(P,Q)) \simeq G/P \cap Q$] .

4.5.4. Soit maintenant P un sous-groupe parabolique fixé de G , et soit $\underline{Par}(G;P)$ le foncteur des sous-groupes paraboliques de G , en position standard relativement à P . Pour chaque $t \in \mathcal{B}(\underline{Dyn}(G))(S)$, posons de même $\underline{Par}_t(G;P) = \underline{Par}(G;P) \cap \underline{Par}_t(G)$. On voit aussitôt que les deux foncteurs précédents s'obtiennent à partir de $\underline{Stand}(G)$ par produits fibrés, donc sont représentables par des S-préschémas

lisses et de présentation finie sur S , à fibres non vides.
On a un morphisme canonique $\underline{\underline{t}}_P$ induit par $\underline{\underline{t}}_2$
[par $\underline{\underline{t}}_P(Q) = \underline{\underline{t}}_2(P,Q)$]

$$\underline{\underline{t}}_P : \underline{\mathrm{Par}}_t(G;P) \longrightarrow q^{-1}(\underline{\underline{t}}(P),t)$$

qui est lisse et de présentation finie, à fibres géométriques irréductibles. Le morphisme canonique $\underline{\mathrm{Par}}_t(G,P) \longrightarrow \underline{\mathrm{Par}}_t(G)$ est un monomorphisme surjectif , et peut donc être considéré comme une décomposition cellulaire de $\underline{\mathrm{Par}}_t(G)$ [indexée par l'ensemble des composantes connexes de $q^{-1}(\underline{\underline{t}}(P),t)$] .

4.5.5. Supposons maintenant que le type t soit de la forme $\underline{\underline{t}}(Q)$, où Q est un sous-groupe parabolique de G , en position standard relativement à P , et que $P \cap Q$ contienne un tore maximal T .
Alors $\underline{\mathrm{Par}}_t(G) \simeq G/Q$, $q^{-1}(\underline{\underline{t}}(P),t) \simeq W_P(T) \backslash W_G(T) / W_Q(T)$, ce qui donne un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{Par}}_{\underline{\underline{t}}(Q)}(G;P) & \xrightarrow{\ f\ } & W_P(T) \backslash W_G(T) / W_Q(T) \\ {\scriptstyle i}\ \downarrow & & \\ \underline{\mathrm{Par}}_{\underline{\underline{t}}(Q)}(G) & \simeq & G/Q \end{array}$$

où i est un monomorphisme surjectif, et où f est lisse et de présentation finie, à fibres géométriques irréductibles. De plus, si Q_1 et Q_2 sont deux sections de $\underline{\mathrm{Par}}_{\underline{\underline{t}}(Q)}(G;P)$ (sur un $S' \longrightarrow S$),

c'est-à-dire deux sous-groupes paraboliques de $G_{S'}$ conjugués (loc. pour (fpqc)) à Q, et en position standard relativement à $P_{S'}$, Q_1 et Q_2 sont conjugués par une section de P (loc. pour (fpqc)) si et seulement si $f(Q_1) = f(Q_2)$. Si S est le spectre d'un corps k algébriquement clos, on trouve ainsi la relation

$$P(k) \backslash G(k) / Q(k) \simeq W_P(T)(k) \backslash W_G(T)(k) / W_Q(T)(k) .$$

De manière générale, si on suppose que le préschéma $W_P(T) \backslash W_G(T) / W_Q(T)$ est constant et de la forme E_S (ce qui a lieu par exemple lorsque G est déployé relativement à T et S est connexe), les $f^{-1}(e)$, $e \in E$, forment une décomposition de $\underline{\mathrm{Par}}_{\underline{t}(Q)}(G;P)$ en sous-préschémas ouverts et fermés, qui sont des espaces homogènes sous P, lisses et de présentation finie sur S, à fibres géométriques irréductibles.

4.5.6. Revenons à la situation générale de 4.5.4. Le préschéma $t^{-1}(\underline{t}(P),t)$ possède toujours deux sections particulières, correspondant respectivement aux types "position transversale" et "position osculatrice". L'image réciproque de la première section est un ouvert relativement dense de $\underline{\mathrm{Par}}_t(G)$ comme on l'a vu plus haut, c'est la cellule de dimension relative maximum de la décomposition. L'image réciproque de la seconde section est vraisemblablement un sous-préschéma fermé de $\underline{\mathrm{Par}}_t(G)$; c'est la cellule de dimension relative minimum de la décomposition.

5. Théorème de conjugaison

Théorème 5.1. Soient S un schéma semi-local , G un S-groupe réductif, P et P' deux sous-groupes paraboliques opposés (4.3.3.) de G . Alors

$$\mathrm{rad}^u(P)(S) \quad P'.P = G ,$$

i.e. la réunion des ouverts u P'.P (4.3.6) , pour u parcourant $\mathrm{rad}^u(P)(S)$ est G tout entier.

La démonstration se fait en plusieurs étapes :

5.1.1. Il suffit de faire la démonstration dans le cas où S est le spectre d'un corps k ; cela résulte aussitôt de 2.6.

5.1.2. Soit $L = P \cap P'$. Supposons que L possède un groupe de Borel B_L ; soit T un tore maximal de B_L (Exp. XXII, 5.9.7); on vérifie aussitôt que $B = B_L \cdot \mathrm{rad}^u(P)$ est un groupe de Borel de P ; soit B' le groupe de Borel de G opposé à B relativement à T (i.e. tel que $B \cap B' = T$) . On a $B' \subset P'$ comme on le vérifie aussitôt en déployant G relativement à T . Prouvons que

$$(x) \quad B^u(S) \quad B' . B \subset \mathrm{rad}^u(P)(S) \quad P' . P .$$

Comme on a $B^u(S) \subset P(S) = \mathrm{rad}^u(P)(S) \cdot L(S) \subset \mathrm{rad}^u(P)(S)\ P'(S)$, il suffit de prouver que $B' . B \subset P' . P$, ce qui est évident.

Il résulte de (x) qu'il suffit de démontrer 5.1 pour le couple (B,B') .

5.1.3. Le théorème est vrai si k est algébriquement clos; en effet, la condition de 5.1.2 est vérifiée, et on conclut par Exp. XXII, 5.7.10.

5.1.4. Le théorème est vrai lorsque k est un corps infini. En effet, $\mathrm{rad}^u(P)(k)$ est dense dans $\mathrm{rad}^u(P)(\bar{k})$ d'après 2.7 , et le théorème est vrai pour $\bar{k}$.

5.1.5. On est donc ramené au cas où k est un corps fini. Or Bor(L) est un espace homogène lisse de L ; il résulte donc du théorème de LANG (Am. J. of Maths., 78, 1956) que L possède un groupe de Borel B_L . Par 5.1.2 , on peut donc supposer que $P = B$ et $P' = B'$ sont des groupes de Borel. On note $T = B \cap B'$.

5.1.6. Soit K la clôture algébrique de k ; choisissons un épinglage du triplet (G_K,B_K,T_K) , soit R_+ (resp. R_o) , l'ensemble des racines positives (resp. simples). En vertu de Exp. XXII, 5.7.2 , il suffit de prouver que pour tout $r \in R_o$, on a

$$(1)\quad u_r\ B'^u(K) \subset B^u(k)\ B'^u(K)\ B(K) \ .$$

Soient r_i les différentes racines conjuguées de r sur k (ce sont des éléments de R_o , car B est "défini sur k"), et soit R' l'ensemble des racines combinaison linéaire des r_i . Notons

$R'_- = R' \cap R_-$. Comme "R' est défini sur k", il existe un sous-tore Q de T , tel que Q_K soit le tore maximal de noyau commun des r_i .

Notons $Z = \underline{Cent}_G(Q)$, $B_Z = B \cap Z$, $B'_Z = B' \cap Z$ (cf. Exp. XXII, 5.10.2) . Montrons qu'il suffit de vérifier l'assertion cherchée dans Z , c'est-à-dire

$$(2) \quad u_r \cdot B'^u_Z(K) \subset B^u_Z(k) \quad B'^u_Z(K) \quad B_Z(K) \ .$$

On a $B'^u_{Z\,K} = \prod_{r \in R'_-} P_r$; soit R" le complémentaire de R' dans R , posons

$$V = \prod_{r \in R'' \cap R_-} P_r \ .$$

On a aussitôt $(B'^u)_K = (B'^u_Z)_K \cdot V$, et $B_{Z\,K}$ normalise V (Exp. XXII, 5.6.7). On tire donc de (2) successivement

$$u_r \quad B'^u(K) = u_r \quad B'^u_Z(K)\ V(K)$$

$$\subset B^u_Z(k) \quad B'^u_Z(K)\ B_Z(K)\ V(K)$$

$$\subset B^u_Z(k) \quad B'^u_Z(K)\ V(K)\ B_Z(K)$$

ce qui entraîne aussitôt (1) .

Nous sommes donc ramené au cas où $G = Z$, c'est-à-dire où le groupe de Galois de K sur k opère transitivement sur les racines simples.

5.1.7. L'assertion à démontrer est équivalente au fait que G/B est la réunion des translatés de l'ouvert image de B'^u par $B^u(k)$, assertion qui ne change pas si on remplace G par son groupe adjoint (ou d'ailleurs par n'importe quel groupe donnant le même groupe adjoint).

On peut donc supposer G adjoint.

5.1.8. Considérons alors le diagramme de Dynkin de G_K. Le groupe de Galois opère transitivement sur ce diagramme de Dynkin. Mais ce groupe de Galois n'a que des quotients cycliques et le diagramme de Dynkin n'a pas de cycles. Il en résulte aussitôt que ce diagramme est de type $n\ A_1$, $n \geqslant 0$, ou $m\ A_2$, $m \geqslant 0$. Utilisant la décomposition canonique de Exp. XXIV, 5.9, on peut écrire

$$G = \prod_{D/k} G_o \ ,$$

où D est un K-schéma <u>fini</u> et G_o est soit un tore, soit de type A_1, soit de type A_2.

Par Exp. XXIV, 5.12, B provient d'un groupe de Borel B_o de G_o, T d'un tore maximal T_o de G_o ; B' provient du groupe de Borel B'_o de G_o opposé à B_o relativement à T_o. On a

$$B'^u(k) = B'^u_o(D) \ ,$$

$$B'^u.T.B^u = \prod_{D/k} B'^u_o . T_o . B^u_o \ ,$$

et il nous suffit de démontrer l'assertion cherchée sur le triplet (G_o, B_o, T_o).

5.1.9. On peut donc supposer que G est de type 0 , A_1 ou A_2 . Comme G possède un groupe de Borel B , G est quasi-déployable relativement à B (Exp. XXIV, 3.9.1), donc déployable s'il est de type 0 , ou A_1 . Comme le théorème a déjà été prouvé dans le cas déployé (Exp. XXII 5.7.10), il ne reste plus que le cas A_2 à traiter. Par Exp. XXIV, 3.11 il existe un morphisme $E \longrightarrow \mathrm{Spec}(k)$, fibré principal galoisien sous le groupe $\underline{\underline{Z}}/2\underline{\underline{Z}}$ des automorphismes du diagramme de Dynkin de type A_2 tel que $G = \underline{\underline{Q.Ep}}_{E/\mathrm{spec}(k)}(A_2)$. Si E possède une section, G est déployable et le théorème est démontré. Sinon, on a nécessairement $E = \mathrm{Spec}(k')$, où k' est une extension quadratique de k . Enfin, comme on l'a vu en 5.1.7 , on peut supposer G simplement connexe (i.e. une forme de $\underline{\underline{SL}}_{3\ k}$).

5.1.10. On est donc dans la situation suivante : on a un corps fini k , une extension quadratique k' de k . Le groupe $\underline{\underline{SL}}_{3\ k'}$ des matrices 3 x 3 de déterminant 1 , est épinglé comme suit : le tore maximal est le groupe des matrices diagonales, le groupe de Borel est le groupe des matrices triangulaires supérieures, les "épingles" les éléments

$$u_r = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On voit aussitôt que la grosse cellule Ω est définie par

$$x = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \Omega\ (S) \Longleftrightarrow \text{a inversible, a e - b d inversible,}$$

et que

$$B^u(k) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \bar{x} & z \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \; x,z \in k' \; , \; z + \bar{z} = x\,\bar{x} \right\} .$$

Il nous faut prouver l'inclusion (1) , c'est-à-dire montrer que pour tous $a,b,c \in K$ (clôture algébrique de k), il existe $x,z \in k'$, avec $z + \bar{z} = x\,\bar{x}$ et

$$(1) \qquad \begin{pmatrix} 1 & \bar{x} & z \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \in \Omega(K) \quad .$$

- Si $a \neq -1$, on prend $x = z = 0$.
- Si $a = -1$, les conditions à réaliser s'écrivent

$$\begin{cases} z + \bar{z} = x\,\bar{x} \; , \\ b\,z - \bar{x} \neq 0 \; , \\ (b + c)\,\bar{z} + b\,x - 1 \neq 0 \; . \end{cases}$$

Soit q le nombre d'éléments de k ($q \geqslant 2$). On sait que pour tout $m \in k$, l'équation $z + \bar{z} = m$, avec $z \in k'$, a q solutions.

- Si $b = 0$, prenons $x = 1$; on doit résoudre $z + \bar{z} = 1$, $c\,\bar{z} \neq 1$, ce qui est toujours possible par la remarque précédente.
- Si $b \neq 0$, prenons $x = 0$; on doit résoudre

$$z + \bar{z} = 0 \; , \; z \neq 0 \; , \; (b+c)\,z \neq 1 \; .$$

Cela est toujours possible si $q \geqslant 3$. Si $k = \mathbb{F}_2$, c'est possible si $b + c \neq 1$, on peut prendre $z = 1$.

- Il ne reste donc à traiter que le cas $k = \mathbb{F}_2$, $b+c = 1$, $b \neq 0$.

Le système s'écrit alors

$$z + \bar{z} = x\,\bar{x}\ ,\ b\,z \neq \bar{x}\ ,\ \bar{z} + b\,x \neq 1\ .$$

Si $b = 1$ (resp. $b \notin k'$), faisons $x = 1$; alors les deux dernières conditions s'écrivent $z \neq b^{-1}$, $1 - b$, et elles sont conséquences de $z + \bar{z} = 1$ qui a des solutions.
Enfin si $b \in k'$, $b \notin k$, on peut prendre $x = \bar{b}$, $z = b$.

C Q F D

Corollaire 5.2. Soient S un schéma semi-local, G un S-groupe réductif, P et P' deux sous-groupes paraboliques opposés de G. L'application canonique

$$\mathrm{rad}^u(P)(S)\ .\mathrm{rad}^u(P')(S) \longrightarrow G/P\ (S)$$

est surjective (en particulier, on a $G/P(S) = G(S)/P(S)$).
Tout sous-groupe parabolique Q de G, de même type que P, est de la forme $\mathrm{int}(uu')\ P$ avec $u \in \mathrm{rad}^u(P)(S)$ et $u' \in \mathrm{rad}^u(P')(S)$.

La seconde assertion est évidemment équivalente à la première, démontrons celle-ci. Soient s_i les points fermés de S, soit V l'ouvert de G/P image de P' (et isomorphe à $\mathrm{rad}^u(P')$, cf. 4.3.6) et soit $x \in G/P\ (S)$. Par 5.1 , il existe pour chaque i une section $u_i \in \mathrm{rad}^u(P)(k(s_i))$ telle que $u_i\, x_{s_i}$ soit une section de V_{s_i}. Si $u \in \mathrm{rad}^u(P)(S)$ relève les u_i (2.6), ux est une section de V, car une telle assertion se vérifie sur les fibres fermées. Mais $\mathrm{rad}^u(P')(S) \xrightarrow{\sim} V(S)$, est bijectif, et on conclut aussitôt.

Corollaire 5.3. Soient S un schéma semi-local , G un S-groupe réductif, P , P' et Q trois sous-groupes paraboliques de G . Il existe $g \in G(S)$ tel que int(g) Q soit en position transversale relativement à P et P' .

Avec les notations de 4.2.4 (ii) , on doit vérifier que l'ouvert relativement dense $\underline{Gen}(Q/P) \cap \underline{Gen}(Q/P')$ de G possède une section sur S . En fait, choisissons un sous-groupe parabolique de G opposé à Q (4.3.5 (i)) , soit Q_1 , et posons $U = rad^u(Q)$, $U' = rad^u(Q_1)$. Nous allons montrer qu'il existe $g \in U(S)\ U'(S)$ répondant à la question; sous cette forme, il résulte de 4.2.4 (i) et 2.6 qu'il suffit de vérifier l'assertion sur les fibres aux points fermés de S , et on peut donc supposer que S est le spectre d'un corps k .

Si k est algébriquement clos, il existe $g \in G(k)$ répondant à la question mais g s'écrit u u' q avec $u \in U(k)$, $u' \in U'(k)$, $q \in Q(k)$ (5.1) , et $int(uu')\,Q = int(g)\,Q$.

Si k est infini , considérons l'ouvert V de $U \otimes_k U'$ défini par le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} U \otimes_k U' & \longrightarrow & G \\ \uparrow & & \uparrow \\ V & \longrightarrow & \underline{Gen}(Q/P) \cap \underline{Gen}(Q/P') \end{array} ;$$

comme $V(\bar{k}) \neq \emptyset$ en vertu de ce qu'on vient de voir, V est dense dans $U \otimes_k U'$, donc possède une section par 2.7.

Si k est fini , P (resp. P') possède un groupe de Borel B (resp. B') , en vertu du théorème de Lang (cf. 5.1.5), les schémas $\underline{Bor}(P) \simeq \underline{Bor}(P/rad^u(P))$ et $\underline{Bor}(Q) \simeq \underline{Bor}(Q/rad^u(Q))$ étant lisses. Si B_1 est un sous-groupe de Borel opposé à B (4.3.5 (i)), il existe $a \in B^u(k)$ et $a_1 \in B_1^u(k)$ avec $int(a\ a_1)\ B = B'$ (5.2) ; alors $B_o = int(a\ a_1)\ B_1 = int(a)\ B_1$ est opposé à B' et à B ; si Q_o est l'unique sous-groupe parabolique de G contenant B_o et de même type que Q (3.8) , Q_o est en position transversale relativement à P et P' (4.2.1 (vi)) . D'autre part par 5.2 , Q_o s'écrit $int(uu')\ Q$ avec $u' \in U'(k)$, $u \in U(k)$ ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire 5.4. Soient S un schéma semi-local , G un S-groupe réductif, P et Q deux sous-groupes paraboliques de G . Il existe $g \in G(S)$ tel que $int(g)\ P$ soit en position osculatrice relativement à Q , i.e. (4.4.2) que $int(g)P \cap Q$ soit un sous-groupe parabolique de G .

En effet, en vertu de 4.3.5 (i) il existe un sous-groupe parabolique P' de G , opposé à P . En vertu de 5. 3. il existe un sous-groupe parabolique P_1' de G de même type que P' , en position transversale relativement à P et Q . Si T est un tore maximal de $P_1' \cap Q$ (4.2.7 (ii)), et si P_1 est l'opposé de P_1' relativement à T , P_1 et Q sont en position osculatrice, en vertu de 4.4.5. D'autre part, P et P_1 étant opposés à P_1' , il existe $g \in rad^u(P_1')(S)$ avec $int(g)\ P = P_1$ (4.3.5 (i)), cqfd.

Remarquons d'ailleurs que pour la même raison, il existe $u \in \mathrm{rad}^u(P)(S)$ avec $\mathrm{int}(u)\, P' = P'_1$, donc que g s'écrit $\mathrm{int}(u)\, u'$ avec $u' \in \mathrm{rad}^u(P')(S)$, ce qui donne $P_1 = \mathrm{int}(u\, u'\, u^{-1})\, P = \mathrm{int}(uu')\, P$ et redémontre au passage 5.2.

Les énoncés 5.3 et surtout 5.4 sont les résultats essentiels de ce paragraphe. Enonçons d'abord quelques conséquences de 5.4.

Corollaire 5.5. Soient S un schéma semi-local, G un S-groupe réductif.

(i) Si P et Q sont deux sous-groupes paraboliques de G et si $\underline{t}(P) \subset \underline{t}(Q)$ (cf. 3.3), il existe $g \in G(S)$ tel que $\mathrm{int}(g)\, P \subset Q$.

(ii) Soient

$$P_1 \supset P_2 \supset \ldots \supset P_n$$

$$P'_1 \supset P'_2 \supset \ldots \supset P'_n$$

deux chaînes de sous-groupes paraboliques de G telles que $\underline{t}(P_i) = \underline{t}(P'_i)$. Il existe $g \in G(S)$ tel que $\mathrm{int}(g)\, P_i = P'_i$ pour chaque i.

(iii) Soient P, Q, P', Q' quatre sous-groupes paraboliques de G, avec $\underline{t}(P) = \underline{t}(P')$, $\underline{t}(Q) = \underline{t}(Q')$. Si les couples (P,P') et (Q,Q') sont en position transversale (resp. osculatrice), il

existe $g \in G(S)$ avec $\mathrm{int}(g)\, P = P'$, $\mathrm{int}(g)\, Q = Q'$.

(iv) Soient P et P' deux sous-groupes paraboliques de même type, L (resp. L') un sous-groupe de Levi de P (resp. P'). Il existe $g \in G(S)$ avec $\mathrm{int}(g)\, P = P'$, $\mathrm{int}(g)\, L = L'$.

Démonstration : (i) résulte aussitôt de 5.4 ; (ii) se démontre par récurrence sur n , le cas $n = 0$ étant trivial; on peut donc supposer $P_i = P'_i$ pour $i = 1,\ldots,n-1$; par 5.2 il existe $g \in G(S)$ avec $\mathrm{int}(g)\, P_n = P'_n$; mais alors P_n et $\mathrm{int}(g)\, P_n$ sont contenus dans $P_{n-1} = P'_{n-1}$, donc $g \in P_{n-1}(S)$ (4.4.4 (ii)) et $\mathrm{int}(g)\, P_i = P'_i$ pour $i = 1,\ldots,n$. D'autre part, (iv) résulte aussitôt de 5.2 et de 1.8. Démontrons (iii) dans le cas "position transversale"; l'assertion est une conséquence de (iv) lorsque les types de P et Q sont opposés (4.3.3 (iii)); dans le cas général, on peut en vertu de 4.2.7 (iii) et 4.4.6 , trouver des sous-groupes paraboliques P_1, P'_1, Q_1, Q'_1 de P, P', Q, Q' respectivement tels que P_1 et P'_1 soient opposés, ainsi que Q_1 et Q'_1 , et que $\underline{\underline{t}}(P_1) = \underline{\underline{t}}(P'_1)$; il existe donc $g \in G(S)$ avec $\mathrm{int}(g)\, P_1 = P'_1$, $\mathrm{int}(g)\, Q_1 = Q'_1$, et on peut supposer $P_1 = P'_1$ et $Q_1 = Q'_1$; mais alors P et P' sont en position osculatrice et de même type , donc $P = P'$ (4.4.4 (i)) ; pour la même raison $Q = Q'$. Il nous reste à démontrer l'assertion (iii) dans le cas "position osculatrice". En vertu du théorème de conjugaison (5.2), on peut supposer $P = P'$; en vertu du même théorème, on peut trouver $g \in G(S)$ avec $\mathrm{int}(g)\, Q = Q'$; mais alors $g \in P(S)$ par 4.4.4 (ii) et $\mathrm{int}(g)P = P = P'$.

Définition 5.6. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, P un sous-groupe parabolique de G . On dit que P est minimal si chaque fois que G est un sous-groupe parabolique de G contenu dans P , on a Q = P .

On notera que ce n'est pas une notion stable par passage aux fibres en général.

Corollaire 5.7. Soient S un schéma semi-local, G un S-groupe réductif .

(i) Soient $t,t' \in \mathcal{B}(\underline{Dyn}(G))(S)$. S'il existe dans G un sous-groupe parabolique de type t et un sous-groupe parabolique de type t' il existe un sous-groupe parabolique de type $t \cap t'$. En particulier, il existe un plus petit élément t_{min} dans l'ensemble des $\underline{t}(P)$, P parcourant l'ensemble des sous-groupes paraboliques de G .

(ii) Tout sous-groupe parabolique de G contient un sous-groupe parabolique minimal. Pour qu'un sous-groupe parabolique de G soit minimal, il faut et il suffit qu'il soit de type t_{min} . Deux sous-groupes paraboliques minimaux de G sont conjugués par un élément de G(S) .

Cela résulte aussitôt de 5.4 et 5.5 (i) .

Remarque 5.8. Un sous-groupe parabolique opposé à un sous-groupe parabolique minimal est également minimal ; ceci entraîne

$s(t_{min}) = t_{min}$.

Corollaire 5.9. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, P un sous-groupe parabolique de G . Le morphisme canonique

$$G \longrightarrow G/P = X$$

fait de G un X-fibré localement trivial (au sens de Zariski) de groupe P_X . Si L est un groupe de Levi de P , le morphisme canonique (cf. 3.12)

$$G \longrightarrow G/L = Y$$

fait de G un Y-fibré localement trivial (au sens de Zariski) de groupe L_Y.

Il suffit de prouver que si on a un morphisme $S' \longrightarrow S$, où S' est local et un morphisme $S' \longrightarrow X$ (resp. $S' \longrightarrow Y$) , il se remonte en un morphisme $S' \longrightarrow G$. Autrement dit, on peut supposer S local et on doit montrer que $G(S) \longrightarrow X(S)$ (resp. $G(S) \longrightarrow Y(S)$) est surjective. La première assertion a été démontrée en 5.2 ; démontrons la seconde. Soit $y \in Y(S)$, son image canonique dans $X(S)$ provient d'un $g \in G(S)$; la projection y' de g dans $Y(S)$ a donc même projection que y dans $X(S)$. Il existe donc un unique $u \in \mathrm{rad}^u(P)(S)$ avec $y'u = y$, et la projection de gu dans $Y(S)$ est bien y .

Corollaire 5.10. Soient S un schéma semi-local , G un S-groupe réductif

(i) Soient P un sous-groupe parabolique de G , L un sous-groupe de Levi de P . Les applications canoniques (cf. 3.21) induisent des bijections

$$H^1(S,L) \xrightarrow{\sim} H^1(S,P) \xrightarrow{\sim} H^1_{\underline{t}(P)}(S,G) \quad .$$

(ii) Soient $t,t' \in \mathcal{B}(\underline{Dyn}(G))(S)$, on a (cf. 3.21)

$$H^1_t(S,G) \cap H^1_{t'}(S,G) = H^1_{t \cap t'}(S,G) \quad .$$

(iii) Si P et Q sont deux sous-groupes paraboliques de G en position osculatrice, le diagramme canonique suivant est cartésien et composé d'injections :

$$\begin{array}{ccc} H^1(S,P) & \longrightarrow & H^1(S,G) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^1(S,P\cap Q) & \longrightarrow & H^1(S,Q) \end{array}$$

Démontrons (i). L'application $H^1(S,L) \longrightarrow H^1(S,P)$ est bijective par 2.3 ; l'application $H^1(S,P) \longrightarrow H^1_{\underline{t}(P)}(S,G)$ est surjective (3.21), montrons qu'elle est injective, i.e. que l'application canonique $H^1(S,P) \longrightarrow H^1(S,G)$ est injective. Soit Q un fibré principal sous P , Q_1 le fibré principal sous G associé, P' et G' les formes tordues de P et G correspondantes. Il est clair que G' est un S-groupe réductif et que P' en est un sous-groupe parabolique. L'ensemble des éléments de $H^1(S,P)$ qui ont

même image que la classe de Q dans $H^1(S,G)$ s'identifie naturellement au noyau de l'application canonique $H^1(S,P') \longrightarrow H^1(S,G')$, et celui-ci, par la suite exacte de cohomologie, à l'ensemble des orbites de $G'(S)$ dans $(G'/P')(S)$ (Pour ces raisonnements de cohomologie non abélienne, voir la thèse de GIRAUD). Mais $G'(S)$ opère transitivement dans $(G'/P')(S)$ par 5.2.

Démontrons (ii) : soient Q un fibré principal homogène sous G et G^Q la forme tordue de G correspondante. Par définition (3.21), il nous faut prouver que G^Q possède un sous-groupe parabolique de type $t \cap t'$ si et seulement si il possède des sous-groupes paraboliques de type t et t' ; ce qui n'est autre que la conjonction de 3.8 et 5.7 (i). Enfin, (iii) résulte aussitôt de (i) et de (ii).

Enonçons maintenant une conséquence de 5.3.

Corollaire 5.11. Soient S un schéma semi-local, G un S-groupe réductif, P un sous-groupe parabolique de G. Si $P \neq G$, il existe au moins 3 sous-groupes paraboliques de G, distincts, de même type que P ; autrement dit $P \neq G$ entraîne $(G(S):P(S)) \geqslant 3$.

En effet, soit P' un sous-groupe parabolique de G opposé à P (4.3.5 (i)). Comme $P \neq G$, on a $\mathrm{rad}^u(P') \neq e$ (par 4.3.2 par exemple). Par 2.1, $\mathrm{rad}^u(P')(S') \neq e$; soit donc $u \in \mathrm{rad}^u(P')(S')$, $u \neq e$. Alors $\mathrm{int}(u)\,P \neq P$, et en vertu de 5.3, il existe un P_1, de même type que P, et opposé à P et $\mathrm{int}(u)\,P$; alors P_1, P et $\mathrm{int}(u)\,P$ sont trois sous-groupes paraboliques distincts de G de même type que P.

6. Sous-groupes paraboliques et tores triviaux

Proposition 6.1. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, Q un sous-tore trivial de G . Ecrivons $Q = D_S(M)$ et soit

$$\mathfrak{g} = \coprod_{m \in M} \mathfrak{g}^m$$

la décomposition de l'Algèbre de Lie de G sous l'action de Q . Soit M_1 une partie de M telle que $0 \in M_1$ et que $x,y \in M_1 \Rightarrow x+y \in M_1$.

(i) Il existe un unique sous-groupe lisse H_{M_1} de G , à fibres connexes, contenant $\mathrm{Cent}_G(Q)$, et dont l'Algèbre de Lie soit $\coprod_{m \in M_1} \mathfrak{g}^m$.

(ii) On a les implications suivantes :

$$(M_1 = \{0\}) \Longrightarrow (H_{M_1} = \mathrm{Cent}_G(Q)),$$

$$(M_1 = -M_1) \Longrightarrow (H_{M_1} \text{ est réductif}),$$

$$(M_1 \cup (-M_1) = M) \Longrightarrow H_{M_1} \text{ et } H_{-M_1} \text{ sont des sous-groupes paraboliques de } G \text{ , opposés, dont le groupe de Levi commun est } H_{M_1} \cap H_{-M_1} .$$

Pour démontrer (i) et (ii) , qui sont locaux pour la topologie (fpqc) , on peut supposer que Q est contenu dans un

tore maximal T de G ; on peut de plus déployer G relativement à T . L'assertion (i) résulte alors aussitôt de Exp. XXII, 5.3.5 , 5.4.5 et 5.4.7 ; les assertions de (ii) résultent de Exp. XXII, 5.3.5 , 5.10.1 , 5.11.3 et de cet exposé, 1.4, 4.3.2.

Corollaire 6.2. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, Q un sous-tore trivial de G . Il existe un sous-groupe parabolique de G dont $\mathrm{Cent}_G(Q)$ soit un sous-groupe de Levi.

En effet, écrivant $Q = D_S(M)$, on choisit une structure d'ordre total sur le groupe M , on appelle M_1 l'ensemble des éléments positifs de M ; le groupe H_{M_1} répond à la question.

Corollaire 6.3. Si le S-groupe réductif G possède un sous-tore trivial non central, il possède un sous-groupe parabolique propre (i.e. $\neq G$).

Par 5.9 et 5.10 , on tire de 6.2 :

Corollaire 6.4. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, Q un sous-tore trivial de G . Le morphisme canonique $G \longrightarrow G/\mathrm{Cent}_G(Q)$ est une fibration localement triviale. Si S est semi-local, l'application $G(S) \longrightarrow (G/\mathrm{Cent}_G(Q))(S)$ est surjective, et l'application $H^1(S,\mathrm{Cent}_G(Q)) \longrightarrow H^1(S,G)$ est injective.

6.5. Supposons S connexe. Si T est un S-tore et si T' et T'' sont deux sous-tores triviaux de T , leur somme $T' + T''$ est

également un sous-tore trivial de T . En effet elle s'identifie au quotient de $T' \times_S T''$ par $T' \cap T''$, quotient qui est trivial par Exp. IX, 2.11. Il en résulte que T possède un plus grand sous-tore trivial; on le note T_{tr}.

Lemme 6.6. Soient S un préschéma connexe, T un S-tore isotrivial. T_{tr} son plus grand sous-tore trivial. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe un homomorphisme $T \longrightarrow \underline{G}_{m\,S}$ distinct de e.

(ii) $T_{tr} \neq e$.

Comme T est supposé isotrivial, il existe un groupe fini G , un revêtement principal galoisien connexe $S' \longrightarrow S$ de groupe G , et un isomorphisme $T_{S'} \xrightarrow{\sim} D_{S'}(M)$; M est alors muni d'une structure de G-module, et on a un isomorphisme naturel $\mathrm{Hom}_S(T, \underline{G}_{m\,S}) = H^0(G,M)$.
D'autre part, soit V le sous-espace vectoriel de $M \otimes \underline{Q}$ engendré par les éléments de la forme $g(m) - m$, $g \in G$, $m \in M$. On vérifie aussitôt que $(T_{tr})_{S'}$ s'identifie à $D_{S'}(M/M \cap V)$. L'assertion (i) est donc équivalente à $H^0(G,M) \neq 0$, ou encore à $H^0(G, M \otimes \underline{Q}) \neq 0$, tandis que l'assertion (ii) est équivalente à $M \neq M \cap V$, ou encore à $M \otimes \underline{Q} \neq V$. Or on a $M \otimes \underline{Q} = H^0(G, M \otimes Q) \oplus V$, comme on le vérifie aussitôt (considérer le projecteur $M \otimes \underline{Q} \longrightarrow H^0(G, M \otimes \underline{Q})$ qui envoie x sur la moyenne des transformés de x par G) .

Lemme 6.7. Soient S un préschéma , G un S-groupe réductif, P un sous-groupe parabolique de G , tel que $P \neq G$, L un sous-groupe de Levi de P , Q son radical. Il existe un homomorphisme $Q \longrightarrow \underline{G}_{m\,S}$ distinct de e .

Considérons le radical unipotent U de P ; il est invariant sous int(P) , donc sous int(Q) . Considérons le $\underline{O}_S$-Module inversible det(Lie(U)) "puissance extérieure maximum" du $\underline{O}_S$-Module localement libre Lie(U) . La représentation adjointe définit un homomorphisme de groupes

$$f : Q \longrightarrow \underline{\underline{Aut}}(\det(\underline{Lie}(U)) = \underline{G}_{m\,S} .$$

Si $P \neq G$, alors $U \neq e$. Choisissons un $s \in S$ tel que $U_s \neq e$. Déployant $G_{\bar{s}}$ relativement à un tore maximal contenant $Q_{\bar{s}}$, on voit aussitôt que $f_{\bar{s}} \neq e$.

Proposition 6.8. Soient S un schéma semi-local connexe, G un S-groupe réductif, P un sous-groupe parabolique de G , L un sous-groupe de Levi de P , Q son radical , Q_{tr} le plus grand sous-tore trivial de Q (i.e. le plus grand sous-tore central trivial de L). Alors

$$L = \underline{Cent}_G(Q_{tr}) .$$

Posons $L' = \underline{Cent}_G(Q_{tr})$; c'est un sous-groupe réductif de G contenant L ; de plus, $P' = P \cap L'$ est un sous-groupe parabolique de L' , de sous-groupe de Levi L (1.20). Si $L' \neq L$,

alors $L' \not\subset P$ (car L est un sous-groupe réductif maximal de P, 1.7.), donc $P' \neq L'$. Soient G_1 le groupe dérivé de G, et $P_1 = P' \cap G_1$. Par 1.19, P_1 est un sous-groupe parabolique du groupe semi-simple G_1, $L_1 = L \cap G_1$ en est un sous-groupe de Levi, et $Q_1 = \mathrm{rad}(L_1) = (\mathrm{rad}(L) \cap G_1)^\circ = (Q \cap G_1)^\circ$. Comme L_1 possède un tore maximal T_1 (Exp. XXIV, 3.20), et que celui-ci est isotrivial (Exp. XXIV, 4.1.5), Q_1 qui est un sous-tore de T_1 est également isotrivial (Exp. IX, 2.11); comme $P_1 \neq G_1$, on peut appliquer 6.7 et 6.6 et $(Q_1)_{tr} \neq e$, donc $(Q_{tr} \cap G_1)^\circ \neq e$, donc $Q_{tr} \not\subset \mathrm{rad}(L')$ (car $\mathrm{rad}(L') \cap G_1$ est fini), ce qui est contradictoire avec la définition de L'.

Corollaire 6.9. Soient S un schéma semi-local connexe, G un S-groupe réductif, Q un sous-tore critique de G (i.e. tel que $\mathrm{rad}(\mathrm{Cent}_G(Q)) = Q$). Pour que $\mathrm{Cent}_G(Q)$ soit sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parabolique de G, il faut et il suffit que $\mathrm{Cent}_G(Q) = \mathrm{Cent}_G(Q_{tr})$, c'est-à-dire que $\mathrm{Lie}(G)^Q = \mathrm{Lie}(G)^{Q_{tr}}$.

Cela résulte de 6.2 et 6.8.

Corollaire 6.10. Soient S un schéma semi-local connexe, G un S-groupe réductif, L un sous-groupe de G. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe un sous-groupe parabolique de G dont L soit un sous-groupe de Levi.

(ii) Il existe un sous-tore trivial de G dont L soit le centralisateur.

(iii) Il existe un homomorphisme $\underline{G}_{m\,S} \longrightarrow G$ dont L soit le centralisateur.

En effet, on a (i) $\Longrightarrow$ (ii) par 6.8 , (iii) $\Longrightarrow$ (i) par 6.1 : reste à prouver (ii) $\Longrightarrow$ (iii) ; on peut supposer S connexe, donc $L = \underline{\mathrm{Cent}}_G(Q)$, avec $Q = D_S(M)$; écrivons $\underline{\mathrm{Lie}}(G) = \coprod_{m \in M} \underline{\mathrm{Lie}}(G)^m$, et soit R l'ensemble des $m \in M$, $m \neq 0$, tels que $\underline{\mathrm{Lie}}(G)^m \neq 0$.
Comme R est fini et ne contient pas 0 , il existe un homomorphisme $u : M \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}}$ tel que $u(r) \neq 0$ pour chaque $r \in R$. Par dualité, u donne un homomorphisme $\underline{G}_{m\,S} \longrightarrow Q$, donc un homomorphisme $f : \underline{G}_{m\,S} \longrightarrow G$. On a $\underline{\mathrm{Cent}}_G(f) \supset \underline{\mathrm{Cent}}_G(Q)$; ce sont deux sous-groupes lisses de G , à fibres connexes; leurs Algèbres de Lie coïncident (car égales toutes deux à $\underline{\mathrm{Lie}}(G)^0$); ils coïncident donc, par un raisonnement habituel.

Corollaire 6.11. Soient S un schéma semi-local connexe, G un S-groupe réductif. Les applications

$$L \longmapsto \mathrm{rad}(L)_{tr}$$

$$Q \longmapsto \underline{\mathrm{Cent}}_G(Q)$$

sont des bijections réciproques l'une de l'autre, qui inversent les structures d'ordre naturelles, entre l'ensemble des sous-groupes L de G qui sont des sous-groupes de Levi de sous-groupes paraboliques de G et l'ensemble des sous-tores triviaux de G tels que $\mathrm{rad}(\underline{\mathrm{Cent}}_G(Q))_{tr} = Q$.

Corollaire 6.12. Soient S un schéma semi-local connexe, G un S-groupe réductif. Considérons les assertions suivantes :

(i) Il existe un sous-groupe parabolique de G distinct de G .

(ii) G possède un sous-tore trivial non central.

(ii bis) G possède un sous-tore trivial non central de dimension relative 1 .

(iii) Il existe un homomorphisme de groupes $\underline{G}_{a\,S} \longrightarrow G$ qui soit une immersion fermée.

Alors on a (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) $\Longleftrightarrow$ (ii bis) $\Longrightarrow$ (iii) .

La seule assertion nouvelle est (i) $\Longrightarrow$ (iii) . Soit donc P un sous-groupe parabolique de G , distinct de G . Alors $U = \mathrm{rad}^u(P) \neq e$. Considérons le dernier sous-groupe non trivial U_n de la suite de composition de U (2.1) . On a un isomorphisme $U_n \simeq W(\underline{E}_n)$, où $\underline{E}_n$ est un $\underline{O}_S$-Module localement libre, donc libre . Comme $\underline{E}_n \neq 0$, il existe un monomorphisme localement facteur direct $\underline{O}_S \longrightarrow \underline{E}_n$, donc une immersion fermée $\underline{G}_{a\,S} = W(\underline{O}_S) \longrightarrow W(\underline{E}_n) \simeq U_n$, ce qui entraîne aussitôt (iii) .

Remarque 6.12.1. Lorsque S est le spectre d'un corps de caractéristique 0 , il résulte du théorème de Jacobson-Morozov que (iii) $\Longrightarrow$ (ii bis) . Les quatre conditions précédentes sont alors équivalentes ("critère de Godement" cf. [BT] 8.5) (*).

(*) Cela est plus généralement vrai lorsque S est le spectre d'un corps parfait (TITS).

Définition 6.13. Soient S un schéma semi-local connexe, G un S-groupe réductif. On dit que G est anisotrope si G ne contient aucun sous-tore trivial non réduit à e .

Corollaire 6.14. Pour que le S-groupe réductif G soit anisotrope, il faut et il suffit qu'il ne possède aucun sous-groupe parabolique $P \neq G$, et que son radical soit anisotrope.

Utilisant maintenant 6.6 , Exp. XXIV, 4.1.5 , et Exp. XXII , 6.2 , on en déduit :

Corollaire 6.15. Soient S un schéma semi-local connexe, G un S-groupe réductif isotrivial (par exemple G semi-simple, ou S normal). Pour que G soit anisotrope, il faut et il suffit que G ne possède aucun sous-groupe parabolique $P \neq G$, et que $\mathrm{Hom}_{S\text{-}gr}(G, \underline{G}_{m\ S}) = e$.

Proposition 6.16. Soient S un schéma semi-local connexe, G un S-groupe réductif. Les sous-tores triviaux maximaux de G sont les plus grands sous-tores centraux triviaux des groupes de Levi des sous-groupes paraboliques minimaux de G . Deux tels tores sont conjugués par un élément de G(S) .

Soit Q un sous-tore trivial maximal de G . Alors $Q = \mathrm{rad}(\underline{\mathrm{Cent}}_G(Q))_{tr}$, et (6.2), $L = \underline{\mathrm{Cent}}_G(Q)$ est sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parabolique P de G . En vertu de 6.11 , L est un élément minimal de l'ensemble des sous-groupes de Levi de sous-groupes paraboliques de G , donc P est un sous-groupe

parabolique minimal de G par 1.20. Il résulte alors de 5.7 et 5.5 (iv) que deux tores tels que Q sont conjugués par une section de $G(S)$. La conjugaison des Q et des couples (P,L) entraîne alors la première assertion de 6.16.

Corollaire 6.17. Soient S un schéma semi-local connexe, P et P' deux sous-groupes paraboliques minimaux en position standard (4.5). Alors $P \cap P'$ contient un sous-groupe de Levi commun à P et P'.

En effet, $P \cap P'$ contient un tore maximal T de G (4.5); soit L l'unique sous-groupe de Levi de P contenant T. On a

$$\mathrm{rad}(P) \cap T = \mathrm{rad}(P) \cap L = \mathrm{rad}(L)$$

par 1.21, donc $\mathrm{rad}(P) \cap T$ contient $\mathrm{rad}(L)_{tr}$ qui est un sous-tore trivial maximal de G, donc est nécessairement égal à T_{tr}. On a donc $L = \underline{\mathrm{Cent}}_G(T_{tr})$, et par symétrie L est aussi un sous-groupe de Levi de P'.

Remarque 6.18. Il résulte de 1.21 que le sous-groupe parabolique P de G est minimal si et seulement si $\mathrm{rad}(P)$ contient un sous-tore trivial maximal de G; alors, d'après 6.17, si T est un tore maximal P, T_{tr} est un tore maximal de G et de $\mathrm{rad}(P)$ et $\mathrm{Cent}_G(T_{tr})$ est un sous-groupe de Levi de P. De plus, tout sous-groupe de Levi de P s'obtient de cette manière.

7. Donnée radicielle relative

Dans ce paragraphe, S désignera un schéma semi-local connexe non vide, G un S-groupe réductif, Q un sous-tore trivial maximal de G , et L le centralisateur de Q dans G , $L = \underline{Cent}_G(Q)$.

7.1. Comme Q est le plus grand sous-tore central trivial de L , toute section de $G(S)$ qui normalise L normalise Q . On a donc (cf. 7.1.1)

$$\underline{Norm}_G(L)(S) = \underline{Norm}_G(Q)(S) \quad .$$

D'autre part, on a vu en 6.4 que l'application $G(S) \longrightarrow (G/L)(S)$ est surjective. Il s'ensuit qu'on a une identification canonique

$$W_G(Q)(S) = (\underline{Norm}_G(Q)/\underline{Cent}_G(Q))(S) \simeq \underline{Norm}_G(L)(S)/L(S) \quad .$$

On désignera par M le groupe $\mathrm{Hom}_{S\text{-}gr}(Q, \underline{G}_{m\,S})$, de telle sorte qu'on a un isomorphisme canonique $Q \simeq D_S(M)$. On notera par W le groupe d'automorphismes de M défini par $W_G(Q)(S)$. On a donc des isomorphismes

$$W \simeq W_G(Q)(S) \simeq \underline{Norm}_G(L)(S)/L(S) \quad .$$

7.1.1. On n'a pas en général $\underline{Norm}_G(L) = \underline{Norm}_G(Q)$. Prenons par exemple pour S le spectre d'un corps k , possédant une extension quadratique k' , pour G le groupe unitaire $\underline{Q}.\underline{Ep}._{k'/k}(A_2)$ (Exp. XXIV, 3.11.2).

Comme les sous-groupes paraboliques minimaux de G sont ses groupes de Borel, leurs groupes de Levi sont des tores maximaux, et on a $(\underline{\mathrm{Norm}}_G(L)/L)(\bar{k}) = \mathfrak{S}_3$.
D'autre part, comme G n'est pas déployé, les tores triviaux maximaux de G sont de dimension ≤ 1 , donc isomorphes à $\underline{G}_{m\,k}$.
Comme $\underline{\mathrm{Norm}}_G(Q)/L$ opère fidèlement dans Q , on a
$(\underline{\mathrm{Norm}}_G(Q)/Q)(\bar{k}) = \underline{\mathbb{Z}}/2\underline{\mathbb{Z}}$.

7.2. Si P est un sous-groupe parabolique de G de groupe de Levi L , (il en existe par 6.2), P est nécessairement minimal (cf. 6.18). En vertu de la conjugaison des sous-groupes paraboliques minimaux de G (5.7), de la conjugaison des sous-groupes de Levi d'un sous-groupe parabolique (1.8), et des relations $P = \underline{\mathrm{Norm}}_G(P)$, $\underline{\mathrm{Norm}}_G(L) \cap P = L$ (1.6) , l'ensemble des sous-groupes paraboliques (minimaux) de G de groupe de Levi L est principal homogène sous le groupe W .

7.3. L'Algèbre de Lie de G se décompose sous l'action de Q en

$$\underline{\mathrm{Lie}}(G) = \underline{\mathrm{Lie}}(L) + \coprod_{r \in R} \underline{\mathrm{Lie}}(G)^r \ ,$$

où R est l'ensemble des caractères non nuls de Q tels que $\underline{\mathrm{Lie}}(G)^r \neq 0$ (racines de G relativement à Q) .

Désignons par M^* le groupe $\mathrm{Hom}_{S\text{-}gr}(\underline{G}_{m\,S}, Q)$ qui est en dualité avec M et sur lequel W opère de manière naturelle par transport de structure.

Théorème 7.4. Avec les notations de 7.3. Il existe une unique application $r \longmapsto r^*$ de R dans M* qui définisse dans (M,M*) une donnée radicielle (Exp. XXI, 1.1) dont le groupe de Weyl soit W. De plus, les sous-groupes paraboliques P de G de groupe de Levi L et les systèmes de racines positives R_+ de R se correspondent bijectivement par la relation

$$\underline{\mathrm{Lie}}(P) = \underline{\mathrm{Lie}}(L) \oplus \coprod_{r \in R_+} \underline{\mathrm{Lie}}(G)^r \ .$$

7.4.1. Supposons d'abord prouvée l'existence de l'application $r \longmapsto r^*$ demandée. En vertu de Exp. XXI, 3.4.10 , s_r est l'unique élément de W tel que pour tout $m \in M$, $s_r(m) - m$ soit un multiple rationnel de r , ce qui montre que s_r est déterminé par r; comme on a alors $r^*(m) = -s_r(m) + m$, on voit que r^* est déterminé par r , ce qui prouve l'unicité de l'application $r \longmapsto r^*$.

7.4.2. Soit $r \in R$ et soit L_r (resp. H_r , resp. H_{-r}) l'unique sous-groupe lisse et à fibres connexes de G contenant L et tel que

$$\underline{\mathrm{Lie}}(L_r) = \underline{\mathrm{Lie}}(L) \oplus \coprod_{t \in (\underline{Z}\, r) \cap R} \underline{\mathrm{Lie}}(G)^t$$

(resp.

$$\underline{\mathrm{Lie}}(H_r) = \underline{\mathrm{Lie}}(L) \oplus \coprod_{t \in (\underline{N}\, r) \cap R} \underline{\mathrm{Lie}}(G)^t \ ,$$

resp.

$$\underline{\mathrm{Lie}}(H_{-r}) = \underline{\mathrm{Lie}}(L) \oplus \coprod_{t \in (\underline{N}(-r)) \cap R} \underline{\mathrm{Lie}}(G)^t \ ) \ ,$$

(6.1) : L_r est un sous-groupe réductif de G , H_r et H_{-r} en

sont des sous-groupes paraboliques de groupe de Levi L, et H_r et H_{-r} sont opposés relativement à L (6.1). Par 7.2, il existe donc $s_r \in \underline{\mathrm{Norm}}_{L_r}(Q)(S)/L(S) \in W$ tel que $s_r(H_r) = H_{-r}$. On a $s_r(r) = -r$ (car r (resp. $-r$) est le diviseur commun des éléments de R intervenant dans H_r (resp. H_{-r})), et on a $(s_r)^2 = \mathrm{id}$. (car $s_r^2(H_r)$ et H_r sont tous deux opposés à H_{-r} relativement à L). On a donc construit un $s_r \in W$ vérifiant les propriétés suivantes :

(x) $\quad s_r(r) = -r \ , \ (s_r)^2 = \mathrm{id}.$

(xx) $\quad s_r$ peut se représenter par un élément de $L_r(S)$.

Remarquons d'ailleurs que s_r est construit de manière canonique à partir de r, et en particulier que

(xxx) $\quad$ pour tout $w \in W$, on a $w\, s_r\, w^{-1} = s_{w(r)}$.

7.4.3. Nous nous proposons maintenant de prouver l'assertion

(xxxx) $\quad$ pour tout $m \in M$, $s_r(m) - m \in \underline{\underline{Z}}\, r$.

Comme S est connexe, cette assertion est locale pour la topologie (fpqc). On peut donc supposer que $L_r = G_1$ est déployable relativement à un tore maximal T_1 de L. Soit donc (G_1, T_1, M_1, R_1) un tel déploiement. Le monomorphisme $Q \longrightarrow T_1$ identifie M à un quotient de M_1, soit $p : M_1 \longrightarrow M$ l'application canonique.
L'image de R_1 par p est formée éventuellement de zéro et des

racines de G_1 par rapport à Q (donc des éléments de R multiples entiers de r) ; on a donc $p(R_1) \subset \underline{\mathbb{Z}}\, r$. En vertu de (xx) , il existe un élément de $\underline{\mathrm{Norm}}_{G_1}(L)(S)$ qui induit s_r sur Q . En vertu de Exp. XXII, 5.10.10 , il existe donc une section $w \in W_{1\,S}(S)$ qui induit s_r sur Q (on dénote par W_1 le groupe de Weyl de la donnée radicielle $(M_1,R_1,\ldots)$). Quitte à restreindre S , on peut donc supposer qu'il existe $w \in W_1$ induisant s_r sur Q , donc vérifiant $p(w(m_1)) = s_r(p(m_1))$ pour tout $m_1 \in M_1$. Mais, par définition de W_1 , w est un produit de symétries par rapport à des éléments de R_1 , donc $w(m_1) - m_1$ est une combinaison linéaire à coefficients entiers des éléments de R_1 . Il s'ensuit que $s_r(p(m_1)) - p(m_1)$ est une combinaison linéaire à coefficients entiers des éléments de $p(R_1) \subset \underline{\mathbb{Z}}\, r$, donc un multiple entier de r , ce qu'il fallait démontrer.

7.4.4. On peut donc définir un élément $r^* \in M^*$ par

$$r^*(m) = m - s_r(m) \quad .$$

En vertu de (x) , on a $(r^*,r) = 2$; il résulte d'autre part de (xxx) que pour tout couple $(r,r') \in R \times R$, on a $s_r(r') \in R$ et $s_r(r'^*) = (s_r(r'))^*$, ce qui prouve (Exp. XXI, 1.1) que l'application $r \mapsto r^*$ construite définit bien une donnée radicielle dans (M,M^*) .

7.4.5. Soit W' le groupe de Weyl de cette donnée radicielle (groupe de transformation de M engendré par les s_r); on a $W' \subset W$.

Soit d'autre part $\geqslant$ une relation d'ordre total sur le groupe M ; posons $R_+ = \{ r \in R , r \geqslant 0 \}$. On sait que R_+ est un système de racines positives de R. Soit $w \in W$, représenté par un $n \in \underline{Norm}_G(L)(S) = \underline{Norm}_G(Q)(S)$. Posons $P = H_{R_+}$ (notation de 6.1); en vertu de loc. cit., P est un sous-groupe parabolique de G, de groupe de Levi L. On a évidemment $int(n)\, P = H_{w(R_+)}$. Il résulte alors de 7.3 que $w(R_+) = R_+$ entraîne $w = e$. Comme le groupe W' opère transitivement sur les systèmes de racines positives de R (Exp. XXI, 3.3.7) et que le stabilisateur dans W de R_+ est l'identité, on en conclut aussitôt que $W = W'$. On en conclut également que $W = W'$ opère de façon simplement transitive à la fois sur l'ensemble des systèmes de racines positives de R et sur l'ensemble des sous-groupes paraboliques de G de groupe de Levi L, ce qui entraîne la dernière assertion de 7.4.

C.Q.F.D.

7.5. Si P et P_1 sont deux sous-groupes paraboliques minimaux de G, de groupes de Levi L et L_1, et si on désigne par Q et Q_1 les tores centraux triviaux maximaux de L et L_1, alors les couples (P,Q) et (P_1,Q_1) sont conjugués : il existe $g \in G(S)$ avec $int(g)\, P = P_1$, $int(g)\, Q = Q_1$. En effet, P et P_1 sont conjugués (5.7) et on peut donc supposer $P = P_1$; alors L et L_1 sont conjugués par une section de $P(S)$ (1.8). De plus, si g et g' sont deux sections de G conjuguant les couples (P,Q) et (P_1,Q_1), $g'^{-1} g$ normalise P et Q, donc P et L ; mais $\underline{Norm}_G(P) \cap \underline{Norm}_G(L) = P \cap \underline{Norm}_G(L) = L = \underline{Cent}_G(Q)$.

L'isomorphisme $Q \longrightarrow Q_1$ induit par $\mathrm{int}(g)$ est donc indépendant de g. Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_1$ les données radicielles définies grâce à 7.4 dans $\mathrm{Hom}_{S\text{-}gr}(Q, \underline{G}_{m\,S})$ et $\mathrm{Hom}_{S\text{-}gr}(Q_1, \underline{G}_{m\,S})$ et soient R_+ et R_{1+} les systèmes de racines positives correspondant à P et P_1. L'isomorphisme canonique $Q \longrightarrow Q_1$ défini ci-dessus transforme $(\mathcal{R}, R_+)$ en $(\mathcal{R}_1, R_{+1})$. On en déduit aussitôt que l'on peut définir <u>la donnée radicielle relative épinglée</u> de G sur S, en identifiant les différents $(\mathcal{R}, R_+)$ à l'aide du système transitif d'isomorphismes décrit ci-dessus.

A partir de maintenant, nous noterons $(\underline{M}, \underline{M}^*, \underline{R}, \underline{R}^*, \underline{R}_+) = \underline{\mathcal{R}} = \mathcal{R}(G/S)$ cette donnée radicielle épinglée; pour chaque couple (P,Q) comme ci-dessus, on a donc un isomorphisme canonique $\underline{M} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{S\text{-}gr}(Q, \underline{G}_{m\,S})$ transformant $\underline{R}$ en l'ensemble des racines de G relativement à Q, $\underline{R}_+$ en l'ensemble des racines de P relativement à Q, et $W(\mathcal{R})$ en $W_G(Q)(S)$.

7.6. Soit toujours Q un tore trivial maximal de G, P un sous-groupe parabolique (minimal) de G de groupe de Levi $\underline{\mathrm{Cent}}_G(Q)$, (M, M^*, R, R^*, R_+) la donnée radicielle épinglée correspondante (7.4), R_o l'ensemble des racines simples de R_+. Pour tout $A \subset R_o$, soit $R_A \subset R$ l'ensemble

$$R_A = R_+ \cup (\underline{Z}\,A \cap R_-)$$

formé des racines positives et des racines négatives combinaisons linéaires des éléments de A. C'est un ensemble <u>clos</u> (Exp. XXI,

3.1.4) de racines, et tout ensemble clos contenant R_+ se met de façon unique sous cette forme (Exp. XXI, 3.3.10). Par 6.1, il existe un unique sous-groupe P_A de G, lisse et à fibres connexes, contenant $\underline{Cent}_G(Q)$ et tel que

$$\underline{Lie}(P_A) = \underline{Lie}(G)^0 \oplus \coprod_{r \in R_A} \underline{Lie}(G)^r \ .$$

Il résulte alors aussitôt de 6.1., de la conjugaison des paraboliques minimaux, et du fait que l'ensemble des racines d'un sous-groupe parabolique de G contenant Q est clos (qui se déduit aussitôt de 1.4 par déploiement) que :

Proposition 7.7. (i) L'application $A \longmapsto P_A$ est une bijection de l'ensemble des parties de R_o sur l'ensemble des sous-groupes paraboliques de G contenant P . Cette bijection conserve les relations d'ordre naturelles d'inclusion.

(ii) Tout sous-groupe parabolique de G est conjugué par une section de G(S) à un unique P_A .

7.8. Soit (P,Q) comme ci-dessus. Considérons la donnée radicielle relative (7.5) de G sur S et l'isomorphisme canonique

$$f : (M,M^*,R,R^*,R_+) \xrightarrow{\sim} (\underline{M},\underline{M}^*,\underline{R},\underline{R}^*,\underline{R}_+) \ .$$

L'ensemble R_o des racines simples de R_+ est transformé en l'ensemble $\underline{R}_o$ des racines simples de $\underline{R}_+$, donc toute partie A de R_o en une partie $f(A) \subset \underline{R}_o$.

Soit H un sous-groupe parabolique de G quelconque. Par 7.7 (ii), il est conjugué à un unique P_A. Notons $\underline{t}_r(H) = f(A) \subset \underline{R}_o$. On vérifie aussitôt à l'aide des théorèmes de conjugaison que $\underline{t}_r(H)$ est indépendant du choix du couple (P,Q). On dit que c'est le type relatif de H, et on a la

Proposition 7.9. (i) *L'application* $H \longmapsto \underline{t}_r(H)$ *induit une bijection entre l'ensemble des classes de conjugaison (par* $G(S)$*) des sous-groupes paraboliques de* G, *et l'ensemble des parties de* $\underline{R}_o$.

(ii) *Soient* H *un sous-groupe parabolique de* G, P *un sous-groupe parabolique minimal contenu dans* H, Q *le tore trivial central maximal d'un sous-groupe de Levi de* P, R_o *l'ensemble des racines simples de* P *relativement à* Q *et* $f: R_o \xrightarrow{\sim} \underline{R}_o$ *l'isomorphisme canonique. Alors*

$$(f(r) \in \underline{t}_r(H)) \Longleftrightarrow (\underline{\mathrm{Lie}}(H)^{-r} \neq 0)$$

et on a $H = P_A$ *où* $A = f^{-1}(\underline{t}_r(H))$.

(iii) *Si* H *et* H' *sont deux sous-groupes paraboliques de* G *contenant* P, *alors*

$$(\underline{t}_r(H) \subset \underline{t}_r(H')) \Longleftrightarrow (\underline{t}(H) \subset \underline{t}(H'))$$

(voir 3.8, remarque (ii) et 5.5 (i) pour d'autres conditions équivalentes).

7.10. On peut étudier les positions relatives de deux sous-groupes

paraboliques minimaux; les résultats sont les suivants :

(1) Si P, P_1, P', P'_1 sont quatre sous-groupes paraboliques minimaux de G, alors $\underline{t}_2(P,P_1) = \underline{t}_2(P',P'_1)$ [cf. 4.5.2 i.e. (P,P_1) et (P',P'_1) sont conjugués loc. pour (fpqc)] si et seulement si il existe $g \in G(S)$ avec $\mathrm{int}(g)\, P = P'$, $\mathrm{int}(g)\, P_1 = P'_1$.

(2) Fixons-nous en particulier un sous-groupe parabolique minimal P de groupe de Levi L et soit T un tore maximal de L. Considérons le schéma $\underline{\mathrm{Par}}_{t_{\min}}(G;P)$ des sous-groupes paraboliques minimaux de G en position standard relativement à P. On a un morphisme (4.5.5)

$$f : \underline{\mathrm{Par}}_{t_{\min}}(G;P) \longrightarrow W_P(T) \backslash W_G(T) / W_P(T)$$

dont les fibres sont "les orbites de P dans $\underline{\mathrm{Par}}_{t_{\min}}(G;P)$".
En vertu de (1), f induit donc un monomorphisme

$$P(S) \backslash \underline{\mathrm{Par}}_{t_{\min}}(G;P)(S) \hookrightarrow (W_P(T) \backslash W_G(T) / W_P(T))(S) .$$

L'image de ce morphisme s'identifie à W ; c'est le <u>théorème de Bruhat</u> : chaque orbite de $P(S)$ dans $\underline{\mathrm{Par}}_{t_{\min}}(G;P)(S)$ contient un et un seul sous-groupe parabolique de G de groupe de Levi L (c'est-à-dire de la forme $\mathrm{int}(n)\, P$; $n \in \underline{\mathrm{Norm}}_G(L)$).

(3) En d'autres termes, soit E l'ensemble des $g \in G(S)$ tels que $\mathrm{int}(g)\, P$ et P soient en position mutuelle standard. Alors E possède une partition en doubles classes modulo $P(S)$ indexée par W :

$E = P(S)\ W\ P(S)$ (notation évidente) .

On peut aussi écrire avec $U = \mathrm{rad}^u(P)(S)$,

$$E = U(S) \cdot \underline{\mathrm{Norm}}_G(L)(S) \cdot U(S) ,$$

mettant ainsi en évidence une partition de E en doubles classes modulo $U(S)$, indexée par $\underline{\mathrm{Norm}}_G(L)(S)$.

(4) Si S est le spectre d'un corps, alors $E = G(S)$, et on retrouve [BT] , 5.15.

Contre-exemples 7.11. Soient $S = \mathrm{Spec}(\underline{\mathbb{Z}}/4\underline{\mathbb{Z}})$, $G = \underline{\mathrm{Sl}}_{2\ S}$. Soit B le groupe de Borel habituel formé des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $c = 0$. Soit $g = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in G(S)$, posons $B' = \mathrm{int}(g)\ B$. Alors $B(S) = B'(S)$, et $B \cap B'$ ne contient pas de tore maximal. Cela montre d'une part que deux sous-groupes paraboliques minimaux distincts peuvent avoir le même groupe de sections, d'autre part qu'il n'existe pas en général de critère permettant de reconnaître si deux sous-groupes paraboliques minimaux P et P' sont en position standard, à l'aide uniquement des groupes $P(S)$ et $P'(S)$. En particulier, la partie E de $G(S)$ ne semble pas pouvoir être définie à l'aide uniquement de la situation $\{ G(S) , P(S) , \underline{\mathrm{Norm}}_G(L)(S) \}$ [dans le cas précédent, cette partie est définie par $c \neq 2$] .

7.12. On se propose maintenant d'étudier la variation de $\mathcal{R}(G/S)$ avec S . Soit donc S' un S-schéma, également semi-local connexe et non vide . Soit Q un tore trivial maximal de G ; alors $Q_{S'}$

est un tore trivial de $G_{S'}$, soit Q' un tore trivial maximal de $G_{S'}$ contenant $Q_{S'}$.

Posons

$$M = \mathrm{Hom}_{S\text{-}gr}(Q, \underline{G}_{m\ S}) \simeq \mathrm{Hom}_{S'\text{-}gr}(Q_{S'}, \underline{G}_{m\ S'})$$

$$M' = \mathrm{Hom}_{S'\text{-}gr}(Q', \underline{G}_{m\ S'}) \ .$$

Le monomorphisme $Q_{S'} \longrightarrow Q'$ induit un épimorphisme $u : M' \longrightarrow M$.
Notons $L = \underline{\mathrm{Cent}}_G(Q)$, $L' = \underline{\mathrm{Cent}}_{G_{S'}}(Q')$, on a $L' \subset L_{S'}$.
Si H est un sous-groupe de G contenant L , alors $H_{S'}$ contient L' , et on a

$$\underline{\mathrm{Lie}}(H) = \underline{\mathrm{Lie}}(L) \oplus \coprod_{r \in R} \underline{\mathrm{Lie}}(H)^r$$

$$\underline{\mathrm{Lie}}(H_{S'}) = \underline{\mathrm{Lie}}(L') \oplus \coprod_{r \in R'} \underline{\mathrm{Lie}}(H_{S'})^{r'} \ ,$$

où R_H (resp. $R'_{H_{S'}}$) désigne l'ensemble des racines de H (resp. $H_{S'}$) relativement à Q (resp. Q'). On en tire immédiatement que $R_H \subset u(R'_{H_{S'}}) \subset R_H \cup \{0\}$.

Prenant $H = G$, on voit d'abord que $R \subset u(R') \subset R \cup \{0\}$; prenant ensuite pour H un sous-groupe parabolique minimal P de groupe de Levi L , on voit que $R'_{H_{S'}}$ contient un système de racines positives de R' , donc (7.4) qu'il existe un sous-groupe parabolique minimal P' de $G_{S'}$ de groupe de Levi L' contenu dans $P_{S'}$. On a donc construit un diagramme

$$\begin{array}{ccccc} Q_{S'} & \subset & L_{S'} & \subset & P_{S'} \\ \cap & & \cup & & \cup \\ Q' & \subset & L' & \subset & P' \end{array} \ .$$

Si R_+ (resp. R_o) est le système de racines positives (resp. simples) de R défini par P et si on définit de même R'_+ et R'_o, on vérifie facilement que $R_+ \subset u(R'_+) \subset R_+ \cup \{0\}$, et que $R_o \subset u(R'_o) \subset R_o \cup \{0\}$.

Soit maintenant $w \in W \simeq \underline{\mathrm{Norm}}_G(Q)(S)/\underline{\mathrm{Cent}}_G(Q)(S)$, représenté par $n \in \underline{\mathrm{Norm}}_G(Q)(S)$. On a $\mathrm{int}(n)\, Q = Q$ donc $\mathrm{int}(n)\, L = L$, donc $\mathrm{int}(n)\, L_{S'} = L_{S'}$. Alors Q' et $\mathrm{int}(n)\, Q'$ sont deux tores triviaux maximaux de $L_{S'}$ donc sont conjugués par une section $x \in L(S')$, et on a $\mathrm{int}(nx)\, Q' = Q'$, donc $nx \in \underline{\mathrm{Norm}}_{G_{S'}}(Q')(S')$. Soit w' l'image de $n' = nx$ dans $W' \simeq \underline{\mathrm{Norm}}_{G_{S'}}(Q')(S')/\underline{\mathrm{Cent}}_{G_{S'}}(Q')(S')$. Il est clair que l'opération de w' sur M' est compatible avec la projection $u : M' \longrightarrow M$ et que l'opération induite sur M coïncide avec celle définie par w.

Utilisant maintenant la définition des données radicielles relatives et les théorèmes de conjugaison, on démontre sans peine :

Théorème 7.13. *Soient S et S' deux schémas semi-locaux connexes non vides, $S' \longrightarrow S$ un morphisme de préschéma, G un S-groupe réductif,*

$$\mathcal{R}(G/S) = (\underline{M}, \underline{M}^*, \underline{R}, \underline{R}^*, \underline{R}_+) \quad \text{et}$$

$$\mathcal{R}(G_{S'}/S') = (\underline{M}', \underline{M}'^*, \underline{R}', \underline{R}'^*, \underline{R}'_+)$$

les données radicielles épinglées relatives. Il existe un homomorphisme canonique

$$\underline{u} : \underline{M}' \longrightarrow \underline{M}$$

vérifiant les conditions suivantes :

(i) $\underline{u}$ est surjectif.

(ii) Pour tout $w \in \underline{W}$, il existe un élément w' de $\underline{W}'$ compatible avec $\underline{u}$ et qui induise w sur $\underline{M}$.

(iii) Notons pour toute partie X de $\underline{M}$, $X^\wedge = X \cap (\underline{M} - \{0\})$. Alors

$$\underline{u}(\underline{R}'_+)^\wedge = \underline{R}_+ \quad , \quad \underline{u}(\underline{R}'_o)^\wedge = \underline{R}_o \quad .$$

(iv) Pour tout sous-groupe parabolique H de G considérons $\underline{t}_r(H) \subset \underline{R}_o$ et $\underline{t}_r(H_{S'}) \subset \underline{R}'_o$. Alors

$$\underline{t}_r(H_{S'}) = u^{-1}(\underline{t}_r(H) \cup \{0\}) \cap \underline{R}'_o$$
$$= \left\{ r' \in \underline{R}'_o \ , \ u(r') \in \underline{t}_r(H) \text{ ou } u(r') = 0 \right\}.$$

Remarque 7.14. Si G est déployable sur S, ses tores triviaux maximaux sont des tores maximaux, et les notions relatives introduites ici coïncident alors avec les notions absolues déjà introduites. Le théorème précédent donne donc une description de la donnée radicielle relative $\mathcal{R}(G/S)$ et du type relatif $\underline{t}_r$, à l'aide de la donnée radicielle absolue et du type absolu du groupe $G_{S'}$, S' étant choisi de telle manière que $G_{S'}$ soit déployable (cf. Exp. XXIV, 4.4.1). Renvoyons à [BT], 6.12 et sq. pour cette description.

7.15. Soient S un schéma local hensélien, s son point fermé, S_o le spectre du corps résiduel de s_o, identifié à un sous-schéma fermé de S ; pour tout objet X au-dessus de S, notons X_o l'objet au-dessus de S_o déduit de X par changement de base. Soit enfin G un S-groupe réductif. Pour tout sous-groupe parabolique P de G, P_o est un sous-groupe parabolique de G_o ; inversement, pour tout sous-groupe parabolique $\overline{P}$ de G_o, il existe un sous-groupe parabolique P de G tel que $P_o = \overline{P}$ (cela résulte du lemme de Hensel et de ce que Par(G) est un S-schéma lisse) ; en particulier (confer 5.7), un sous-groupe parabolique P de G est minimal si et seulement si P_o est minimal. Un tel sous-groupe P de G étant choisi, un raisonnement analogue montre que les sous-tores triviaux maximaux de P_o sont de la forme T_o, où T est un sous-tore trivial maximal de P. Il s'ensuit sans difficultés que les données radicielles relatives de G sur S et de G_o sur S_o sont canoniquement isomorphes, de sorte que la théorie des sous-groupes paraboliques de G se ramène à celle des sous-groupes paraboliques de G_o .

Remarquons d'ailleurs que tout S_o-groupe réductif est de la forme G_o (Exp. XXIV, prop. 1.21), ce qui permet inversement de ramener l'étude des sous-groupes paraboliques d'un S_o-groupe réductif à l'étude correspondante sur S.

INDEX DES NOTATIONS

EXPOSE XIX :

$rad(G)$, $rad^u(G)$ 1.2
$rgred(G/h)$, $rgss(G/h)$ 1.8
exp. 4.2
V* (V = fibré vectoriel) 4.3

EXPOSE XX :

exp 1.5
P_r 1.16
r^* 2.1
H_r 2.9
$w_r(X)$ 3.1

EXPOSE XXI :

$\Gamma_0(R)$ 1.1.6
$W(R)$ 1.1.8
$P(S)$ 3.2.5
$S(P)$ 3.2.8
$ord_S(r)$ 3.2.15
$ad(\mathfrak{R})$, $ss(\mathfrak{R})$, $scon(\mathfrak{R})$, $der(\mathfrak{R})$ 6.5
$\Gamma(R)$ 6.6.1

EXPOSE XXII :

Ω , Ω_{R_+} 4.1.4
$ad(G)$, $rad(G)$ 4.3.6
$\underline{Tor}(G)$, $\underline{Bor}(G)$, $\underline{Kil}(G)$ 5.8.3
$\mathscr{H}$, Cl 5.8.1
$\mathscr{H}$, Cl_c 5.11.5
$Corad(G)$, $der(G)$ 6.2.1

EXPOSE XXIII : $\mathfrak{R}$ 1.6
Z_{R_1} 1.7
$\underline{\underline{Ep}}_S(\mathfrak{R})$, $T_S(\mathfrak{R})$, $B_S(\mathfrak{R})$ 5.11

EXPOSE XXIV : $\underline{Autext}(G)$ 1.1
$\underline{Isomext}(G,G')$ 1.10
$\underline{\underline{A}}_S(\mathfrak{R})$ 1.19
$\underline{Dyn}(G)$ 3.3
$\underline{\underline{Q.Ep}}_{S'/S}(\mathfrak{R})$ 3.11.2
s_G 3.16.6

EXPOSE XXVI : $rad^u(P)$ 1.6
$\underline{Lev}(P)$, $rad(P)$ 1.9
$\underline{Par}(G)$ 3.2
$\underline{\underline{t}}$ 3.2
$\underline{Crit}(G)$ 3.9
$\underline{Gen}(G)$, $\underline{Gen}(/Q)$, $\underline{Gen}(P/Q)$ 4.2.4
$\underline{Opp}(G)$, $\underline{Opp}(/P)$ 4.3.4
T_{tr} 6.5
$\underline{\underline{t}}_r$ 7.8

INDEX TERMINOLOGIQUE

A	abélien	:	rang abélien d'un groupe	X 8.7., XV 6.1. ter
	adapté	:	épinglage adapté à un sous-groupe parabolique	XXVI 1.11.
	adjoint	:	groupe semi-simple adjoint	XXII 4.3.3
			représentation adjointe	II 4.
	anisotrope	:	groupe réductif anisotrope	XXVI 6.13.
	associé	:	faisceau associé à un préfaisceau	IV 4.3.14.
B	bialgèbre	:	bialgèbre d'un groupe formel	VII_B 2.2.
	bon	:	$\underline{O}_S$-module bon, très bon	II 2.4.
			S-groupe bon, très bon	II 4.
	Borel	:	sous-groupe de Borel	XIV 4.1 et 4.5., XV 6.1., XXII 5.2.3.
C	(C)	:	sous-groupe de type (C)	XIII 6.2., XIV 3.8.
	canonique	:	topologie canonique	IV 4.3.
	caractéristique	:	sous-groupe caractéristique	VI_B 6.6
	Cartan	:	sous-algèbre de Cartan	XIII 4., XIV 2.4.
			sous-groupe de Cartan	XII 3.1.
			matrice de Cartan	XXI 7.3.

Cartier	:	dualité de Cartier	VII_A 3.3.1.
central	:	sous-groupe central	VI_B 6.6.
centralisateur	:		I 2.3., VI_B 6.6.
centre	:		I 2.3.
Chevalley	:	règle de Chevalley	XXIII 6.5.
		schémas de Chevalley	XXIII 5.11.
		systèmes de Chevalley	XXIII 6.1.
clos	:	ensemble clos de racines	XXI 3.1.4.
coalgèbre	:	S-Coalgèbre	VII_A 3.1.
		coalgèbre d'une variété formelle	VII_A 1.3.5.
commutateurs	:		VI_B 7.2.
comodule	:		I 4.7.
connexe	:	centralisateur connexe, normalisateur connexe	VI_B 6.5.
		groupe semi-simple simplement connexe	XXII 4.3.3.
conormal	:	faisceau conormal à une immersion	III 4.4.
constant	:	groupe constant tordu	X 5.1.
coracine	:	coracine	XX 2.8., XXII 1.1.1.
		coracine infinitésimale	XX 2.9., XXII 1.17.
couvrant	:	crible couvrant, famille couvrante, morphisme couvrant	IV 4.2.
crible	:		IV 4.1.
critique	:	tore critique, sous-groupe de type (R) critique d'un groupe réductif	XXII 5.10.4.

D dense : schématiquement dense IX 4.1.

relativement schématiquement dense XVIII 1.

déploiement : XXII 1.13.

déployable : groupe réductif déployable XXII 1.13.

groupe réductif quasi-déployable XXIV 3.9.

déployé : groupe réductif déployé XXII 1.13.

dérivé : groupe dérivé VI_B 7.2.

groupe dérivé d'un groupe réductif XXII 6.2.1.

descente : donnée de descente, morphisme de descente IV 2.

déviation : S-déviation VII_A 1.1.

diagonalisable: groupe diagonalisable I 4.4., VIII 1.1.

groupe localement diagonalisable VIII 1.1.

différentiel : opérateur différentiel VII_A 1.4.

Dynkin : diagramme de Dynkin XXI 7.4.1.

S-schéma de Dynkin XXIV 3.2.

E effectif : épimorphisme effectif, effectif universel IV 1.

relation d'équivalence effective, effective universelle IV 3.3.

épimorphisme, relation d'équivalence (M)-effectifs IV 3.4.

engendré : sous-groupe engendré par des morphismes séparables, par une partie VI_B 7.2.

enveloppante : algèbre enveloppante restreinte d'une p-algèbre de Lie VII_A 5.3.

épinglage : épinglage XXIII 1.1.

$\mathfrak{R}$ -épinglage XXIV 1.0.

quasi-épinglage XXIV 3.9.

	épinglé	:	groupe réductif épinglé	XXIII 1.1.
			groupe réductif quasi-épinglé	XXIV 3.9.
	équivalence	:	relation d'équivalence	IV 3.1.
	étale	:	morphisme étale, formellement étale	XI 1.1.
			morphisme infinitésimalement étale	XI 1.8.
			topologie étale, étale finie	IV 6.3.
			variété formelle étale	VII_B 1.6.
	exact	:	diagramme exact	IV 1.
F	faisceau	:		IV 4.3.
	fondamental	:	groupe fondamental, groupe fondamental élargi, pro-groupe fondamental élargi	X 6.
	formel	:	groupe formel	VII_B 2.1.
			variété formelle	VII_B 1.2.
			spectre formel d'un anneau pseudo-compact	VII_B 1.1.
	Frobenius	:	morphisme de Frobenius	VII_A 4.1.
G	général	:	position générale de deux sous-groupes de Borel	XXII 5.9.1.
	germe	:	germe de groupe	XVIII 3.1.
	groupe	:	structure de groupe dans une catégorie, ...	I 2.1.
	groupoïde	:	C-groupoïde	V 1.

H hauteur : hauteur d'un groupe radiciel VII_A 4.1.3.

hensélien : anneau hensélien X 4.

Hochschild : cohomologie de Hochschild I 5.

homogène : foncteur en espaces homogènes VI_B 10.15.

I infinitésimal: algèbre infinitésimale d'un groupe VII_A 2.1.

coracine infinitésimale, racine infinitésimale XX 2.9, XXII 1.17

rang infinitésimal d'un groupe XIII 6.2.

invariant : sous-groupe invariant I 2., VI_B 6.6..

irréductible : donnée radicielle irréductible XXI 7.1.4.

isogénie : isogénie de données radicielles XXI 6.2.1.

isogénie de groupes réductifs XXII 4.2.9.

isotrivial : (quasi-isotrivial, localement isotrivial, semi-localement isotrivial) :

fibrés principaux homogènes IV 6.5., XXIV 4.1.1.

groupes de type multiplicatif IX 1.1.

groupes constants tordus X 5.1.

groupes réductifs XXIV 4.1.2.

isotypique : groupe semi-simple isotypique XXIV 5.3.

K Killing : couple de Killing XXII 5.3.13.

polynôme de Killing XIII 4.

L Levi : sous-groupe de Levi XXVI 1.7.

libre : morphisme essentiellement libre de préschémas VIII 6.1.

morphisme topologiquement libre VII_B 0.2.1.

librement : groupe opérant librement IV 3.2.

Lie : algèbre de Lie d'un S-foncteur en groupes II 4.

algèbre de Lie d'un groupe formel VII_B 2.6.

p-algèbre de Lie VII_A 5.2.

lisse : morphisme lisse, formellement lisse XI 1.1.

morphisme infinitésimalement lisse XI 1.8.

localement : propriété vraie localement pour une topologie IV 4.2.

M

(M) : relation d'équivalence de type (M) IV 3.4.

morphisme : morphisme de données radicielles XXI 6.1.

morphismes de groupes déployés XXII 4.2.1.

morphisme de groupes épinglés XXIII 1.3.

multiplicatif : groupe formel de type multiplicatif VII_B 2.5.2.

schéma en groupes de type multiplicatif IX 1.1.

N

neutre : composante neutre VI_B 3.

nilpotent : groupe nilpotent VI 8.1.

rang nilpotent d'un groupe XII 1., XV 6.1. ter

algèbre de Lie localement nilpotente, strictement nilpotente XIV 2.2.

rang nilpotent d'une algèbre de Lie XIII 4.

normalisateur : I 2.3., VI_B 6.1.

O	opposés	:	groupes de Borel opposés	XXII 5.9.1.
			sous-groupes paraboliques opposés	XXVI 4.3.3.
			types de sous-groupes paraboliques opposés	XXVI 4.3.1.
	ordre	:	ordre d'une racine	XXI 3.2.15.
	osculatrice	:	position osculatrice de deux sous-groupes paraboliques	XXVI 4.4.2.
	orthogonal	:	racines orthogonales	XXI 2.2.3.
P	parabolique	:	sous-groupes paraboliques	XIV 4.8. bis, XV 6.1., XXII 5.2.3.
	plat	:	morphisme topologiquement plat	VII_B 1.3.1.
			variété formelle topologiquement plate	VII_B 1.3.5.
			topologie fidèlement plate et quasi-compacte, topologie fidèlement plate et localement de présentation finie	IV 6.3.
	poids	:	poids	XXI 6.6.1.
			poids fondamentaux	XXI 6.6.3.
	positif	:	systèmes de racines positives	XXI 3.2.1.
	préfaisceau	:		IV 4.3.
	prétopologie	:		IV 4.2.
	principal	:	foncteur formellement principal homogène	III 0.
			fibrés principal homogène	IV 5.1.
	profini	:	algèbre profinie	VII_B 0.4.
	pseudocompact	:	anneau pseudocompact	VII_B 0.1.
			module pseudocompact	VII_B 0.2.
Q	quotient	:	objet-quotient	IV 5.2.1.
			groupe-quotient	IV 3.1.

R

(R)	:	sous-groupe de type (R)	XXII 5.2.1.
(RA)	:	groupes de type (RA)	XXII 5.1.6.
(RR)	:	groupes de type (RR)	XXII 5.1.1.
racine	:	racine	XIX 1.10., XXII 1.11.
		racine infinitésimale	XX 2.9., XXII 1.17.
		système de racines	XIX 3.6.
radical	:	radical	XIX 1.2.
		radical unipotent	XIX 1.2.
radiciel	:	donnée radicielle	XXI 1.1.
ramifié	:	morphismes non ramifié, formellement non-ramifié	XI 1.1.
		morphisme infinitésimalement non ramifié	XI 1.8.
rang	:	rang abélien d'un groupe	X 8.7., XV 6.1. ter
		rang infinitésimal d'un groupe	XIII 6.2.
		rang nilpotent d'un groupe	XII 1., XV 6.1. ter
		rang réductif d'un groupe	X 8.7., XV 6.1. ter
		rang semi-simple d'un groupe	XIX 1.8.
		rang unipotent d'un groupe	XII 1.
		rang nilpotent d'une algèbre de Lie	XIII 4.
réductif	:	groupe réductif	XVI 4.10., XIX 1.6, XIX 2.7.
		rang réductif d'un groupe	X 8.7., XV 6.1. ter
		centre réductif	XII 4., XII 8.6.
réduit	:	donnée radicielle réduite	XXVI 2.1.3.
réflexif	:	groupe réflexif relativement au groupe I	VIII 1.
régulier	:	points réguliers d'un groupe	XIII 2.7. et 3.
		section régulière d'un groupe	XIII 3.2.

éléments réguliers d'une algèbre de Lie XIII 4.

section régulière, quasi-régulière, d'une algèbre de Lie XIV 2.5.

relative : dimension relative d'un schéma lisse XI 1.9.

résoluble : groupe résoluble VI_B 8.1.

groupe k-résoluble XVII 5.1.0.

S semi-simple : point semi-simple d'un groupe XII 8.

groupe semi-simple XVI 4.10., XIX 1.8., XIX 2.7.

rang semi-simple d'un groupe XIX 1.8.

séparé : préfaisceau séparé IV 4.3.

simple : groupe semi-simple simple XXIV 5.3.

systèmes de racines simples XXI 3.1.6.

standard : position standard de deux sous-groupes paraboliques XXVI 4.5.

T tangent : fibré tangent II 3.1.

topologie : IV 4.2.

tore : tore IX 1.3.

tore maximal XII 1.3., XV 6.1.

transporteur : transporteur, transporteur strict VI_B 6.1., VIII

transversal : position transversale de deux sous-groupes paraboliques XXVI 4.2.3.

type : type d'un groupe de type multiplicatif IX 1.4.

type d'un groupe constant tordu X 5.1.

type d'un groupe réductif XXII 2.7.

type d'un sous-groupe parabolique XXVI 3.4.

type relatif d'un sous-groupe parabolique XXVI 7.8.

U	unipotent	:	groupe unipotent	XVII 1.1 et 1.3.
			groupe formel unipotent	VII_B 2.5.2.
			rang unipotent d'un groupe	XII 1.
			radical unipotent	XIX 1.2.
	universel	:	épimorphisme universel, effectif universel	IV 1.
			relation d'équivalence effective universelle	IV 3.3.
V	vectoriel	:	groupe vectoriel associé à une racine	XXII 1.3.
	Verschiebung	:		VII_A 4.3.
W	Weyl	:	chambre de Weyl	XXI 3.6.10.
			groupe de Weyl	XII 2.
Z	Zariski	:	topologie de Zariski	IV 6.1.